Groupes et géométrie

Examen partiel

Corrigé

Exercice 1

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.

Théorème : *Soit G un groupe de Lie compact et connexe de dimension d. Si l'algèbre de Lie de G est résoluble, alors G est isomorphe au tore $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.*

On considère un groupe de Lie G compact et connexe de dimension d, et on note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1. Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathfrak{g}$ qui est $\mathrm{Ad}(G)$-invariant.

   Correction : On commence par considérer $\overline{\omega} \in \Lambda^d\mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$, et on définit $\omega \in \Omega^d(G)$ par $\omega_g(v_1,\ldots,v_d) = \overline{\omega}\Big(d_gR_{g^{-1}}(v_1),\ldots,d_gR_{g^{-1}}(v_d)\Big)$. C'est une forme volume invariante à droite. Elle définit une mesure μ sur G qui est invariante à droite : $\int_G f(xg)d\mu(x) = \int_G f\,d\mu$ pour tout $g \in G$ et toute fonction $f \in L^1(G,\mu)$. Comme G est compact, μ est finie.
   On considère un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathfrak{g}$, et on pose:

   $$\langle X,Y\rangle = \int_G (\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y)\,d\mu(x)$$

   C'est bien défini car les fonctions continues sont intégrables (G est compact et $\mu(G) < +\infty$). C'est un produit scalaire car une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle. Enfin pour $g \in G$, on a :

   $$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle &= \int_G (\mathrm{Ad}(x)\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(x)\mathrm{Ad}(g)Y)\,d\mu(x)\\ &= \int_G (\mathrm{Ad}(xg)X, \mathrm{Ad}(xg)Y)\,d\mu(x)\\ &= \int_G (\mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y)\,d\mu(x)\\ &= \langle X,Y\rangle\end{aligned}$$

   □

Tout au long de l'exercice, on fixe un tel produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2. Donner une formule reliant ad et $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

   Correction : On considère $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ et une courbe $z(t)$ dans G telle que $z(0) = e$ et $\dot{z}(0) = Z$ (par exemple $z(t) = \exp_G(tZ)$). On a :

   $$\langle \mathrm{Ad}(z(t))X, \mathrm{Ad}(z(t))Y\rangle = \langle X,Y\rangle$$

   On dérive en $t = 0$, ce qui donne :

   $$\langle \mathrm{ad}(Z)X, Y\rangle + \langle X, \mathrm{ad}(Z)Y\rangle = 0$$

   □

3. Soit $(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Montrer que $\langle [X,[X,Y]], Y\rangle \leq 0$, avec égalité si et seulement si $[X,Y] = 0$.

   Correction :

$$\begin{aligned}\langle [X,[X,Y]], Y\rangle &= \langle \mathrm{ad}(X)[X,Y], Y\rangle \\ &= -\langle [X,Y], \mathrm{ad}(X)Y\rangle \\ &= -\|[X,Y]\|^2\end{aligned}$$

   Le résultat est bien négatif ou nul, et nul si et seulement si $[X,Y] = 0$. □

On note $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \forall Y \in \mathfrak{g}\, [X,Y] = 0\}$ le centre de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}$ l'orthogonal de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Montrer que $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

   Correction : Par définition $\mathfrak{h}$ est un orthogonal, donc un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. On considère $X \in \mathfrak{h}$ et $Y \in \mathfrak{g}$, et on veut montrer que $[X,Y] \in \mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$. Soit $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

$$\begin{aligned}\langle [X,Y], Z\rangle &= \langle \mathrm{ad}(X)Y, Z\rangle \\ &= -\langle Y, \mathrm{ad}(X)Z\rangle\end{aligned}$$

   Comme $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, on trouve $\mathrm{ad}(X)Z = 0$, d'où $[X,Y] \in \mathfrak{h}$.
   Remarque : on a en fait montré le fait plus général, mais inutile à posteriori, que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. □

5. Montrer que la forme de Killing de $\mathfrak{h}$ est définie négative.
   Indication : on utilisera une base orthonormée de $\mathfrak{h}$ *pour calculer sa forme de Killing.*

   Correction : Soit $(X_1, \ldots, X_k)$ une base orthonormée de $\mathfrak{h}$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour toute application linéaire $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{h})$, on a $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^k \langle f(X_i), X_i\rangle$, ce qui permet de calculer la forme de Killing b (qui est la restriction de celle de $\mathfrak{g}$ car $\mathfrak{h}$ est un idéal).

$$b(X,X) = \sum_{i=1}^k \langle [X,[X,X_i]], X_i\rangle$$

   D'après la question 3. on trouve $b(X,X) \neq 0$, et $b(X,X) = 0$ si et seulement si $[X, X_i] = 0$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Si c'est le cas, alors X commute avec tout $\mathfrak{h}$, ainsi qu'avec le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, donc avec tout $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$, i.e. $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Ainsi $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h} = \{0\}$, i.e. $X = 0$ et b est définie négative.

   □

On suppose maintenant de plus que $\mathfrak{g}$ est résoluble.

6. Montrer que $\mathfrak{h} = 0$, i.e. que $\mathfrak{g}$ est abélienne.

   Correction : Comme la forme de Killing de $\mathfrak{h}$ est non dégénérée, le critère de Cartan donne $\mathrm{Rad}(\mathfrak{h}) = 0$ (où $\mathrm{Rad}(\mathfrak{h})$ est le radical résoluble de $\mathfrak{h}$). Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, alors $\mathfrak{h}$ aussi, i.e. $\mathfrak{h} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{h})$. On trouve donc $\mathfrak{h} = 0$, i.e. $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est abélienne. □

7. Montrer que $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ est un revêtement.

Correction : Comme $\mathfrak{g}$ est abélienne, on trouve $\exp_G(X+Y) = \exp_G(X)\exp_G(Y)$ pour tous $X,Y \in \mathfrak{g}$, i.e. $\exp_G$ est un morphisme de groupes de Lie de $(\mathfrak{g},+)$ vers G. C'est un difféomorphisme local car sa différentielle en 0 est $d_0 \exp_G = \mathrm{Id}$. Son image est donc un ouvert de G. C'est aussi un sous-groupe, donc un fermé de G (tout sous-groupe ouvert est fermé). Comme G est connexe, on trouve que $\exp_G$ est surjective.
Un morphisme de groupes de Lie surjectif qui est un difféomorphisme local est un revêtement. C'est une conséquence de l'unicité de la structure de groupes de Lie sur le quotient $\mathfrak{g}/\Gamma$ où $\Gamma = \ker \exp_G$. □

8. Conclure.

Correction : On note $\Gamma = \ker \exp_G$, de façon à ce que G soit isomorphe à $\mathfrak{g}/\Gamma$. Comme Γ est un sous-groupe discret de $(\mathfrak{g},+)$, il existe une base $(e_1,\dots,e_d)$ de $\mathfrak{g}$ et $k \in \{0,\dots,d\}$ tels que Γ est le sous-groupe engendré par $e_1,\dots,e_k$. Comme le quotient G est compact, on trouve $k = d$, et G est isomorphe à $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. □

9. En utilisant uniquement des calculs déjà effectués, expliquer pourquoi la forme de Killing d'une algèbre de Lie réelle ne peut pas être définie positive.

Correction : On a alors l'existence d'un produit scalaire ad-invariant, et le calcul dans la question 3. reste valide en remplaçant $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par la forme de Killing. Comme $\mathfrak{g}$ est alors semi-simple, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ et le calcul de 5. montre que la forme de Killing est définie négative, donc $\mathfrak{g} = \{0\}$. □

Exercice 2

On admettra le résultat suivant, vu en cours pour les fibrés vectoriels.

Théorème : *Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, alors tout fibré de base I est trivialisable.*

On considère un fibré $\xi = (E,p,M,F)$.

1. On suppose que M est connexe. Pour $x,y \in E$, montrer qu'il existe un chemin continu $c : [0,1] \to E$ tel que $c(0) \in \xi_{p(x)}$ et $c(1) \in \xi_{p(y)}$.

Correction : Comme M est connexe, on peut considérer une courbe lisse $\gamma : \mathbb{R} \to M$ telle que $\gamma(0) = p(x)$ et $\gamma(1) = p(y)$. On considère alors une trivialisation $(\varphi_t)_{t\in I}$ du fibré $\gamma^*\xi$, et on choisit $y \in F$. Le chemin $c(t) = \varphi_{\gamma(t)}(y)$ est un chemin lisse donc continu dans E, et $c(0) \in \xi_{p(x)}$, $c(1) \in \xi_{p(y)}$. □

2. Montrer que si M et F sont connexes, alors E aussi.

Correction : Soit $x,y \in E$. D'après la question précédente il existe $x' \in \xi_{p(x)}$ et $y' \in \xi_{p(y)}$ qui sont dans la même composante connexe de E. Comme F est connexe, la fibre $\xi_{p(x)}$ est incluse dans la composante connexe de x, ainsi x' est dans celle de x et y' dans celle de y, i.e. x et y' sont dans la même composante connexe de E, et E est connexe. □

3. Soit G un groupe de Lie, et soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé et connexe. Montrer que G est connexe si et seulement si G/H est connexe.

Correction : Si G est connexe, alors G/H est l'image de G par la projection $\pi : G \to G/H$ qui est continue, donc G/H est connexe.
Si G/H est connexe, alors G est l'espace total du fibré principal $(G, \pi, G/H, H)$ et le résultat de la question précédente montre que G est connexe. $\square$

4. Montrer par récurrence que $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est connexe pour tout $n \geq 2$.

   Correction : On utilise le fait que l'espace homogène $\mathrm{SO}(n+1, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{S}^n$ est connexe, ce qui donne l'hérédité, et on initialise avec $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$ qui est connexe. $\square$

5. Montrer que $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sont connexes pour tout $n \geq 2$.

   Correction : Pour $U(n)$, le même argument par récurrence fonctionne : $\mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n) = \mathbb{S}^{2n+1}$ est connexe, et $U(1) = \mathbb{S}^1$ est connexe.
   Pour $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, il suffit de montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/U(n)$ est connexe. On considère pour celà l'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $g.X = gx^tg$. Le stabilisateur de 1_n est $U(n)$ (c'est la définition de $U(n)$), et l'orbite est l'espace des matrices hermitiennes définies positives, qui est convexe dans l'espace vectoriel des matrics hermitiennes, donc connexe. $\square$