Groupes et géométrie

Examen final

Exercice 1

Quelques résultats sur les métriques riemanniennes invariantes à gauche

1. Montrer qu'une métrique riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie est complète.
2. Montrer que si ∇ est la connexion de Levi-Civita d'une métrique Riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie G, et $X, Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$, alors $\nabla_X Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$.
3. Soient G et H des groupes de Lie connexes, et $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. On suppose que $d_e f$ est inversible. Montrer que si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une métrique Riemannienne invariante à gauche sur H, alors le tiré en arrière $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ est une métrique Riemannienne invariante à gauche sur G. En déduire que f est un revêtement.
4. Soit G un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne. Montrer que G est abélien et que $\exp_G$ est surjective.

Exercice 2

Construction d'une algèbre de Lie

On considère un espace vectoriel réel V de dimension finie, et une forme linéaire $\ell : V \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $[\cdot,\cdot] : \left\{ \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (x,y) & \mapsto & \ell(x)y - \ell(y)x \end{array} \right.$ est un crochet de Lie.

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie ainsi construite.

2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est-elle résoluble ? Nilpotente ? Semi-simple ?

Les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a}$

On considère un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{n} = \ker \ell \subset \mathfrak{g}$, et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ son orthogonal. On notera $X_\ell \in \mathfrak{a}$ le vecteur vérifiant $\ell(X) = \langle X_\ell, X \rangle$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

3. Vérifier que $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g}$. Est-ce un idéal ?
4. Vérifier que $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g}$. Est-ce un idéal ?
5. Pour $X \in \mathfrak{n}$, décrire la matrice de $\mathrm{ad}(X)$ dans une base adaptée à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$. Faire de même pour $\mathrm{ad}(X_\ell)$.

Le groupe de Lie G

On considère un groupe de Lie connexe G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$. On note N (resp. A) le sous-groupe de Lie connexe immergé de G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{a}$).

6. Montrer que si $X \in \mathfrak{n}$ ou $X \in \mathfrak{a}$, et $\exp_G(X) = e$, alors $X = 0$.
   Indication : déterminer la matrice de $\mathrm{Ad}(\exp_G(X))$ *dans une base adaptée à* $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$.
7. Montrer que $\exp_G$ réalise un difféomorphisme entre $\mathfrak{n}$ et N, ainsi qu'entre $\mathfrak{a}$ et A.

8. Montrer que la restriction à A de la projection $G \to G/N$ est un revêtement.

9. Montrer que pour tout $g \in G$, il existe un unique couple $(n,a) \in N \times A$ tel que $g = na$.

10. Montrer que l'application $G \to N \times A$ ainsi définie est un difféomorphisme.

11. Montrer que G est simplement connexe.

12. Le groupe G peut-il posséder une métrique Riemannienne bi-invariante ?

Courbure de G

On considère une métrique Riemannienne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ invariante à gauche sur G.

13. Montrer que pour $X, Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$ vérifiant $X(e) \in \mathfrak{n}$ et $Y(e) \in \mathfrak{n}$, on a $\nabla_X Y(e) = \langle X, Y\rangle X_\ell$.

14. Montrer que pour tout $Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$, on a $\nabla_e Y(X_\ell) = 0$.

15. Calculer $\nabla_X Y(e)$ lorsque $X, Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$ vérifient $X(e) \in \mathfrak{n}$ et $Y(e) \in \mathfrak{a}$.

16. Pour quels $X \in \mathfrak{g}$ la courbe $t \mapsto \exp_G(tX)$ est-elle une géodésique ?

17. Donner une expression simple de $R(X,Y)Z$ pour $X, Y, Z \in {}^G\mathcal{X}(G)$.

18. Montrer que la courbure sectionnelle de G est constante, et donner sa valeur.

19. En déduire que $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est isométrique à une variété riemannienne vue en cours, et que c'est un espace symétrique.

Le groupe d'isométries de G

20. Montrer que pour toute isométrie linéaire $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$), il existe une unique isométrie $\Phi \in \mathrm{Isom}(G)$ telle que $\Phi(e) = e$ et $d_e\Phi = \varphi$.

21. On note $K \subset \mathrm{Isom}(G)$ le stabilisateur de e. Montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} K \times A \times N & \to & \mathrm{Isom}(G) \\ (k,a,n) & \mapsto & k \circ L_a \circ L_n \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme.

22. Lorsque $\dim \mathfrak{g} = 2$, donner une représentation explicite de G dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, et décrire les images de A et de N.

Exercice 3

Courbure d'un graphe

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application lisse. On note $S = \{(x,y,f(x,y)) \,\big|\, (x,y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$ le graphe de f. En un point $(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \in S$ tel que $d_{(x_0,y_0)}f = 0$, calculer la seconde forme fondamentale de S ainsi que sa courbure de Gauß.

