Groupes et géométrie

Examen partiel

Exercice 1

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.

Théorème : *Soit G un groupe de Lie compact et connexe de dimension d. Si l'algèbre de Lie de G est résoluble, alors G est isomorphe au tore $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.*

On considère un groupe de Lie G compact et connexe de dimension d, et on note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1. Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathfrak{g}$ qui est $\mathrm{Ad}(G)$-invariant.

Tout au long de l'exercice, on fixe un tel produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2. Donner une formule reliant ad et $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
3. Soit $(X,Y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Montrer que $\langle[X,[X,Y]],Y\rangle\leq 0$, avec égalité si et seulement si $[X,Y]=0$.

On note $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\forall Y\in\mathfrak{g}\,[X,Y]=0\}$ le centre de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}$ l'orthogonal de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4. Montrer que $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.
5. Montrer que la forme de Killing de $\mathfrak{h}$ est définie négative.
   Indication : on utilisera une base orthonormée de $\mathfrak{h}$ pour calculer sa forme de Killing.

On suppose maintenant de plus que $\mathfrak{g}$ est résoluble.

6. Montrer que $\mathfrak{h}=0$, i.e. que $\mathfrak{g}$ est abélienne.
7. Montrer que $\exp_G:\mathfrak{g}\to G$ est un revêtement.
8. Conclure.
9. En utilisant uniquement des calculs déjà effectués, expliquer pourquoi la forme de Killing d'une algèbre de Lie réelle ne peut pas être définie positive.

Exercice 2

On admettra le résultat suivant, vu en cours pour les fibrés vectoriels.

Théorème : *Si $I\subset\mathbb{R}$ est un intervalle, alors tout fibré de base I est trivialisable.*

On considère un fibré $\xi=(E,p,M,F)$.

1. On suppose que M est connexe. Pour $x,y\in E$, montrer qu'il existe un chemin continu $c:[0,1]\to E$ tel que $c(0)\in\xi_{p(x)}$ et $c(1)\in\xi_{p(y)}$.
2. Montrer que si M et F sont connexes, alors E aussi.
3. Soit G un groupe de Lie, et soit $H\subset G$ un sous-groupe fermé et connexe. Montrer que G est connexe si et seulement si G/H est connexe.
4. Montrer par récurrence que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe pour tout $n\geq 2$.
5. Montrer que $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sont connexes pour tout $n\geq 2$.

Groups and geometry

Mid-term exam

Exercise 1

The goal of this exercise is to prove the following result.

Theorem: *Let G be a connected and compact Lie group of dimension d. If the Lie algebra of G is solvable, then G is isomorphic to the torus $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.*

We consider a compact and connected Lie group G of dimension d, and we denote by $\mathfrak{g}$ its Lie algebra.

1. Prove that there is a $\mathrm{Ad}(G)$-invariant inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on $\mathfrak{g}$.

We fix such an inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ for the whole exercise.

2. Write a formula relating ad and $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
3. Let $(X,Y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Prove that $\langle[X,[X,Y]],Y\rangle\leq 0$, and that equality holds if and only if $[X,Y]=0$.

Let $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\forall Y\in\mathfrak{g}\,[X,Y]=0\}$ be the centre of $\mathfrak{g}$, and denote by $\mathfrak{h}$ the orthogonal of $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ for $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4. Prove that $\mathfrak{h}$ is an ideal of $\mathfrak{g}$.
5. Prove that the Killing form of $\mathfrak{h}$ is negative definite.
   Hint: use an orthonormal basis of $\mathfrak{h}$ to compute the Killing form.

We now also assume that $\mathfrak{g}$ is solvable.

6. Prove that $\mathfrak{h}=0$, i.e. that $\mathfrak{g}$ is abelian.
7. Prove that $\exp_G:\mathfrak{g}\to G$ is a covering map.
8. Conclude.
9. Using some of the calculations that have been made, explain why the Killing form of a real Lie algebra cannot be positive definite.

Exercise 2

We will admit the following result, that was stated in the lectures for vector bundles.

Theorem *If $I\subset\mathbb{R}$ is an interval, then any fibre bundle with base I is trivialisable.*

Let $\xi=(E,p,M,F)$ be a fibre bundle.

1. Assume that M is connected. For $x,y\in E$, prove that there is a continuous path $c:[0,1]\to E$ such that $c(0)\in\xi_{p(x)}$ and $c(1)\in\xi_{p(y)}$.
2. Prove that if M and F are connected, then so is E.
3. Let G be a Lie group, and let $H\subset G$ be a closed connected subgroup. Prove that G is connected if and only if G/H is connected.
4. Prove by induction that $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ is connected for all $n\geq 2$.
5. Prove that $\mathrm{U}(n)$ and $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ are connected for all $n\geq 2$.