Groupes et algèbres de Lie

Devoir maison

Ce devoir est à rendre pour le **lundi 7 avril à 8h15**, soit en personne lors du cours, soit par mail à l'adresse suivante :

daniel.monclair@universite-paris-saclay.fr

Ce devoir sera noté de façon non pénalisante : la note finale N_F sera calculée selon la formule

$$N_F = \max\left(N_E, \frac{N_E + N_{DM}}{3}\right)$$

où N_E est la note de l'examen final et N_{DM} est la note de ce devoir maison. Si vous rendez le devoir au plus tard le vendredi 4 avril, il sera corrigé et rendu le 7 avril.

Exercice 1 : Représentations de $\mathrm{U}(1)$ et $\mathbf{T}_d$

1. En identifiant $M_1(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}$, montrer que l'espace tangent $T_1\mathrm{U}(1)$ est égal à $i\mathbb{R}$ (faire un dessin).
2. Montrer que l'exponentielle complexe $e^{i\theta}$ coincide avec l'exponentielle de matrices $\exp(i\theta)$ de $i\theta \in \mathfrak{u}(1)$.
3. Pour $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$, on note

$$\rho_{\mathbf{k}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{U}(1) & \to & \mathrm{GL}_N(\mathbb{C}) \\ z & \mapsto & \begin{pmatrix} z^{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{k_N} \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

   Montrer que $(\mathbb{C}^N, \rho_{\mathbf{k}})$ est une représentation de $\mathrm{U}(1)$.
4. À quelle condition $(\mathbb{C}^N, \rho_{\mathbf{k}})$ est-elle irréductible ?
5. Montrer que si (V, ρ) est une représentation irréductible de $\mathrm{U}(1)$, alors il existe $J \in \mathfrak{gl}(V)$ tel que $\rho(e^{i\theta}) = \exp(\theta J)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que si $J \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ vérifie $\exp(2\pi J) = I_N$, alors J est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $i\mathbb{Z}$.
   Indication : on pourra utiliser la forme réduite de Jordan.
7. En déduire une classification des représentations de $\mathrm{U}(1)$ à conjugaison près, ainsi qu'une classification de ses représentations irréductibles à conjugaison près.
8. Une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(1)$ vient-elle d'une représentation du groupe $\mathrm{U}(1)$?

Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble

$$\mathbf{T}_d = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{it_d} \end{pmatrix} \middle| \, t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. Montrer que $\mathbf{T}_d$ est un sous-groupe de Lie matriciel de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$.
10. Décrire son algèbre de Lie.
11. Montrer que si (V, ρ) est une représentation irréductible de $\mathbf{T}_d$, alors $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

Exercice 2 : $\mathrm{SO}(4)$ **et** $SU(2) \times \mathrm{SU}(2)$

On considère le groupe formé de matrices diagonales par blocs

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \middle| g_1, g_2 \in \mathrm{SU}(2) \right\} \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}).$$

1. Expliquer pourquoi G est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$.

On considère le sous-ensemble

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Pour $g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in G$ et $Q \in \mathbb{H}$, on note $\rho(g) \cdot Q := g_1 Q g_2^{-1}$.

2. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de dimension 4 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
3. Montrer que si $g \in G$ et $Q \in \mathbb{H}$, alors $\rho(g) \cdot Q \in \mathbb{H}$.
4. Montrer que $(\mathbb{H}, \rho)$ est une représentation réelle de G.
5. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{H}$ tel que $\langle Q, Q \rangle = \det Q$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$.
6. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{H}$ pour le produit scalaire défini à la question précédente. Pour $g \in G$, on note $\rho_{\mathcal{B}}(g) := [\rho(g)]_{\mathcal{B}}$. Montrer que $\rho_{\mathcal{B}}(g) \in \mathrm{O}(4)$ pour tout $g \in G$.
7. En déduire un isomorphisme entre les algèbres de Lie $\mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{u}(2)$ et $\mathfrak{so}(4)$.