M2AAG
Université Paris-Saclay

Examen

Groupes et géométrie
2020-2021

Les 6 exercices sont indépendants.

Exercice 1. [Champs de Jacobi en dimension 2]
Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension 2, et $c : I \to M$ une géodésique. On note $\kappa(t)$ la courbure sectionnelle de $T_{c(t)}M$. Soit $v : I \to TM$ un champ de vecteurs le long de c tel que $(\dot{c}(t), v(t))$ est une base orthonormée de $T_{c(t)}M$ pour tout $t \in I$.

1. Montrer que v est parallèle le long de c.
2. Montrer que tout champ de Jacobi orthogonal le long de c s'écrit $J(t) = f(t)v(t)$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est solution de $\ddot{f}(t) + K(t)f(t) = 0$.

Exercice 2. [Un groupe de Lie et son algèbre de Lie]
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire anti-symétrique. On considère l'opération $*$ sur $V \times \mathbb{R}$ définie par

$$\forall v, v' \in V \ \forall t, t' \in \mathbb{R} \quad (v, t) * (v', t') = \left(v + v', t + t' + \frac{1}{2}\omega(v, v') \right)$$

1. Montrer que $(V \times \mathbb{R}, *)$ est un groupe de Lie, que l'on notera G.
2. Décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, et montrer qu'elle est nilpotente.
3. Montrer que $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme.

Exercice 3. [Groupes de Lie à centre trivial]
Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension finie telle que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Montrer qu'il existe un groupe de Lie connexe G tel que $Z(G) = \{e\}$, dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{g}$. Montrer qu'un tel groupe de Lie est unique à isomorphisme près.

Exercice 4. [Points critiques de la courbure sectionnelle]
Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit $x \in M$. On note :

$$X = \left\{ (u, v) \in T_xM \times T_xM \;\middle|\; \begin{array}{l} g_x(u, u) = 1 \\ g_x(v, v) = 1 \\ g_x(u, v) = 0 \end{array} \right\}$$

Pour $(u, v) \in X$, on note $P_{u,v} \in \mathcal{G}_2(T_xM)$ le plan $P_{u,v} = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v$.

1. Montrer que X est une sous-variété de $T_xM \times T_xM$.

On considère l'application :

$$K : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \kappa(P_{u,v}) \end{array} \right.$$

où κ est la courbure sectionnelle.

2. Montrer que K est lisse, et que pour tout $(u, v) \in X$ et $(w, z) \in T_{(u,v)}X$, on a :

$$d_{(u,v)}K(w, z) = 2R_x(u, v, v, w) + 2R_x(v, u, u, z)$$

3. Décrire l'espace tangent $T_{(u,v)}X$ pour tout $(u, v) \in X$, et en déduire l'équivalence suivante :

$$d_{(u,v)}K = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} R_x(u, v)v \in P_{u,v} \\ R_x(v, u)u \in P_{u,v} \end{array} \right.$$

4. Soit $(u, v) \in X$. Montrer que s'il existe une sous-variété totalement géodésique $N \subset M$ de dimension 2 telle que $x \in N$ et $T_x N = P_{u,v}$, alors $d_{(u,v)} K = 0$.
5. On suppose maintenant que (M, g) est un espace symétrique riemannien. Montrer que si $P \subset T_x M$ est un 2-plan qui maximise ou minimise la courbure sectionnelle, alors il existe une sous-variété totalement géodésique $N \subset M$ de dimension 2 telle que $x \in N$ et $T_x N = P$.

Exercice 5. [Courbure de Ricci de l'espace des ellipsoïdes]
On considère $\mathcal{E}_n = \left\{ x \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t x = x\,,\ \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\, {}^t v x v > 0 \right\}$, muni de la métrique riemannienne définie par :

$$\forall x \in \mathcal{E}_n\ \forall X, Y \in T_x \mathcal{E}_n \quad \langle X | Y \rangle_x = \mathrm{Tr}\left(X x^{-1} Y x^{-1} \right)$$

On note $\mathfrak{p} = T_{I_n} \mathcal{E}_n$, et on rappelle la formule suivante pour la courbure au point I_n :

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{p} \quad R_{I_n}(X, Y) Z = -[[X, Y], Z]$$

1. Montrer que si $(Z_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq \dim \mathcal{E}_n}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{p}$, alors la courbure de Ricci vérifie :
$$\forall X, Y \in \mathfrak{p} \quad \mathrm{Ric}_{I_n}(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^{\dim \mathcal{E}_n} \mathrm{Tr}([X, Z_\alpha][Y, Z_\alpha])$$
2. Calculer $\mathrm{Ric}_{I_n}(X, Y)$ lorsque $X \in \mathfrak{p}$ est une matrice diagonale et $Y \in \mathfrak{p}$ quelconque.
3. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (que l'on explicitera) tel que :
$$\forall x \in \mathcal{E}_n\ \forall X, Y \in T_x \mathcal{E}_n \quad \mathrm{Ric}_x(X, Y) = \lambda \langle X | Y \rangle_x$$
4. Calculer la courbure scalaire de $\mathcal{E}_n$.

Exercice 6. [Sections parallèles du fibré des endomorphismes]
Soit $\xi = (E, p, M)$ un fibré vectoriel de rang n. On note $\mathrm{Id}_\xi \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$ la section définie par $\mathrm{Id}_\xi(x) = \mathrm{Id}_{\xi_x}$ pour tout $x \in M$.

1. Soit ∇ une connexion sur ξ. On note encore ∇ la connexion induite sur le fibré $\mathrm{End}(\xi) = \xi^* \otimes \xi$. Montrer que $\nabla \mathrm{Id}_\xi = 0$.
Indication : rappeler la formule pour la connexion induite sur $\mathrm{End}(\xi)$.

On considère maintenant $u \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$ qui vérifie $\nabla u = 0$ pour toute connexion ∇ sur ξ. On veut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_\xi$.

2. Montrer qu'il existe une connexion sur ξ.
Indication : on pourra considérer un recouvrement ouvert localement fini $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ tel que les $\xi|_{U_i}$ sont trivialisables, et une partition de l'unité subordonnée (φ_i). Étant donnée une connexion ∇^i sur chaque $\xi|_{U_i}$, on vérifiera que $\nabla_X \sigma(x) = \sum_{x \in U_i} \varphi_i(x) \nabla^i_{X(x)} \sigma|_{U_i}(x)$ définit une connexion sur ξ.
3. Pour $A \in \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(\xi))$, et $X \in \Gamma(TM)$, on note $A_X \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$ la section correspondante.
Montrer que $A_X \circ u = u \circ A_X$.
Indication : considérer une connexion ∇ sur ξ et la connexion $\nabla + A$, ainsi que les connexions induites sur $\mathrm{End}(\xi)$.
4. Montrer que pour tous $x \in M$ et $v \in \mathrm{End}(\xi_x)$ il existe $A \in \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(\xi))$ et $X \in \Gamma(TM)$ tels que $A_X(x) = v$.
5. En déduire que pour tous $x \in M$ et $v \in \mathrm{End}(\xi_x)$, on a $v \circ u(x) = u(x) \circ v$.
6. En déduire qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $u = f \mathrm{Id}_\xi$.
7. Montrer que f est constante.