Groupes et géométrie

Examen final

Exercice 1

Soit $\mathbb{X}$ un espace symétrique riemannien.

1. Pour $x \in \mathbb{X}$, on considère l'opérateur auto-adjoint $\varphi_x \in \mathrm{End}(T_x\mathbb{X})$ tel que :

$$\forall u, v \in T_x\mathbb{X} \quad \langle \varphi_x(u), v\rangle_x = \mathrm{Ric}_x(u,v)$$

   Montrer que pour $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{X})$, on a $d_xf \circ \varphi_x = \varphi_{f(x)} \circ d_xf$.

2. Soit $o \in \mathbb{X}$. Si $\mathbb{X}$ est irréductible, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_o = \lambda\,\mathrm{Id}$.
   Indication : on pourra considérer l'action de $K = \mathrm{Stab}_G(o)$ sur les espaces propres de φ_o.

3. En déduire que tout espace symétrique irréductible est une variété d'Einstein.

Exercice 2

On considère deux variétés lisses M et N.

1. Soit $f : M \to N$ une application lisse. Montrer que $\ker df$ est un sous-fibré vectoriel de TM si et seulement si f est de rang constant.

2. Quelle(s) condition(s) faut-il rajouter pour que $\mathbb{Im}\, df$ soit un sous-fibré vectoriel de TN ?

Exercice 3

Soit (M,g) une variété riemannienne. On note X l'espace total du fibré unitaire tangent T^1M, c'est à dire

$$X = \{(x,v) \mid x \in M,\ v \in T_xM,\ g_x(v,v) = 1\}$$

On note $\pi : X \to M$ la projection (donnée par $\pi(x,v) = x$).

Le fibré tangent de X

1. Pour $(x,v) \in X$, on note $V_{(x,v)} = \ker d_{(x,v)}\pi \subset T_{(x,v)}X$. Quelle est la dimension de $V_{(x,v)}$? Montrer que l'on définit ainsi un sous-fibré vectoriel V de TX.

2. Soit $(x,v) \in X$ et $z \in T_{(x,v)}X$. On considère un chemin $\gamma(t) = (c(t), X(t)) \in X$ tel que $\gamma(0) = (x,v)$ et $\dot\gamma(0) = z$. Montrer que l'application

$$\varphi_{(x,v)} : \begin{cases} T_{(x,v)}X & \to & T_xM \\ z & \mapsto & \frac{D}{dt}X(0) \end{cases}$$

   est bien définie (i.e. $\varphi_{(x,v)}(z)$ ne dépend que de z et pas du chemin γ) et définit un isomorphisme linéaire de $V_{(x,v)} = \ker d_{(x,v)}\pi$ vers $v^\perp \subset T_xM$.

   Indication : en utilisant des coordonnées locales, on se ramène au cas où $M \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert et $X \subset \mathbb{R}^{2d}$ est une sous-variété dont on donnera une équation. On trouvera ainsi des équations pour les sous-espaces $T_{(x,v)}X$ et $V_{(x,v)}$ de $\mathbb{R}^{2d}$, et une formule explicite pour $\varphi_{(x,v)}$.

3. Pour $(x,v) \in X$ et $w \in T_xM$, on pose

$$\psi_{(x,v)}(w) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (c_w(t), V(t))$$

où c_w est la géodésique de condition initiale $\dot{c}_w(0) = w$, et V est le champ de vecteurs parallèle le long de c_w tel que $V(0) = v$. Montrer que l'application $\psi_{(x,v)} : T_xM \to T_{(x,v)}X$ est linéaire et injective.

4. On note $H_{(x,v)} = \psi_{(x,v)}(T_xM) \subset T_{(x,v)}X$. Montrer que l'on définit ainsi un sous-fibré vectoriel H de TX, et que l'on a $TX = H \oplus V$.

5. Montrer qu'il existe une unique métrique riemannienne $\widetilde{g}$ sur X vérifiant les trois propriétés suivantes :

   - $\forall (x,v) \in X\ \forall z_1, z_2 \in V_{(x,v)} \quad \widetilde{g}_{(x,v)}(z_1, z_2) = g_x\left(\varphi_{(x,v)}(z_1), \varphi_{(x,v)}(z_2)\right)$
   - $\forall (x,v) \in X\ \forall w_1, w_2 \in T_xM \quad \widetilde{g}_{(x,v)}\left(\psi_{(x,v)}(w_1), \psi_{(x,v)}(w_2)\right) = g_x(w_1, w_2)$
   - $\forall (x,v) \in X\ \forall (z_V, z_H) \in V_{(x,v)} \times H_{(x,v)} \quad \widetilde{g}_{(x,v)}(z_V, z_H) = 0$

6. On note $\mathcal{Z} \in \mathcal{X}(X)$ le champ de vecteurs géodésique (i.e. dont le flot $\varphi_{\mathcal{Z}}$ est le flot géodésique $\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v) = (c_v(t), \dot{c}_v(t))$). Quelle est la décomposition de $\mathcal{Z}$ dans la somme $TX = H \oplus V$? Calculer $\widetilde{g}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})$.

