1 Meilleure approximation affine

On considère une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ définie au voisinage d'un point a que l'on supposera être 0 pour simplifier les notations. On considère une fonction affine $P(x) = ax+b$. Voici deux définitions pour que les choses soient claires :

1.1 Définition. *On dit que la fonction P est une meilleure approximation affine de f en 0 si pour toute fonction affine Q distincte de P il existe un intervalle J ouvert contenant 0 tel que l'on ait :*

$$\forall x \in J, \qquad |f(x) - P(x)| \leq |f(x) - Q(x)|.$$

1.2 Définition. *On dit que P est un développement limité de f à l'ordre 1 s'il existe une fonction $\epsilon(x)$, définie sur un intervalle J ouvert contenant 0, tendant vers 0 quand x tend vers 0, et telle que l'on ait :*

$$\forall x \in J \qquad f(x) = P(x) + x\epsilon(x).$$

1.3 Théorème. *On suppose f continue en 0. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) f est dérivable en 0,
2) f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0,
3) f admet une meilleure approximation affine en 0.
De plus, la fonction affine qui intervient en 2) et 3) est alors $f(0) + xf'(0)$.

1.4 *Remarque.* Avant de prouver le théorème, notons qu'on peut montrer directement que si f est dérivable en 0, on a une meilleure approximation affine qui est $f(0) + xf'(0)$.

En effet, on écrit $f(x) = f(0)+xf'(0)+x\epsilon(x) = P(x)+x\epsilon(x)$ et on prend $Q(x) = ax+b$. Il s'agit de montrer qu'on a, au voisinage de 0, $|f(x)-P(x)| \leq |f(x) - Q(x)|$, soit $|x\epsilon(x)| \leq |f(0) - b + (f'(0) - a)x + x\epsilon(x)|$. Il y a trois cas.

1) Si b est distinct de $f(0)$, le premier membre tend vers 0 tandis que le second tend vers $|f(0) - b| > 0$ et le résultat est clair.

2) Si on a $b = f(0)$, mais $a \neq f'(0)$, comme $\epsilon(x)$ tend vers 0 et que $|f'(0) - a + \epsilon(x)|$ tend vers $|f'(0) - a| > 0$, on a $|\epsilon(x)| \leq |f'(0) - a + \epsilon(x)|$ pour x assez petit et le résultat s'ensuit en multipliant par $|x|$.

3) Enfin, si on a $b = f(0)$ et $a = f'(0)$ le résultat est évident.

On revient à la preuve du théorème.

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2). On pose $b = f(0)$ et $a = f'(0)$. Par définition, $\epsilon(x) := \dfrac{f(x)-b}{x} - a$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On prolonge donc cette fonction par $\epsilon(0) = 0$ et on a 2).

2) $\Longrightarrow$ 3). Posons $Q(x) = cx + d$. Si b est différent de d, la fonction $|f - P|$ tend vers 0, tandis que $|f - Q|$ tend vers $|b - d| > 0$. Pour x voisin de 0 on a donc $|f - P| \leq |f - Q|$ d'où la conclusion. Sinon, comme on a $P \neq Q$, c'est que a et c sont différents. On a alors $|f - P| = |x|\,|\epsilon(x)|$ et $|f - Q| = |a - c|\,|x|$. Comme $\epsilon(x)$ tend vers 0, on a, pour x voisin de 0, $|\epsilon(x)| \leq |a - c|$, d'où le résultat.

3) $\Longrightarrow$ 1). Posons $P(x) = ax + b$. On note d'abord qu'on a $b = f(0)$. En effet, si on applique la définition avec $Q = f(0)$, on a $|f(x) - ax - b| \leq |f(x) - f(0)|$ pour $x \in J$. Si l'on fait tendre x vers 0 le premier membre tend vers $|f(0) - b|$ et le second vers 0, d'où le résultat. On montre ensuite que f est dérivable en 0 et qu'on a $f'(0) = a$. C'est le seul point délicat. On a un lemme :

1.5 Lemme. *Soient A, ϵ des réels avec $\epsilon > 0$. On suppose qu'on a $|A] \leq |A - \epsilon|$ et $|A| \leq |A + \epsilon|$. Alors on a $|A| \leq \epsilon/2$.*

Démonstration. Supposons par exemple $A > 0$. On a alors $A \leq \epsilon$, sinon $A - \epsilon$ est positif et on a $A \leq |A - \epsilon| = A - \epsilon$ et c'est absurde. On en déduit $A \leq |A - \epsilon| = \epsilon - A$ d'où le résultat.

Revenons au théorème. Posons, pour $x \neq 0$, $u(x) = \dfrac{f(x)-b}{x} - a$. Il s'agit de montrer que $u(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Soit $\epsilon > 0$. On applique la définition 1.1 aux fonctions $Q^+(x) = (a+\epsilon)x + b$ et $Q^-(x) = (a-\epsilon)x + b$. Pour x assez petit (disons $|x| \leq \eta$) on a $|f(x) - ax - b| \leq |f(x) - Q^+(x)|$ et $|f(x) - ax - b| \leq |f(x) - Q^-(x)|$, ce qui donne, en divisant par x, $|u(x)| \leq |u(x) - \epsilon|$ et $|u(x)| \leq |u(x) + \epsilon|$. Le lemme permet de conclure qu'on a $|u(x)| \leq \epsilon/2$, ce qui signifie bien que $u(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.