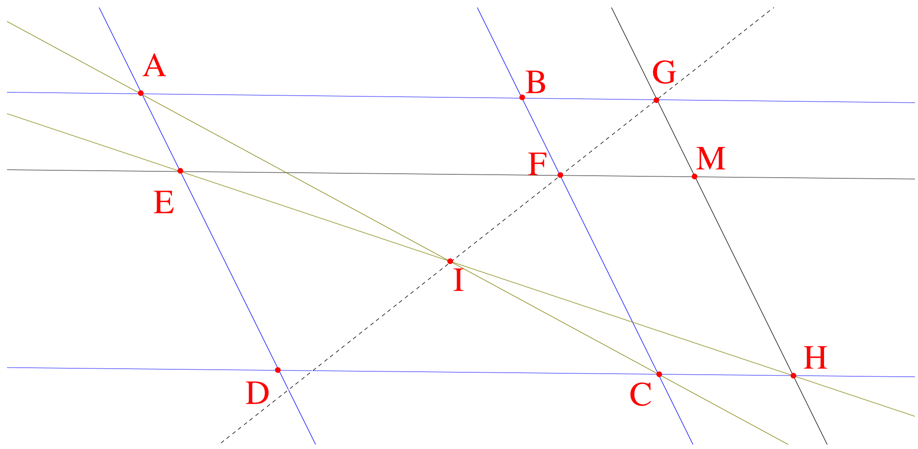
Un dual affine de Pappus

Daniel Perrin

L'énoncé

0.1 Théorème. *Soit $\mathcal{P} = ABCD$ un parallélogramme et M un point du plan, non situé sur les côtés de $\mathcal{P}$. La parallèle à (AB) (resp. à (AD)) passant par M coupe (AD) en E et (BC) en F (resp. (AB) en G et (CD) en H). Alors, les droites (AC), (EH) et (FG) sont concourantes.*



1 Identification

Ce résultat est un avatar, dual et affine, de Pappus.

Rappelons ce que dit Pappus :

1.1 Théorème. *Soient D, D' deux droites sécantes, a, b, c trois points de D (resp. a', b', c' de D'). On appelle u (resp. v, resp. w) le point d'intersection des droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, resp. (ab') et $(a'b)$). Alors, u, v, w sont alignés.*

La variante duale de Pappus est le théorème de Brianchon :

1.2 Théorème. *Soient d, d' deux points, A, B, C trois droites passant par d (resp. A', B', C' par d'). On appelle U (resp. V, resp. W) la droite joignant les points d'intersection de B, C' et B', C (resp. C, A' et C', A, resp. A, B' et A', B). Alors, les droites U, V, W sont concourantes.*

Le résultat ci-dessus est une variante affine de ce théorème dans laquelle les points d et d' sont à l'infini, où les droites A, B, C sont respectivement (AB), (EF) et (DC) et où les droites A', B', C' sont (BC), (GH) et (AD). Les droites U, V, W sont alors (EH), (CA) et (GF) et elles sont concourantes.

2 Une preuve par homothétie

La preuve donnée ci-dessous met en œuvre trois idées :

• D'abord, on appelle I l'intersection des droites (AC) et (EH) et il s'agit de montrer que F, G, I sont alignés.

• Ensuite, vu le grand nombre de parallèles, il paraît judicieux d'utiliser des homothéties (voire Thalès), l'idée étant de montrer qu'une certaine homothétie de centre I transforme F en G.

• Enfin, et c'est le point décisif, là où la culture joue un rôle, on sait que le théorème de Pappus est équivalent à la commutativité de la multiplication dans le corps de base. On va utiliser ce point ici en écrivant que si g, h sont deux homothéties de même centre, on a $g \circ h = h \circ g$.

Réalisons ce programme. On considère l'homothétie h de centre I qui envoie C sur A. Elle transforme une droite en une droite parallèle, donc transforme (BC) en (AD) et (CD) en (AB). On considère ensuite l'homothétie g de centre I qui transforme E en H. Elle transforme $(AD) = (ED)$ en (HG) et (EF) en $(CD) = (HC)$.

La composée $g \circ h$ transforme donc (BC) en (HG), tandis que la composée $h \circ g$ transforme (EF) en (AB). Mais, comme ces composées sont égales (!), l'homothétie $k = g \circ h = h \circ g$ transforme à la fois (BC) en (HG) et (EF) en (AB), donc l'intersection de (BC) et (EF), c'est-à-dire F, en celle de (HG) et (AB), c'est-à-dire G : cqfd.