Un memento sur les coniques

On se place dans un plan euclidien orienté E. La distance de deux points A, B est notée AB.

1 Définition par foyer et directrice

Soit D une droite, F un point, $F \notin D$ et e un réel > 0. On appelle **conique** de **directrice** D, de **foyer** F et d'**excentricité** e l'ensemble C des points M de E qui vérifient $MF = eMH$ (H désigne la projection de M sur D).

Lorsque $0 < e < 1$ on dit que C est une **ellipse**, lorsque $e = 1$ une **parabole**, lorsque $e > 1$ une **hyperbole**.

Soit K la projection de F sur D. On écrit l'équation de C dans le repère orthonormé d'origine K et dont les axes sont portés par KF et D, voir Figure 1. On pose $F = (d, 0)$, avec $d \in \mathbf{R}$. On a alors, si $M = (x, y)$, $MF^2 = (x-d)^2 + y^2 = e^2 MH^2 = e^2x^2$ donc $x^2(1-e^2) + y^2 - 2dx + d^2 = 0$. On constate que C est donnée par une équation de la forme $f(x, y) = 0$ avec f polynôme de degré 2.

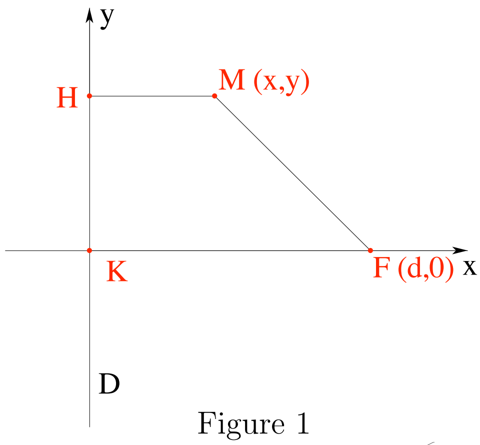

Figure 1

Dans le cas de la parabole on a l'équation $y^2 - 2dx + d^2$. Soit $S = (0, d/2)$ le point d'intersection de C avec l'axe des x (le **sommet** de la parabole). Il est commode de faire le changement de repère $X = x - d/2$ et $Y = y$ qui met l'origine au sommet. On a alors l'équation $Y^2 - 2dX = 0$. L'axe des y est tangent à C en S, voir Figure 2.

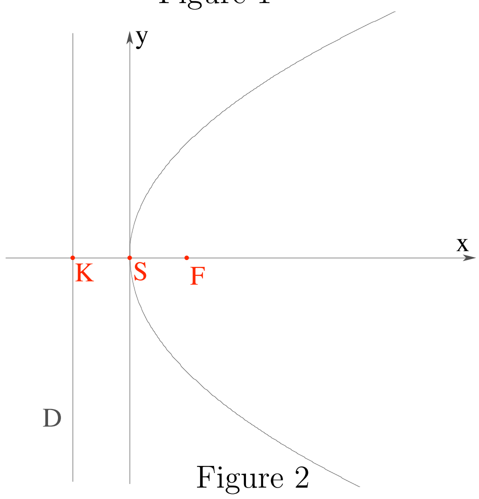

Figure 2

2 Définition bifocale

2.1 L'ellipse

On se donne deux points distincts F, F' et un nombre $a > 0$. On considère l'ensemble C des points M qui vérifient $MF + MF' = 2a$. On note que si $2a < FF'$, C est vide et que si $2a = FF'$, C est le segment $[FF']$. On suppose désormais $2a > FF'$.

2.1 Proposition. *L'ensemble C est une ellipse.*

Le plus simple est d'écrire l'équation dans le repère centré en O milieu de FF' et dont les axes sont FF' et la perpendiculaire à FF' en O. On pose $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$ (on a $0 < c < a$) et on a, si $M = (x, y)$, $MF^2 = (x-c)^2+y^2$, $MF'^2 = (x+c)^2+y^2$, d'où $MF'^2-MF^2 = 4cx = (MF' - MF)(MF + MF') = 2a(MF' - MF)$. On en déduit $MF' - MF = 2cx/a$ et, avec la somme : $MF = a - cx/a$, d'où, en élevant au carré $x^2(1 - c^2/a^2) + y^2 = a^2 - c^2$ ou encore $x^2/a^2 + y^2/(a^2 - c^2) = 1$.

Soit alors D la perpendiculaire à FF' en le point $K = (a^2/c, 0)$. On vérifie que C est l'ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité $e = c/a$. (Faire le changement de repère $X = x - a^2/c, Y = y$ et poser $d = (c^2 - a^2)/c$). On notera que la même chose marche avec le foyer F' et la directrice D' symétrique de D par rapport à O. On dit que F et F' sont les **foyers** de C et D, D' ses **directrices**.

