Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Daniel PERRIN

Introduction

L'objectif de ce texte est de donner un traitement "élémentaire" du sujet, i.e. qui soit à peu près du niveau d'un élève[1] de terminale S. Cela conduit à privilégier un traitement qui n'utilise que des fonctions à valeurs réelles et à bannir la notion d'espace vectoriel.

1 Position du problème

1.1 L'équation avec second membre

1.1 Définition. *Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) de* $\mathbf{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbf{R}$. *On considère l'équation différentielle* $(*)$: $ay'' + by' + cy = g$ *(avec* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *et* $a \neq 0$*). Résoudre*[2] *cette équation c'est chercher les fonctions* $f : I \to \mathbf{R}$*, deux fois dérivables, telles que l'on ait, pour tout* $x \in I$, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x)$.

1.2 L'équation homogène, ou sans second membre

1.2 Définition. *Avec les notations précédentes, l'équation homogène associée à* $(*)$ *est l'équation* $(**)$: $ay'' + by' + cy = 0$.

1.3 *Remarque.* Si f est solution de $(**)$, f est C^∞. En effet, comme a est non nul, f'' est combinaison linéaire de f et f', donc dérivable, donc f est trois fois dérivable et on a $af''' + bf'' + cf' = 0$ en dérivant l'équation. Une récurrence immédiate achève le travail.

[1] Aujourd'hui, il n'y a plus du tout d'équations du second ordre au programme de TS, mais qui sait si un jour elles n'y reviendront pas ...

[2] On dit aussi intégrer.

1.4 Proposition. *Soit f une solution de $(*)$. Toute solution de cette équation est de la forme $f+h$ où h est une solution de $(**)$.*

Démonstration. Si k est une autre solution de $(*)$, on vérifie aussitôt que $k-f:=h$ est solution de $(**)$.

1.5 *Remarque.* On paraphrase souvent ce résultat en disant que la solution générale de l'équation $(*)$ est somme d'une solution particulière de $(*)$ et de la solution générale de l'équation homogène.

1.3 Rappel sur l'équation du premier ordre

Rappelons le résultat :

1.6 Théorème. *Les solutions de l'équation différentielle $y'=\alpha y$, $\alpha\in\mathbf{R}$, sont les fonctions $f(x)=\lambda e^{\alpha x}$ avec $\lambda\in\mathbf{R}$.*

Démonstration. Avec les nouveaux programmes de terminale c'est presque évident, voir le papier là-dessus sur ma page web. Rappelons comment on trouve cela avec les anciens. On écrit, si y n'est pas nul, $\dfrac{y'}{y}=\alpha$. On reconnaît une dérivée logarithmique, de sorte qu'en prenant une primitive on a $\ln|y|=\alpha x+c$ et on voit donc en tous cas, apparaître des solutions de la forme $\lambda e^{\alpha x}$. Bien entendu, ce calcul a le défaut de nécessiter le fait que y n'est pas nul. Mais maintenant qu'il nous a donné une solution on peut l'oublier et utiliser la méthode classique de variation de la constante : on cherche les solutions sous la forme $y(x)=z(x)e^{\alpha x}$ ou encore, on pose $z(x)=y(x)e^{-\alpha x}$. En dérivant on voit que z' est nulle et on a gagné.

2 Les solutions de l'équation $(**)$

2.1 L'équation caractéristique

Fort de ce qui se passe au premier ordre on cherche des solutions de l'équation de la forme e^{rx}. Un calcul immédiat montre qu'une telle fonction est solution si et seulement si r est racine de **l'équation caractéristique** $ar^2+br+c=0$, notée (EC). Bien entendu, il y a trois cas *a priori* selon que cette équation admet deux racines réelles r,s distinctes, une racine double r ou deux racines complexes conjuguées.

2.2 Le calcul fondamental

Si r est solution de l'équation caractéristique, les fonctions λe^{rx} sont solution de $(**)$ et l'idée, pour en trouver d'autres, est encore de "faire varier la constante" c'est-à-dire de chercher des solutions de la forme[3] $y(x) = z(x)e^{rx}$. En vérité, le point fondamental est un calcul :

2.1 Proposition. *Soit $z : I \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable et r un nombre réel. On pose $y(x) = z(x)e^{rx}$. On a la formule :*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{rx}\big((ar^2 + br + c)z(x) + (2ar + b)z'(x) + az''(x)\big).$$

Démonstration. C'est un calcul sans malice.

