

## Examen partiel du 24 octobre 2025 (trois heures)

*La note tiendra compte du soin et de la qualité de l'expression écrite.*

*Les réponses non argumentées ne rapportent aucun point.*

*Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

*Tous les exercices sont indépendants.*

### Exercice I (4 points)

- (1) Est-il vrai que si deux matrices (carrées de même taille) sont équivalentes, alors elles sont semblables ?
- (2) Existe-t-il une famille  $(v_1, v_2, v_3)$  de trois vecteurs de  $\mathbf{R}^2$  qui soit génératrice ?
- (3) Combien existe-t-il de classes de similitudes d'endomorphismes de  $\mathbf{R}^4$  dont le polynôme caractéristique soit  $(X - 1)^2(X - 2)^2$  ?
- (4) Soit  $P \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R})$ . Est-il vrai que si  $P^5 = 0$ , alors nécessairement  $P^4 = 0$ .
- (5) L'application  $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + y_1 y_2$  est-elle un produit scalaire ?

### Exercice II (2 points)

Déterminer une équation cartésienne du sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  engendré par les vecteurs  $u := (1, 2, 3)$  et  $v := (4, 2, 1)$ .

### Exercice III (2 points)

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  défini par les équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

### Exercice IV (3 points)

Soit  $E$  un espace vectoriel réel. Soit  $r$  un endomorphisme de  $E$ .

- (1) Développer l'expression  $(r - \text{id}_E) \circ (r^2 + r + \text{id}_E)$ .

On suppose maintenant que  $r^2 + r + \text{id}_E = 0$ .

- (2) Montrer que  $r^3 = \text{id}_E$ .
- (3) Calculer  $r^{2025}$ .
- (4) On suppose  $E = \mathbf{R}^2$ . Donner un exemple d'endomorphisme  $r$  de  $E$  qui vérifie  $r^2 + r + \text{id}_E = 0$ . Écrire la matrice de  $r$  dans la base canonique. (Indication : commencer par chercher  $r \neq \text{id}_E$  tel que  $r^3 = \text{id}_E$ .)

### Exercice V (5 points)

$$\text{Notons } M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -6 & -5 & 18 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le produit  $MQ$ . (Comme presque toutes les autres questions de cet exercice dépendent de ce résultat, il est important de prendre le soin de bien faire ce calcul.)

On note  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est  $M$ . Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on note  $v_i \in \mathbf{R}^3$  l'élément correspondant au  $i$ -ème vecteur-colonne de  $Q$ .

(2) Montrer que  $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ .

(3) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

(4) Quelle est la nature géométrique de la transformation  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ? Quels sont ses éléments caractéristiques?

(5) Calculer  $M^n$  pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ .

(6) On note  $p := \frac{1}{2}(f + \text{id}_{\mathbf{R}^3})$ . Montrer que  $p \circ p = p$ .

### Exercice VI (4 points)

(1) Quelles sont toutes les formes de Jordan possibles pour un endomorphisme nilpotent de  $\mathbf{R}^4$ ? Pour chaque possibilité, donner un représentant matriciel et le tableau de Young correspondant.

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Déterminer le rang et la dimension du noyau de  $f$ .

(3) Montrer que  $f$  est nilpotent et préciser son ordre (indice?) de nilpotence. Déterminer son tableau de Young.

(4) Déterminer une base de  $\ker f$ .

(5) Supposons que  $(v_1, v_2, v_3)$  soient trois vecteurs de  $\mathbf{R}^4$  tels  $f(v_2) = f(v_3) = 0$  et que  $(f(v_1), v_2, v_3)$  soit une famille libre. Montrer que  $(v_1, f(v_1), v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbf{R}^4$ .

(6) Déterminer une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{R}^4$  dans laquelle la matrice de  $f$  est une matrice de Jordan.