Flot géodésique de $\mathbb{H}^d$

On considère dans les question 7. à 14. que (M,g) est l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^d$, et on travaille dans le modèle de l'hyperboloïde $\mathbb{H}^d \subset \mathbb{R}^{d,1}$. On pose $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d - x_{d+1}y_{d+1}$ pour $x = (x_1, \ldots, x_{d+1})$ et $y = (y_1, \ldots, y_{d+1})$, ainsi $\mathbb{H}^d = \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \,\middle|\, \langle x, x\rangle = -1,\ x_{d+1} > 0\right\}$.

7. Décrire $X \subset \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1}$.

8. Pour $(x,v) \in X$, décrire $T_{(x,v)}X \subset \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1}$.

9. Soit $(x,v) \in X$. Décrire $V_{(x,v)}$, et donner une formule explicite pour $\varphi_{(x,v)}$.

10. Soit $(x,v) \in X$. Décrire $H_{(x,v)}$, et donner une formule explicite pour $\psi_{(x,v)}$.
    Indication : on calculera séparément $\psi_{(x,v)}(w)$ pour $w \in v^\perp$ et $\psi_{(x,v)}(v)$.

11. Soient $(x,v) \in X$ et $t \in \mathbb{R}$. Donner une formule explicite pour le flot géodésique $\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)$ et sa différentielle $d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}$.

12. Soit $(x,v) \in X$. On pose :

$$E^s_{(x,v)} = \left\{(y, -y) \in \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \,\middle|\, \langle x, y\rangle = \langle v, y\rangle = 0\right\}$$
$$E^u_{(x,v)} = \left\{(y, y) \in \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \,\middle|\, \langle x, y\rangle = \langle v, y\rangle = 0\right\}$$

    Vérifier que l'on a $T_{x,v)}X = E^s_{(x,v)} \oplus E^u_{(x,v)} \oplus \mathbb{R}.\mathcal{Z}(x,v)$.

13. Pour $(x,v) \in X$ et $t \in \mathbb{R}$, montrer que l'on a $d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}\left(E^s_{(x,v)}\right) = E^s_{\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)}$ et $d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}\left(E^u_{(x,v)}\right) = E^u_{\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)}$.

14. Pour $z \in E^s_{(x,v)}$ et $t \in \mathbb{R}$, montrer que l'on a :

$$\widetilde{g}_{\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)}\left(d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}(z), d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}(z)\right) = e^{-t}\widetilde{g}_{(x,v)}(z,z)$$

Champs de Jacobi et flot géodésique

La variété riemannienne (M,g) est à nouveau quelconque (sauf dans la question 18.).

15. Soit $(x,v) \in X$, et $J : I_v \to TM$ un champ de Jacobi le long de c_v. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

    - $g_x\left(v, \frac{D}{dt}J(0)\right) = 0$
    - $\forall t \in I_v \;\; g_{c_v(t)}\left(\dot{c}_v(t), \frac{D}{dt}J(t)\right) = 0$
    - $\forall t \in I_v \;\; g_{c_v(t)}(\dot{c}_v(t), J(t)) = g_x(v, J(0))$

16. Pour $(x,v) \in X$, on note $E_{(x,v)}$ l'ensemble des champs de Jacobi J le long de c_v vérifiant $g_x\left(v, \frac{D}{dt}J(0)\right) = 0$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme linéaire $J_{(x,v)} : T_{(x,v)}X \to E_{(x,v)}$ vérifiant les propriétés suivantes :

    - Si $w \in T_xM$ et $z = \psi_{(x,v)}(w)$ alors $J_{(x,v)}(z)(0) = w$ et $\frac{D}{dt}J_{(x,v)}(z)(0) = 0$.
    - Si $z \in V_{(x,v)}$ alors $J_{(x,v)}(z)(0) = 0$ et $\frac{D}{dt}J_{(x,v)}(z)(0) = \varphi_{(x,v)}(z)$.

17. Soit $(x,v) \in X$. On considère $z \in T_{(x,v)}X$, et on note $J = J_{(x,v}(z)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $J_t = J_{\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)}\left(d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}(z)\right)$. Montrer que pour tout $s \in I_{\dot{c}_v(t)}$, on a $J_t(s) = J(t+s)$.