2.3 Deux conséquences du calcul fondamental

2.3.1 Le cas d'une racine double

Supposons que r est racine double de (EC). On a donc à la fois $ar^2 + br + c = 0$ et $2ar + b = 0$ (cette deuxième expression est la dérivée de la première). Dire que $y(x) = e^{rx}z(x)$ est solution de $(**)$ équivaut alors, en vertu de 2.1, à $z''(x) = 0$ (car a est non nul). On en déduit $z'(x) = \lambda \in \mathbf{R}$, puis $z(x) = \lambda x + \mu$ avec $\mu \in \mathbf{R}$.

On a donc prouvé :

2.2 Théorème. *Si l'équation caractéristique (EC) admet une racine réelle double r, les solutions de $(**)$ sont les fonctions $y(x) = \lambda x e^{rx} + \mu e^{rx}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.*

2.3.2 Le cas de deux racines réelles

Supposons que l'équation (EC) a deux racines réelles distinctes r et s. Rappelons qu'on a alors $r + s = -\dfrac{b}{a}\cdot$ En vertu de 2.1, $y(x) = e^{rx}z(x)$ est solution de $(**)$ si et seulement si on a $az''(x) + (2ar + b)z'(x) = 0$. On est en présence d'une équation du premier ordre en z', dont on connaît les solutions : $z'(x) = \alpha e^{(-2r-\frac{b}{a})x}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On en déduit, en prenant une primitive : $z(x) = \mu e^{(-2r-\frac{b}{a})x} + \lambda$ (en posant $\mu = \dfrac{-a\alpha}{2ar + b}$). On a enfin $y(x) = z(x)e^{rx} = \mu e^{(-r-\frac{b}{a})x} + \lambda e^{rx} = \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$.

On a prouvé ainsi :

[3] C'est-à-dire, voir ci-dessus, de poser $z(x) = y(x)e^{-rx}$.

2.3 Théorème. *Si l'équation caractéristique* (EC) *admet deux racines réelles* r *et* s*, les solutions de* $(**)$ *sont les fonctions* $y(x) = \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$ *avec* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

2.4 Le cas du discriminant négatif

On suppose maintenant que l'équation caractéristique (EC) n'a pas de racine réelle, c'est-à-dire que son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif. On reprend le calcul fondamental en prenant cette fois $r = -\dfrac{b}{2a}$, ce qui a pour effet de tuer le terme en $z'(x)$. Il reste donc une équation de la forme $az''(x) + (ar^2 + br + c)z(x) = 0$. On a $ar^2 + br + c = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$ et, en posant $\omega^2 = -\dfrac{\Delta}{4a^2}$, on est ramené à l'équation $z'' + \omega^2 z = 0$, la plus étudiée autrefois en terminale.

2.4.1 L'équation $z'' + \omega^2 z = 0$

On commence par un lemme :

2.4 Lemme. *Soit* ω *un réel et* f *une solution (réelle) de l'équation différentielle* $z'' + \omega^2 z = 0$*. On suppose qu'on a* $f(0) = f'(0) = 0$*. Alors,* f *est identiquement nulle*[4].

Démonstration. On a $f'' + \omega^2 f = 0$. L'astuce (il n'y en a qu'une) c'est de multiplier cette égalité par f' pour faire apparaître des dérivées : $f'f'' + \omega^2 f'f = 0$. On constate que cette expression est la moitié de la dérivée de $(f')^2 + \omega^2 f^2$. Cette fonction, dont la dérivée est nulle, est donc constante[5]. Vu les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$ elle est identiquement nulle. Mais, comme f et f' sont réelles, on a $(f'(x))^2 \geq 0$ et $f(x)^2 \geq 0$ et $(f'(x))^2 + \omega^2 f(x)^2 = 0$ n'est posssible que si les deux termes sont nuls. On a bien montré le lemme.

2.5 Corollaire. *Les solutions réelles de l'équation* $z'' + \omega^2 z = 0$ *sont les fonctions* $h_{A,B}(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$.

---

[4]Quand on a, ne serait-ce qu'un embryon de sens physique, ou qu'on a entendu parler du théorème de Cauchy, on sait qu'un phénomène régi par une équation du second ordre dépend de deux paramètres : la position initiale $f(0)$ et la vitesse initiale $f'(0)$ et le résultat n'est autre que le principe d'inertie : si l'on est à l'origine avec une vitesse nulle on y reste.