Groups and geometry

Final exam

Exercise 1

A few results on left-invariant Riemannian metrics

1. Prove that a left-invariant Riemannian metric on a Lie group is complete.

2. Prove that if ∇ is the Levi-Civita connection of a left-invariant Riemannian metric on a Lie group G, and $X, Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$, then $\nabla_X Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$.

3. Let G and H be connected Lie groups, and consider a Lie group morphism $f : G \to H$. Let us assume that $d_e f$ is invertible. Given a left-invariant Riemannian metric $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on H, prove that the pull-back $f^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ is a left-invariant Riemannian metric on G. Infer that f is a covering map.

4. Let G be a connected Lie group whose Lie algebra $\mathfrak{g}$ is abelian. Prove that G is abelian and that $\exp_G$ is surjective.

Exercise 2

Construction of a Lie algebra

Let V be a finite dimensional real vector space, and consider a linear form $\ell : V \to \mathbb{R}$.

1. Prove that the map $[\cdot,\cdot] : \left\{ \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (x,y) & \mapsto & \ell(x)y - \ell(y)x \end{array} \right.$ is a Lie bracket.

We now denote by $\mathfrak{g}$ the Lie algebra that we obtain.

2. Is the Lie algebra $\mathfrak{g}$ solvable? Nilpotent? Semi-simple?

The Lie subalgebras $\mathfrak{n}$ and $\mathfrak{a}$

Consider an inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on $\mathfrak{g}$. Let $\mathfrak{n} = \ker \ell \subset \mathfrak{g}$ and $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ its orthogonal. Consider the vector $X_\ell \in \mathfrak{a}$ such that $\ell(X) = \langle X_\ell, X\rangle_e$ for all $X \in \mathfrak{g}$.

3. Prove that $\mathfrak{n}$ is an abelian Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$. Is it an ideal?

4. Prove that $\mathfrak{a}$ is an abelian Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$. Is it an ideal?

5. Given $X \in \mathfrak{n}$, describe the matrix of $\mathrm{ad}(X)$ in a basis adapted to the decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$. Do the same for $\mathrm{ad}(X_\ell)$.

The Lie group G

Let G be a connected Lie group whose Lie algebra is $\mathfrak{g}$. Consider the connected immersed Lie subgroup N (resp. A) whose Lie algebra is $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{a}$).

6. Prove that for $X \in \mathfrak{n}$ or $X \in \mathfrak{a}$, if $\exp_G(X) = e$, then $X = 0$.
   Hint: describe the matrix of $\mathrm{Ad}(\exp_G(X))$ *in a basis adapted to* $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$.

7. Prove that $\exp_G$ is a diffeomorphism from $\mathfrak{n}$ to N, and also from $\mathfrak{a}$ to A.

8. Prove that the restriction to A of the projection $G \to G/N$ is a covering map.

9. Given $g \in G$, prove that there is a unique pair $(n,a) \in N \times A$ such that $g = na$.
10. Prove that the map $G \to N \times A$ thus defined is a diffeomorphism.
11. Prove that G is simply connected.
12. Can the Lie group G possess a bi-invariant Riemannian metric?

Curvature of G

Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a left-invariant Riemannian metric on G.

13. Given $X, Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$ such that $X(e) \in \mathfrak{n}$ and $Y(e) \in \mathfrak{n}$, prove that $\nabla_X Y(e) = \langle X, Y \rangle X_\ell$.
14. Given $Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$, prove that $\nabla_e Y(X_\ell) = 0$.
15. Calculate $\nabla_X Y(e)$ when $X, Y \in {}^G\mathcal{X}(G)$ satisfy $X(e) \in \mathfrak{n}$ and $Y(e) \in \mathfrak{a}$.
16. For which $X \in \mathfrak{g}$ is the curve $t \mapsto \exp_G(tX)$ a geodesic?
17. Give a simple expression of $R(X,Y)Z$ for $X, Y, Z \in {}^G\mathcal{X}(G)$.
18. Prove that the sectional curvature of G is constant, and give its value.
19. Infer that $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is isometric to a Riemannian manifold seen in the lectures, and that it is a symmetric space.

The isometry group of G

20. Given a linear isometry $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (for the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$), prove that there is a unique isometry $\Phi \in \mathrm{Isom}(G)$ such that $\Phi(e) = e$ and $d_e\Phi = \varphi$.
21. Let $K \subset \mathrm{Isom}(G)$ be the stabilizer of e. Prove that the map
$$\begin{cases} K \times A \times N & \to & \mathrm{Isom}(G) \\ (k,a,n) & \mapsto & k \circ L_a \circ L_n \end{cases}$$
is a diffeomorphism.
22. When $\dim \mathfrak{g} = 2$, give an explicit representation of G in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, and describe the images of A and N.

Exercise 3

Curvature of a graph

Let $U \subset \mathbb{R}^2$ be an open set, and $f : U \to \mathbb{R}$ a smooth map. Consider its graph $S = \{(x,y,f(x,y)) \,\big|\, (x,y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$. At a point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in S$ such that $d_{(x_0,y_0)} f = 0$, calculate the second fundamental form of S and its Gauß curvature.