18. Lorsque $(M,g) = \mathbb{H}^d$, donner une formule pour $J_{(x,v)}$, puis décrire $J_{(x,v)}\left(E^s_{(x,v)}\right)$ et $J_{(x,v)}\left(E^u_{(x,v)}\right)$.

Groups and geometry

Final exam

Exercise 1

Let $\mathbb{X}$ be a Riemannian symmetric space.

1. For $x \in \mathbb{X}$, let $\varphi_x \in \mathrm{End}(T_x\mathbb{X})$ be the self-adjoint operator such that :

$$\forall u, v \in T_x\mathbb{X} \quad \langle \varphi_x(u), v \rangle_x = \mathrm{Ric}_x(u, v)$$

   Show that for $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{X})$, we have $d_x f \circ \varphi_x = \varphi_{f(x)} \circ d_x f$.

2. Let $o \in \mathbb{X}$. If $\mathbb{X}$ is irreducible, prove that there is $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\varphi_o = \lambda\,\mathrm{Id}$.
   Hint: consider the action of $K = \mathrm{Stab}_G(o)$ on the eigenspaces of φ_o.

3. Prove that any irreducible symmetric space is an Einstein manifold.

Exercise 2

Consider two smooth manifolds M and N.

1. Let $f : M \to N$ be a smooth map. Prove that $\ker df$ is a vector sub-bundle of TM if and only if f has constant rank.

2. Under which additional condition(s) is $\mathrm{Im}\, df$ a vector sub-bundle of TN ?

Exercise 3

Let (M, g) be a Riemannian manifold, and let X be the total space of the unit tangent bundle T^1M, i.e.

$$X = \{(x, v) \,|\, x \in M,\ v \in T_xM,\ g_x(v, v) = 1\}$$

Let $\pi : X \to M$ be the projection (given by $\pi(x, v) = x$).

The tangent bundle of X

1. For $(x, v) \in X$, let $V_{(x,v)} = \ker d_{(x,v)}\pi \subset T_{(x,v)}X$. What is the dimension of $V_{(x,v)}$? Prove that this defines a vector sub-bundle V of TX.

2. Let $(x, v) \in X$ and $z \in T_{(x,v)}X$. Consider a path $\gamma(t) = (c(t), X(t)) \in X$ such that $\gamma(0) = (x, v)$ and $\dot\gamma(0) = z$. Show that the map

$$\varphi_{(x,v)} : \left\{ \begin{array}{ccc} T_{(x,v)}X & \to & T_xM \\ z & \mapsto & \frac{D}{dt}X(0) \end{array} \right.$$

   is well defined (i.e. $\varphi_{(x,v)}(z)$ only depends on z and not on the path γ) and defines a linear isomorphism from $V_{(x,v)} = \ker d_{(x,v)}\pi$ to $v^\perp \subset T_xM$.

   Hint: using local coordinates, we can assume that $M \subset \mathbb{R}^d$ is an open set and that $X \subset \mathbb{R}^{2d}$ is a submanifold whose equation we will give. This leads to equations for the subspaces $T_{(x,v)}X$ and $V_{(x,v)}$ of $\mathbb{R}^{2d}$, and an explicit formula for $\varphi_{(x,v)}$.

3. For $(x,v) \in X$ and $w \in T_xM$, we set

$$\psi_{(x,v)}(w) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (c_w(t), V(t))$$

where c_w is the geodesic with initial velocity $\dot{c}_w(0) = w$, and V is the parallel vector field along c_w such that $V(0) = v$. Prove that the map $\psi_{(x,v)} : T_xM \to T_{(x,v)}X$ is linear and injective.

4. Let $H_{(x,v)} = \psi_{(x,v)}(T_xM) \subset T_{(x,v)}X$. Prove that this defines a vector sub-bundle H of TX, and that $TX = H \oplus V$.

5. Show that there is a unique Riemannian metric $\widetilde{g}$ on X with the following three properties:

   - $\forall (x,v) \in X\ \forall z_1, z_2 \in V_{(x,v)} \quad \widetilde{g}_{(x,v)}(z_1, z_2) = g_x\left(\varphi_{(x,v)}(z_1), \varphi_{(x,v)}(z_2)\right)$
   - $\forall (x,v) \in X\ \forall w_1, w_2 \in T_xM \quad \widetilde{g}_{(x,v)}\left(\psi_{(x,v)}(w_1), \psi_{(x,v)}(w_2)\right) = g_x(w_1, w_2)$
   - $\forall (x,v) \in X\ \forall (z_V, z_H) \in V_{(x,v)} \times H_{(x,v)} \quad \widetilde{g}_{(x,v)}(z_V, z_H) = 0$

6. Let $\mathcal{Z} \in \mathcal{X}(X)$ be the geodesic spray (i.e. the vector field whose flow $\varphi_{\mathcal{Z}}$ is the geodesic flow $\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v) = (c_v(t), \dot{c}_v(t))$). What is the decomposition of $\mathcal{Z}$ along $TX = H \oplus V$? Compute $\widetilde{g}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})$.