[5]Si l'on pense par exemple au cas où f est l'étirement d'un ressort et f' sa vitesse, et si on multiplie par la masse, on retrouve le fait que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est constante.

Démonstration. On vérifie que ces fonctions sont solutions. Réciproquement, si on a une solution g, il existe A, B uniques tels que $h_{A,B}(0) = g(0)$ et $h'_{A,B}(0) = g'(0)$ (il suffit de résoudre le système linéaire en A et B donné par ces relations). Mais alors, la différence $f = g - h_{A,B}$ est solution de l'équation différentielle et vérifie $f(0) = f'(0) = 0$. Elle est donc nulle en vertu du lemme et on a $g = h_{A,B}$.

2.4.2 Retour au cas général

Le changement de fonction $y(x) = e^{rx}z(x)$ avec $r = -\dfrac{b}{2a}$ a ramené l'équation $(**)$ à $z'' + \omega^2 z = 0$ avec $\omega^2 = -\dfrac{\Delta}{4a^2}\cdot$ Avec 2.5 on a donc prouvé le théorème :

2.6 Théorème. *On suppose $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. On pose $\omega^2 = -\dfrac{\Delta}{4a^2}$ et $r = -\dfrac{b}{2a}\cdot$ Les solutions de l'équation sont les fonctions $f(x) = e^{rx}\big(A\cos\omega x + B\sin\omega x\big)$.*

2.7 *Remarque.* Si l'on utilise les complexes, les solutions trouvées sont combinaisons des fonctions $e^{(r+i\omega)x}$ et $e^{(r-i\omega)x}$ et elles correspondent encore aux solutions de l'équation caractéristique $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = r \pm i\omega$.

2.5 Wronskien et théorème de Cauchy

On reprend les notations précédentes et on note f_1, f_2 les fonctions solutions de l'équation $(**)$ qui engendrent toutes les autres (nous les appellerons "solutions fondamentales"). Il s'agit de :

- $f_1(x) = e^{rx}$ et $f_2(x) = xe^{rx}$ dans le cas où (EC) admet la racine double r,
- $f_1(x) = e^{rx}$ et $f_2(x) = e^{sx}$ dans le cas où (EC) admet les racines distinctes r et s,
- $f_1(x) = e^{rx}\cos\omega x$ et $f_2(x) = e^{rx}\sin\omega x$ dans le cas où (EC) admet les racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$.

On note que ces fonctions sont définies sur $\mathbf{R}$ tout entier.

2.8 Lemme. *Dans les trois cas évoqués ci-dessus, le wronskien $w(x) := f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)$ ne s'annule pas.*

Démonstration. Un calcul élémentaire montre qu'on a, selon les cas, $w(x) = e^{2rx}$ ou $w(x) = (s-r)e^{(r+s)x}$ ou $w(x) = \omega e^{rx}$.

2.9 Corollaire. (Théorème de Cauchy) *Soit* $x_0 \in \mathbf{R}$ *et soient* $y_0, y_0' \in \mathbf{R}$. *Il existe une unique fonction* $y(x)$ *solution de* $(**)$ *qui vérifie* $y(0) = y_0$ *et* $y'(0) = y_0'$.

Démonstration. Avec les notations ci-dessus, on cherche y sous la forme $y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ avec $\lambda_i \in \mathbf{R}$. Il faut donc résoudre le système en λ_1, λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(x_0) + \lambda_2 f_2(x_0) = y_0 \\ \lambda_1 f_1'(x_0) + \lambda_2 f_2'(x_0) = y_0' \end{cases},$$

et il y a une solution unique car le déterminant de ce système est $w(x_0)$ qui est non nul.

3 Trouver une solution particulière de $(*)$?

Maintenant que nous avons déterminé toutes les solutions de l'équation homogène, il reste à trouver **une** solution de $(*)$. Il y a essentiellement deux voies.