2.2 Description de C

On pose $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. On a $b < a$. L'équation de C est alors :

$$(*) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On note que C admet les axes de coordonnées comme axes de symétrie et O comme centre de symétrie. Le point O est le **centre** de l'ellipse. L'ellipse coupe l'axe des x en $A = (a, 0)$ et $A' = (-a, 0)$ et l'axe des y en $B = (0, b)$ et $B' = (0, b')$. Ces quatre points sont les **sommets** de C. Le segment $[A'A]$ est le **grand axe**, le segment $[BB']$ le **petit axe**. On retrouve la relation $a^2 = b^2 + c^2$ en écrivant $BF + BF' = 2a$ et en appliquant Pythagore au triangle BOF.

La figure 3 résume la plupart des propriétés de l'ellipse.

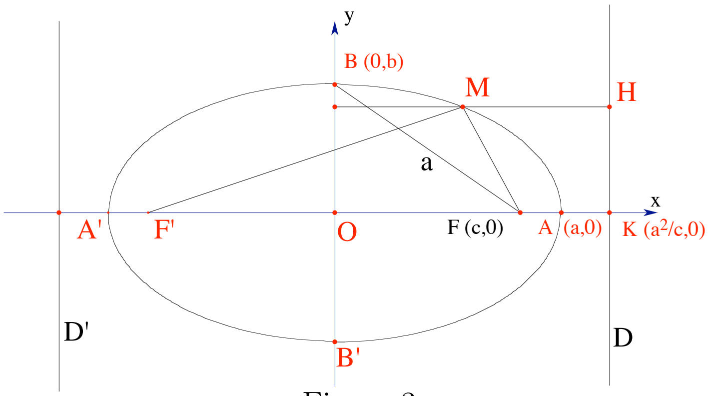

Figure 3

2.3 L'hyperbole

On se donne encore deux points distincts F, F' et un nombre $a > 0$. On considère cette fois l'ensemble C des points M qui vérifient $|MF - MF'| = 2a$. On note que si $2a > FF'$, C est vide et que si $2a = FF'$, C est la réunion de deux demi-droites. On suppose désormais $2a < FF'$.

2.2 Proposition. *L'ensemble C est une hyperbole.*

On travaille dans le même repère que pour l'ellipse (avec toujours $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$) et le calcul est analogue (il faut distinguer selon que $MF \geq MF'$ ou non). On trouve encore

l'équation $x^2(1 - c^2/a^2) + y^2 = a^2 - c^2$ qui s'écrit cette fois :
$x^2/a^2 - y^2/(c^2 - a^2) = 1$ (on a $c > a$).

Si D est la perpendiculaire à FF' en le point $K = (a^2/c, 0)$ on vérifie comme dans le cas de l'ellipse que C est l'hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité $e = c/a > 1$. Là encore, la même chose marche avec le foyer F' et la directrice D' symétrique de D par rapport à O. On dit que F et F' sont les **foyers** de C et D, D' ses **directrices**.

2.4 Description de C

On pose $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. L'équation de C est alors :

$$(**) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On note que C admet les axes de coordonnées comme axes de symétrie et O comme centre de symétrie. Le point O est le **centre** de l'hyperbole. L'hyperbole coupe l'axe des x en $A = (a, 0)$ et $A' = (-a, 0)$ mais ne coupe pas l'axe des y. Les points A et A' sont les **sommets** de C. L'hyperbole admet les droites $y = \pm(b/a)x$ comme **asymptotes** (écrire l'équation sous la forme $y = \pm(b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$). Ces asymptotes sont perpendiculaires si et seulement si $a = b$ (ou encore si $e = \sqrt{2}$). On dit alors que l'hyperbole est **équilatère**. Si on rapporte l'hyperbole à un repère porté par ses asymptotes son équation devient $XY = 1$. Attention, ce repère n'est orthonormé que si l'hyperbole est équilatère.

La figure 4 résume la plupart des propriétés de l'hyperbole.

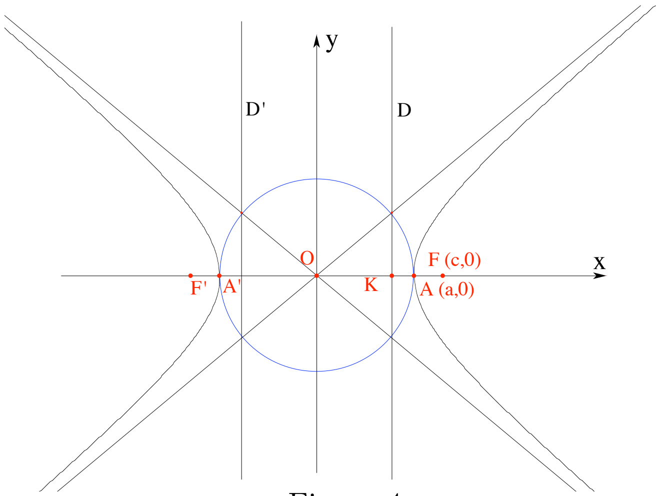

Figure 4

3 Réduction des équations

On suppose maintenant $E = \mathbf{R}^2$. On considère une courbe Γ d'équation $f(x, y) = 0$ avec $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$. On suppose a, b, c non tous nuls (sinon la courbe est une droite).