The geodesic flow of $\mathbb{H}^d$

In question 7. to 14. we consider that (M,g) is the real hyperbolic space $\mathbb{H}^d$, and we work with the hyperboloid model $\mathbb{H}^d \subset \mathbb{R}^{d,1}$. Set $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d - x_{d+1}y_{d+1}$ for $x = (x_1, \ldots, x_{d+1})$ and $y = (y_1, \ldots, y_{d+1})$, thus $\mathbb{H}^d = \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \,\middle|\, \langle x, x \rangle = -1,\ x_{d+1} > 0\right\}$.

7. Describe $X \subset \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1}$.

8. For $(x,v) \in X$, describe $T_{(x,v)}X \subset \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1}$.

9. Let $(x,v) \in X$. Describe $V_{(x,v)}$, and give an explicit formula for $\varphi_{(x,v)}$.

10. Let $(x,v) \in X$. Describe $H_{(x,v)}$, and give an explicit formula for $\psi_{(x,v)}$.
    Hint: first compute $\psi_{(x,v)}(w)$ for $w \in v^\perp$, then compute $\psi_{(x,v)}(v)$.

11. Let $(x,v) \in X$ and $t \in \mathbb{R}$. Give an explicit formula for $\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)$ and $d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}$.

12. Let $(x,v) \in X$. We set:

$$E^s_{(x,v)} = \left\{(y, -y) \in \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \,\middle|\, \langle x, y \rangle = \langle v, y \rangle = 0\right\}$$
$$E^u_{(x,v)} = \left\{(y, y) \in \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \,\middle|\, \langle x, y \rangle = \langle v, y \rangle = 0\right\}$$

    Check that $T_{x,v)}X = E^s_{(x,v)} \oplus E^u_{(x,v)} \oplus \mathbb{R}.\mathcal{Z}(x,v)$.

13. For $(x,v) \in X$ and $t \in \mathbb{R}$, show that $d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}\left(E^s_{(x,v)}\right) = E^s_{\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)}$ and $d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}\left(E^u_{(x,v)}\right) = E^u_{\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)}$.

14. For $z \in E^s_{(x,v)}$ and $t \in \mathbb{R}$, prove that:

$$\widetilde{g}_{\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)}\left(d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}(z), d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}(z)\right) = e^{-t}\widetilde{g}_{(x,v)}(z,z)$$

Jacobi fields and the geodesic flow

We are back to an arbitrary Riemannian manifold (M,g) (except for question 18.).

15. Let $(x,v) \in X$, and $J : I_v \to TM$ a Jacobi field along c_v. Prove that the following propositions are equivalent:

    - $g_x\left(v, \frac{D}{dt}J(0)\right) = 0$
    - $\forall t \in I_v \;\; g_{c_v(t)}\left(\dot{c}_v(t), \frac{D}{dt}J(t)\right) = 0$
    - $\forall t \in I_v \;\; g_{c_v(t)}(\dot{c}_v(t), J(t)) = g_x(v, J(0))$

16. For $(x,v) \in X$, let $E_{(x,v)}$ be the set of Jacobi fields J along c_v such that $g_x\left(v, \frac{D}{dt}J(0)\right) = 0$. Show that there is a unique linear isomorphism $J_{(x,v)} : T_{(x,v)}X \to E_{(x,v)}$ satisfying the following two properties:

    - If $w \in T_xM$ and $z = \psi_{(x,v)}(w)$ then $J_{(x,v)}(z)(0) = w$ and $\frac{D}{dt}J_{(x,v)}(z)(0) = 0$.
    - If $z \in V_{(x,v)}$ then $J_{(x,v)}(z)(0) = 0$ and $\frac{D}{dt}J_{(x,v)}(z)(0) = \varphi_{(x,v)}(z)$.

17. Let $(x,v) \in X$. Consider $z \in T_{(x,v)}X$, and write $J = J_{(x,v}(z)$. For $t \in \mathbb{R}$, we set $J_t = J_{\varphi^t_{\mathcal{Z}}(x,v)}\left(d_{(x,v)}\varphi^t_{\mathcal{Z}}(z)\right)$. Show that for all $s \in I_{\dot{c}_v(t)}$, we have $J_t(s) = J(t+s)$.

18. For $(M,g) = \mathbb{H}^d$, give an explicit formula for $J_{(x,v)}$, then describe $J_{(x,v)}\left(E^s_{(x,v)}\right)$ and $J_{(x,v)}\left(E^u_{(x,v)}\right)$.