L3MATH — Université Paris Saclay, Orsay

M302–Algèbre — 2025–2026

Interrogation 3 : Isométries, espaces affines

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 14 novembre 2025

Question 1. (2 points) Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrez qu'un endomorphisme qui préserve le produit scalaire préserve aussi la norme.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Question 2. (3 points) Répondez par vrai ou faux et argumentez par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Dans $\mathbb{R}^4$, la droite affine $D = \{(1+t, 2-t, 3+t, 4-t),\ t \in \mathbb{R}\}$ est faiblement parallèle à l'hyperplan affine P d'équation $w + 2x + 2y + z = 1$ (les coordonnées d'un point étant (w, x, y, z) dans cet ordre).

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

2. On peut définir un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^6$ à l'aide de 2 équations cartésiennes.

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

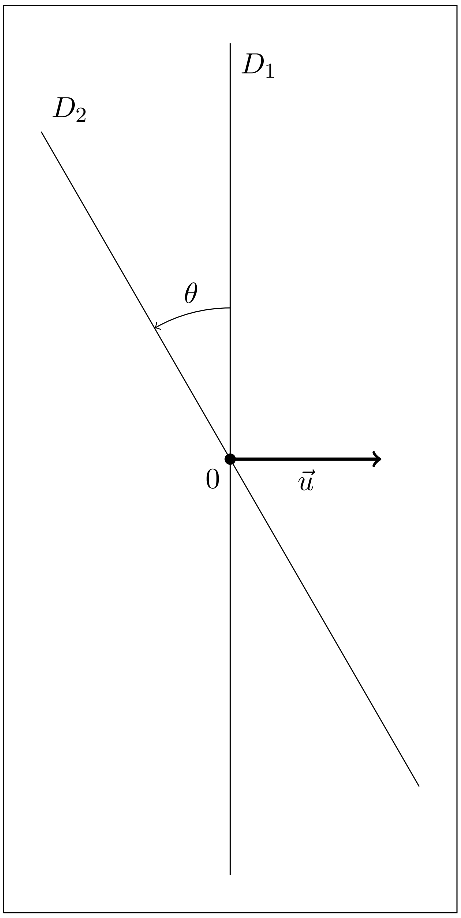
Question 3. (3 points) Soient D_1, $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ deux droites vectorielles formant un angle $\theta = 20°$ (cf. dessin). On note s_{D_1} la symétrie orthogonale d'axe D_1, s_{D_2} la symétrie orthogonale d'axe D_2, et r_θ la rotation d'angle $\theta = 20°$.

1. Soit $h = s_{D_2} \circ r_\theta \circ s_{D_1}$. La transformation h est-elle une symétrie axiale, une rotation, ou une homothétie de rapport $\lambda > 1$? Justifiez.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Construisez ci-contre l'image par $h = s_{D_2} \circ r_\theta \circ s_{D_1}$ du vecteur $\vec{u}$. Déduisez-en un description complète de h.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....



Question 4. (2 points) Soit $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \text{ et } x_1 + x_2 + x_4 = -2\}$ un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$. Déterminez une base de $\vec{A}$, puis une représentation paramétrique de A.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....