L3MATH — Université Paris-Saclay, Orsay

M203-Algèbre — 2025–2026

Interrogation 1 : Matrices équivalentes, matrices semblables

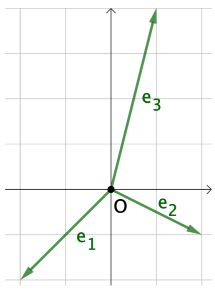
Durée : 30 minutes - 4 questions.

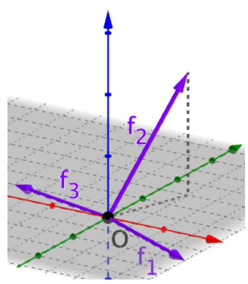
Mardi 16 septembre 2025

Question 1. Soit $n \geq 1$. Démontrez que le déterminant est un invariant de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 2. Répondre par vrai ou faux et argumenter par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Il existe au plus une application linéaire dont les images de e_1, e_2, e_3 sont respectivement f_1, f_2, f_3.





2. Soient A et B deux matrices carrées. Si A et B sont équivalentes, alors A^2 et B^2 sont équivalentes.

Question 3. Soient F, G les deux sous-espaces vectoriels représentés ci-dessous. Soit p la projection sur F parallèlement à G.
Donnez une définition (de votre choix) de p.

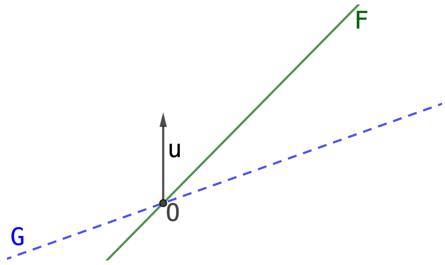
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Construisez graphiquement $p(u)$. Explicitez votre construction sur le schéma **et** à l'écrit.



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Question 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $F = \mathbb{R}^5$. On note $\mathcal{F}$ la famille constituée des vecteurs $f_1 = (2, 1, 1, 3, 0)$, $f_2 = (-3, 0, -1, -2, 2)$ et $f_3 = (1, -1, 0, -1, -2)$.

1. Justifier pourquoi il existe une unique application linéaire, f de E dans F vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $f(e_i) = f_i$. Déterminer sa matrice associée dans des bases qu'on précisera.

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

2. Déterminez le rang de f. Déduisez-en sa matrice réduite (par équivalence).

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

3. Expliquez à partir de l'exemple les grandes étapes du raisonnement permettant de déterminer des bases dans lesquelles la matrices f est réduite. Explicitez ces bases.

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .