**Étude de la fonction** $\quad f(x,y) = \dfrac{x^p y^q}{y^2 + x^4}$

On munit l'espace $\mathbf{R}^2$ de la norme définie par $\|(x,y)\| = \sup(|x|,|y|)$. Soient $p$ et $q$ deux entiers $> 0$. On définit la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par les formules

$$f(x,y) = \frac{x^p y^q}{y^2 + x^4} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Le but de ce qui suit est de prouver le théorème suivant :

**Théorème 1.**
*1) La fonction $f$ est continue sur $\mathbf{R}^2$ si et seulement si on a $p + 2q \geq 5$,*
*2) La fonction $f$ est différentiable sur $\mathbf{R}^2$ si et seulement si on a $p + 2q \geq 6$,*
*3) La fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}^2$ si et seulement si on a $p + 2q \geq 7$.*

**Démonstration.** Commençons par quelques remarques :

**Remarques 2.**
a) Il est clair que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ de sorte que le seul problème est au point $(0,0)$.
b) Les fonctions $f(x,0)$ et $f(0,y)$ sont nulles, de sorte que $f$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et que ces dérivées sont nulles.
c) Si on suppose $\|(x,y)\| \leq 1$, on a l'inégalité $y^2 + x^4 \geq \|(x,y)\|^4$, d'où l'on tire, pour $(x,y) \neq (0,0)$, la relation $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|^{p+q-4}$ qui montre que $f$ est continue pour $p + q \geq 5$ et différentiable pour $p + q \geq 6$.
d) Pour $x \neq 0$ on a l'égalité $f(x,x^2) = \dfrac{1}{2} x^{p+2q-4}$.
Le lemme suivant donne des majorations de $f$ :

**Lemme 3.**
*a) Pour $|y| \geq x^2$, $y \neq 0$, on a $|f(x,y)| \leq |y|^{(p+2q-4)/2}$,*
*b) pour $|y| \leq x^2$, $x \neq 0$ on a $|f(x,y)| \leq |x|^{p+2q-4}$.*
*Si $p + 2q - 4$ est $> 0$ ces majorations valent sans les restrictions $y \neq 0$ et $x \neq 0$ et on a, pour $\|(x,y)\| \leq 1$, la majoration :*

$$|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|^{(p+2q-4)/2}.$$

**Démonstration.** (du lemme 3).
a) Supposons $|y| \geq x^2$. On minore $y^2 + x^4$ par $y^2$ ce qui donne, pour $y \neq 0$ la majoration $|f(x,y)| \leq |x|^p |y|^{q-2} \leq |y|^{p/2+q-2}$.
b) Supposons $|y| \leq x^2$. On minore $y^2 + x^4$ par $x^4$ ce qui donne, pour $x \neq 0$ la majoration $|f(x,y)| \leq |x|^{p-4} |y|^q \leq |x|^{p+2q-4}$.

On peut alors montrer les assertions 1) et 2) du théorème.

Si on a $p + 2q \leq 4$ (resp. $p + 2q \leq 5$), la remarque 2.d) montre que $f(x, x^2)$ ne tend pas vers 0 (resp. n'est pas un $o(\|(x, x^2)\|)$) quand $x$ tend vers 0 de sorte que $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$ (resp. n'est pas différentiable en $(0, 0)$, cf. remarque 2.b)).

Si on a $p + 2q \geq 5$ (resp. $p + 2q \geq 6$), le lemme 3 montre que $|f(x, y)|$ tend vers 0 (resp. est un $o(\|(x, y)\|)$) quand $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$ de sorte que $f$ est continue en $(0, 0)$ (resp. est différentiable en $(0, 0)$, cf. remarque 2.b)).

Pour la dernière assertion du théorème on commence par calculer les dérivées partielles de $f$, on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^{p-1}y^q(py^2 + (p-4)x^4)}{(y^2 + x^4)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^p y^{q-1}((q-2)y^2 + qx^4)}{(y^2 + x^4)^2}.$$

**Remarque 4.** On note les formules

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x^2) = \frac{p-2}{2}\, x^{p+2q-5} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, x^2) = \frac{q-1}{2}\, x^{p+2q-6}.$$

Le lemme suivant est l'analogue du lemme 3 pour les dérivées partielles et sa démonstration est la même, *mutatis mutandis* :

**Lemme 5.**
*a) Pour* $|y| \geq x^2$, $y \neq 0$, *on a*

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)| \leq (2p + 4)\, |y|^{(p+2q-5)/2} \qquad \text{et} \qquad |\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq (2q + 2)\, |y|^{(p+2q-6)/2},$$

*b) pour* $|y| \leq x^2$, $x \neq 0$ *on a*

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)| \leq (2p + 4)\, |x|^{(p+2q-5)} \qquad \text{et} \qquad |\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq (2q + 2)\, |x|^{(p+2q-6)}.$$

*Si* $p + 2q - 6$ *est* $> 0$ *ces majorations valent sans les restrictions* $y \neq 0$, $x \neq 0$ *et on a, pour* $\|(x, y)\| \leq 1$, *les majorations :*

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)| \leq (2p + 4)\, \|(x, y)\|^{(p+2q-5)/2} \qquad \text{et} \qquad |\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq (2q + 2)\, \|(x, y)\|^{(p+2q-6)/2}.$$

Le point 3) du théorème résulte maintenant de la remarque 4) et du lemme 5 de la même manière que les points 1) et 2) résultaient de la remarque 2.d) et du lemme 3.