Groupes et géométrie

Examen partiel

Exercice 1

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle.

1. Montrer que si $\dim \mathfrak{g} = 2$ et $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne, alors il existe une base (X, Y) de $\mathfrak{g}$ vérifiant $[X, Y] = Y$.
2. Montrer que si $\dim \mathfrak{g} \leq 3$ et $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble, alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

   Indication : on peut utiliser le radical résoluble de $\mathfrak{g}$ pour montrer que $\mathfrak{g}$ est soit résoluble, soit semi-simple.
3. Montrer que si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, mais pas abélienne, alors $\dim \mathfrak{g} \geq 3$.
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_t$ de dimension 3 possédant une base (X, Y, Z) telle que :
$$[X, Y] = Z\ ; \quad [Y, Z] = tZ\ ; \quad [Z, X] = 0.$$
5. Montrer que si $t \neq 0$, alors $\mathfrak{g}_t$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_1$. Les algèbres $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_0$ sont-elles isomorphes ?
6. Montrer que $\mathfrak{g}_t$ est résoluble. Pour quelles valeurs de t est-elle nilpotente ?
7. Montrer que si $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors $\mathfrak{g}$ est soit abélienne, soit isomorphe à $\mathfrak{g}_t$ pour un nombre $t \in \mathbb{R}$.

   Indication : on pourra commencer par montrer que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est abélienne.

Exercice 2

On note G le groupe de Lie $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et V l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\rho : G \times G \to \mathrm{GL}(V)$ l'application définie par $\rho(g_1, g_2)v = g_1 v g_2^{-1}$ pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $v \in V$.

1. Montrer que ρ est une représentation de groupes de Lie. Quel est son noyau?
2. Montrer que le sous-groupe $\mathrm{O}(\det) \subset \mathrm{GL}(V)$ formé des applications $f : V \to V$ telles que $\det(f(v)) = \det(v)$ pour tout $v \in V$, est isomorphe au groupe $\mathrm{O}(2, 2)$.
3. En déduire que les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{o}(2, 2)$ sont isomorphes.
4. Quel est l'isomorphisme de groupes de Lie que l'on a obtenu?

Exercice 3

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t XY\right)$. On considère le sous-groupe $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, et on munit le fibré tangent $T\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ de la connexion ∇ définie par:

$$\nabla_x \sigma(v) = p_{T_x \mathrm{O}(n, \mathbb{R})}(d_x \sigma(v))$$

où $p_{T_x \mathrm{O}(n, \mathbb{R})} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to T_x \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est la projection orthogonale.

1. Rappeler pourquoi cette formule définit bien une connexion sur $T\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.
2. Pour deux champs de vecteurs invariants à gauche $\overline{X}, \overline{Y}$ sur $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, calculer $\nabla_{\overline{X}} \overline{Y}$.
3. Calculer la courbure et la torsion de ∇.

Groups and geometry

Mid-term exam

Exercise 1

Let $\mathfrak{g}$ be a real Lie algebra.

1. Prove that if $\dim \mathfrak{g} = 2$ and $\mathfrak{g}$ is not abelian, then there is a basis (X, Y) of $\mathfrak{g}$ satisfying $[X, Y] = Y$.
2. Prove that if $\dim \mathfrak{g} \leq 3$ and $\mathfrak{g}$ is not solvable, then $\mathfrak{g}$ is isomorphic to $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

   Hint: you can use the solvable radical of $\mathfrak{g}$ to show that $\mathfrak{g}$ is either solvable or semi-simple.
3. Prove that if $\mathfrak{g}$ is nilpotent, but not abelian, then $\dim \mathfrak{g} \geq 3$.
4. Prove that for any $t \in \mathbb{R}$, there is a 3-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}_t$ which has a basis (X, Y, Z) satisfying:
$$[X, Y] = Z \ ; \quad [Y, Z] = tZ \ ; \quad [Z, X] = 0.$$
5. Prove that for any $t \neq 0$, the Lie algebra $\mathfrak{g}_t$ is isomorphic to $\mathfrak{g}_1$. Are the Lie algebras $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_0$ isomorphic to each other?
6. Prove that $\mathfrak{g}_t$ is solvable. For which values of t is it nilpotent?
7. Prove that if $\dim \mathfrak{g} = 3$ and $\mathfrak{g}$ is nilpotent, then $\mathfrak{g}$ is either abelian or isomorphic to $\mathfrak{g}_t$ for some $t \in \mathbb{R}$.

   Hint: you can start by proving that $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ is abelian.

Exercise 2

Let G be the Lie group $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ and V the vector space $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Denote by $\rho : G \times G \to \mathrm{GL}(V)$ the map defined by $\rho(g_1, g_2)v = g_1 v g_2^{-1}$ for all $g_1, g_2 \in G$ and $v \in V$.

1. Prove that ρ is a Lie group representation. What is its kernel?
2. Prove that the subgroup $\mathrm{O}(\det) \subset \mathrm{GL}(V)$ consisting of maps $f : V \to V$ such that $\det(f(v)) = \det(v)$ for all $v \in V$ is isomorphic to $\mathrm{O}(2, 2)$.
3. Prove that the Lie algebras $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ and $\mathfrak{o}(2, 2)$ are isomorphic to each other.
4. What is the Lie group isomorphism that we obtained?

Exercice 3

Endow $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ with the inner product $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t XY\right)$. Consider the subgroup $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, and the connection ∇ on the tangent bundle $T\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ defined as:

$$\nabla_x \sigma(v) = p_{T_x \mathrm{O}(n, \mathbb{R})}(d_x \sigma(v))$$

where $p_{T_x \mathrm{O}(n, \mathbb{R})} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to T_x \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ is the orthogonal projection.

1. Recall why this formula defines a connection on $T\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.
2. Given two left-invariant vector fields $\overline{X}, \overline{Y}$ on $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, compute $\nabla_{\overline{X}} \overline{Y}$.
3. Compute the curvature and the torsion of ∇.