3.1 Le cas des solutions apparentes

Dans nombre de cas, on peut imaginer d'avance la forme d'une solution de l'équation à partir de la forme du second membre :

3.1 Proposition.
1) On suppose que la fonction g *est de la forme* $g(x) = P(x)e^{rx}$ *où* P *est un polynôme de degré* n *et* r *un réel ou un complexe. Alors, il y a une solution de l'équation* $(*)$ *de la forme* $Q(x)e^{rx}$ *où* Q *est un polynôme de degré* n *si* r *n'est pas racine de l'équation caractéristique, de degré* $n+1$ *si* r *en est racine simple, de degré* $n+2$ *si* r *en est racine double.*
2) On suppose g *de la forme* $g(x) = e^{rx}\big(\alpha \cos sx + \beta \sin sx\big)$ *avec* r, s, α, β *réels et* $s \neq 0$. *Alors, il y a une solution de l'équation* $(*)$ *de la forme* $e^{rx}\big(A \cos sx + B \sin sx\big)$ *(resp.* $xe^{rx}\big(A \cos sx + B \sin sx\big)$*) si* $r + is$ *n'est pas racine de l'équation caractéristique (resp. en est racine).*

Démonstration. Dans la pratique, notamment au niveau du lycée, et lorsque les polynômes ne sont pas de trop grands degrés, on procède par identification des coefficients. On peut d'ailleurs prouver le cas général par cette méthode en raisonnant par récurrence sur le degré de P.

Donnons une preuve générale qui utilise l'algèbre linéaire. On a à résoudre en Q l'équation $aQ'' + (2ar + b)Q' + (ar^2 + br + c)Q = P$. Supposons par exemple que r n'est pas racine de l'équation caractéristique. On considère l'application linéaire φ de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]_n$ des polynômes de degré $\leq n$ dans lui-même qui à Q associe $aQ'' + (2ar + b)Q' + (ar^2 + br + c)Q$ et il s'agit de voir qu'elle est surjective. Il suffit pour cela de montrer qu'elle est injective, donc que son noyau est nul, ce qui est immédiat en examinant le terme de plus haut degré de Q. Si r est racine mais pas racine double on considère $\psi : \mathbf{R}[X]_{n+1} \to \mathbf{R}[X]_n$ donnée par $\psi(Q) = aQ'' + (2ar + b)Q'$ et on montre, comme ci-dessus, que son noyau est réduit aux constantes, donc qu'elle est surjective. Le dernier cas est trivial.

Le point 2) est un cas particulier du point 1).

3.2 La méthode de variation des constantes

On reprend les notations f_1, f_2 introduites ci-dessus pour les solutions fondamentales de l'équation $(**)$. Les solutions de cette équation sont donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ où λ_1 et λ_2 sont des constantes. Pour trouver une solution particulière de $(*)$, on la cherche de même forme, mais avec des λ_i fonctions et non plus constantes : $f(x) = \lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x)$. On dérive :

$$f'(x) = \lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) + \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x)$$

et il est astucieux d'imposer $\lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) = 0$, histoire de simplifier l'expression. On en déduit

$$f''(x) = \lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x) + \lambda_1(x) f_1''(x) + \lambda_2(x) f_2''(x).$$

En écrivant que f est solution de $(*)$, il reste, compte-tenu du fait que f_1 et f_2 sont solutions de $(**)$, les deux relations suivantes (on n'oublie pas celle imposée ci-dessus) :

$$\lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x) = g(x).$$

On résout alors le système linéaire ci-dessus en $\lambda_1'(x)$ et $\lambda_2'(x)$ et on obtient (rappelons que le wronskien ne s'annule pas) :

$$\lambda_1'(x) = \frac{-f_2(x) g(x)}{w(x)} \quad \lambda_2'(x) = \frac{f_1(x) g(x)}{w(x)}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver des primitives de ces fonctions pour avoir les solutions cherchées (on dit qu'on a ramené la résolution de l'équation à des "quadratures"). En tous cas, comme les fonctions ci-dessus sont continues, elles admettent des primitives et on a montré :

3.2 Théorème. *L'équation* $(*)$ *admet une solution* $f_0(x)$. *Toutes ses solutions, avec les notations précédentes, sont les fonctions* $f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

3.3 Corollaire. (Solution du problème de Cauchy) *Soient* x_0, y_0, y'_0 *trois réels. Il existe une unique solution* f *de* $(*)$ *qui vérifie* $f(x_0) = y_0$ *et* $f'(x_0) = y'_0$.

Démonstration. On cherche f sous la forme $f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. On a alors à résoudre le système en λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 f_1(x_0) + \lambda_2 f_2(x_0) = y_0 - f_0(x_0) \quad \text{et} \quad \lambda_1 f'_1(x_0) + \lambda_2 f'_2(x_0) = y'_0 - f'_0(x_0)$$

et on conclut car $w(x_0)$ est non nul.