3.1 Proposition. *Il existe un repère orthonormé dans lequel Γ a pour équation $AX^2 + BY^2 + 2CX + 2DY + E = 0$ avec A et B non tous deux nuls.*

Démonstration. On considère la forme quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$, de matrice

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Il existe une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle cette matrice est diagonale, comme endomorphisme **et** comme forme quadratique. Dans cette base on a, si X, Y sont les nouvelles coordonnées, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = AX^2 + BY^2$ et la courbe a l'équation cherchée.

On étudie maintenant les courbes données par une équation :

$$AX^2 + BY^2 + 2CX + 2DY + E = 0.$$

1) Si $AB = 0$, disons, par exemple, $A \neq 0$ et $B = 0$. Il y a deux cas :

a) $D = 0$. L'équation est $AX^2 + 2CX + E = 0$. Elle définit deux droites parallèles à l'axe des y (resp. une droite double, resp. le vide) selon que le discriminant $C^2 - AE$ est > 0 (resp. nul, resp. < 0).

b) $D \neq 0$. L'équation s'écrit $A(X+C/A)^2+2D(Y+((EA-C^2)/2AD)) = 0$ et un changement de variables immédiat montre que Γ est une parabole.

2) Si $AB \neq 0$. On écrit l'équation sous la forme

$$A(X + C/A)^2 + B(Y + D/B)^2 + E - C^2/A - D^2/B = 0.$$

En changeant l'origine en $(-C/A, -D/B)$, l'équation devient de la forme $AX^2 + BY^2 = k$ et quitte à multiplier tous les coefficients par -1 on peut supposer $A > 0$.

a) $B > 0$. Si $k < 0$, Γ est vide. Si $k = 0$, Γ est réduit à l'origine. Si $k > 0$ la courbe est une ellipse (et si on pose $a^2 = k/A$, $b^2 = k/B$ l'équation est de la forme $(*)$).

b) $B < 0$. Si $k = 0$ on trouve la réunion de deux droites passant par l'origine. Si $k \neq 0$, Γ est une hyperbole et son équation est de la forme $(**)$ avec (si $k > 0$), $a^2 = k/A$ et $b^2 = -k/B$.

4 Equation en polaires

On travaille dans $\mathbf{R}^2$ avec les coordonnées polaires (ρ, θ). On a donc $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

4.1 Proposition. *Soit C la conique de foyer $F = (0, 0)$, de directrice D d'équation $x = h$ et d'excentricité $e > 0$. La conique C a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = e^2(x - h)^2$ et pour équation polaire, au choix, l'une des deux suivantes :*

$$\rho = \frac{eh}{e\cos\theta + 1} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{eh}{e\cos\theta - 1}.$$

Démonstration. Soit $M = (x, y)$ un point du plan. Il est sur C si et seulement si on a $MF = eMH$, ce qui équivaut à $MF^2 = e^2MH^2$ et donne l'équation cartésienne.

Notons E^+ (resp. E^-) l'ensemble des points $M = (x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ qui vérifient la première équation polaire (resp. la seconde). On note d'abord (et c'est le point essentiel) qu'on a $E^+ = E^-$. En effet, si le point de coordonnées polaires (ρ, θ) est sur E^+, ce point a aussi comme système de coordonnées polaires $(-\rho, \theta + \pi)$ et on voit qu'il est sur E^- et inversement.

Montrons que E^+ est contenu dans C. Si $M = (x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ vérifie $\rho = \dfrac{eh}{e\cos\theta + 1}$, on a $\rho + ex = eh$, d'où $\rho = e(h - x)$ et, en élevant au carré, on a $MF^2 = e^2MH^2$.

Montrons que C est contenu dans $E^+ \cup E^- = E^+$. Si $M = (x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ vérifie $x^2+y^2 = e^2(x-h)^2$, ou encore$\rho^2 = e^2(\rho\cos\theta - h)^2$, on a $\rho = e(\rho\cos\theta - h)$ ou $\rho = e(h - \rho\cos\theta)$. Dans le premier cas M est dans E^-, dans le second il est dans E^+.