Sur le point de Fermat d'un triangle

Pascal GAMBLIN et Daniel PERRIN

Introduction

Dans ce texte, on se propose de déterminer les points M du plan qui réalisent le minimum de la somme des distances $MA + MB + MC$ aux trois sommets d'un triangle donné. C'est un problème célèbre qui a été posé pour la première fois par Fermat en 1636 et dont des solutions ont été proposées par de nombreux mathématiciens (Torricelli, Cavalieri, Viviani, Simpson, Heinen, Steiner, etc.) Le lecteur trouvera plusieurs approches, toutes plus séduisantes les unes que les autres, dans le livre de Berger [1] et sur de très nombreux sites Internet, notamment :

`http://www.ai.univ-paris8.fr/~audibert/tra/TORRICELLI.pdf`

`http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/Triangle/Particul/Torricel.htm`

Ce sujet a été proposé durant l'année 2015-2016 comme thème d'exposé dans le module de M2 pour futurs professeurs que nous encadrons à l'université Paris-Sud et en réfléchissant sur ce problème nous avons produit une preuve[1] très simple qui n'est pas – nous semble-t-il – aussi connue que les autres. Elle consiste pour l'essentiel à se ramener au cas du triangle équilatéral. Son intérêt essentiel est qu'elle peut être déclinée à plusieurs niveaux du collège et du lycée.

Dans ce qui suit, lorsqu'on parle d'un triangle, il est supposé non aplati et quand on parle de ses points il s'agit des points du triangle plein (côtés compris). Nous utiliserons plusieurs fois le résultat suivant :

0.1 Lemme. *Dans un triangle ABC, si l'angle $\widehat{A}$ est obtus ou droit, le côté BC est plus grand que AB et AC.*

Démonstration. On peut soit invoquer Pythagore (si $\widehat{A}$ est obtus en utilisant les hauteurs issues de B et C), soit le vieux résultat d'Euclide qui affirme que dans un triangle le plus grand angle fait face au plus grand côté.

1 Le cas équilatéral

On va commencer par montrer le résultat suivant :

1. Avec plusieurs variantes.

1.1 Théorème. *Soit ABC un triangle équilatéral, G son centre de gravité, M un point du triangle. On a $MA + MB + MC \geq GA + GB + GC$ avec égalité si et seulement si $M = G$.*

On conjecture facilement la propriété avec un logiciel de géométrie en faisant afficher la somme $MA + MB + MC$. D'ailleurs, si l'on pense qu'il y a un **unique** point qui réalise le minimum, il est clair qu'il est sur les trois axes de symétrie du triangle, donc en G (sinon ses symétriques réalisent aussi le minimum). Le paragraphe suivant montre qu'en tous cas le minimum est nécessairement sur les hauteurs.

1.1 La somme est plus courte sur les hauteurs

Précisément on montre :

1.2 Proposition. *Soit M un point du triangle équilatéral ABC. On appelle H le pied de la hauteur issue de A. Soit N l'intersection de (AH) avec la parallèle à (BC) passant par M. Alors, on a $MA + MB + MC \geq NA + NB + NC$ avec égalité si et seulement si $M = N$.*

Démonstration. On a d'abord $MA \geq NA$ car MA est l'hypoténuse du triangle rectangle AMN dont NA est un côté de l'angle droit.

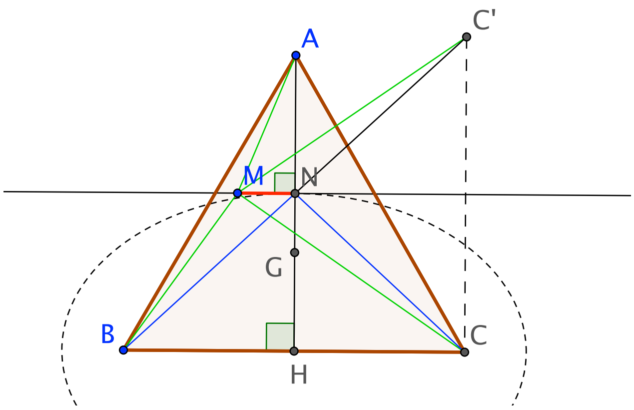

FIGURE 1 – Le minimum ne peut être que sur la hauteur

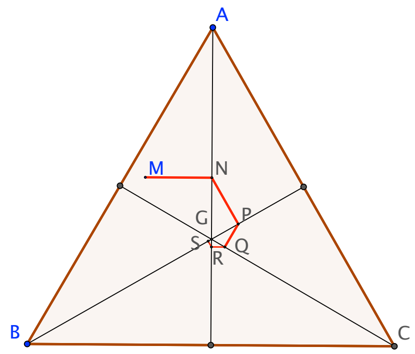

FIGURE 2 – Mais peut-on l'atteindre ?

Montrons ensuite qu'on a $MB + MC \geq NB + NC$. Bien sûr, c'est clair quand on connaît les ellipses [2], mais voici une preuve élémentaire. On considère le point C' symétrique de C par rapport à (MN). On a donc $MC' = MC$ et $NC' = NC$. De plus, B, N, C' sont alignés (par exemple parce que N, qui est l'intersection de deux des médiatrices du triangle rectangle BCC', se trouve au milieu de l'hypoténuse $[BC']$). On a donc $NB+NC = NB+NC' = BC'$ et cette longueur est plus petite que $MB + MC' = MB + MC$ par l'inégalité triangulaire.

1.3 *Remarque.* **Attention**, cette proposition ne prouve pas **l'existence** d'un point qui réalise le minimum de $MA + MB + MC$ même si l'on voit bien qu'on va pouvoir s'en approcher en recommençant l'opération avec une autre hauteur, voir figure 2. Cette remarque est évidemment un point délicat à faire comprendre à des lycéens [3].

1.2 Le cas où M est sur la hauteur

Le point G est encore le centre de gravité du triangle et H le pied de la hauteur issue de A. Pour un point M de $[AH]$, il s'agit de montrer qu'on a $MA+MB+MC \geq GA+GB+GC$. On en propose quatre preuves, pouvant se décliner à différents niveaux du lycée ou du collège.

1.2.1 Par l'étude de fonctions, terminale S

On choisit un repère orthonormé adapté à la situation : $H = (0, 0)$, $B = (-a, 0)$, $C = (a, 0)$, $A = (0, a\sqrt{3})$. Le fait que G est au tiers des médianes donne aussitôt $GA + GB + GC = 2a\sqrt{3}$. Soit $M = (0, y)$ un point de la hauteur. On calcule $MA + MB + MC = a\sqrt{3} - y + 2\sqrt{a^2 + y^2}$ et il n'y a plus qu'à étudier la fonction correspondante. Elle admet un minimum pour $y = a/\sqrt{3}$ et ce minimum vaut $2a\sqrt{3}$, d'où le résultat.

1.2.2 Les outils des preuves géométriques

D'abord on note qu'on connaît tous les angles de la figure : 60° en A, B, C, 30° en ces mêmes points de part et d'autre des hauteurs-bissectrices et donc 120° en G pour $\widehat{BGC}$, $\widehat{CGA}$ et $\widehat{AGB}$.

2. Si l'on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers B, C qui passe par N, la droite (MN) est tangente à $\mathcal{E}$, donc M est à l'extérieur de $\mathcal{E}$ et la somme des distances à B, C est plus grande en M qu'en N.

3. Dans ce genre de situation, personne ne doute de l'existence d'un minimum. Cela montre que la propriété de compacité du triangle est bien naturelle !

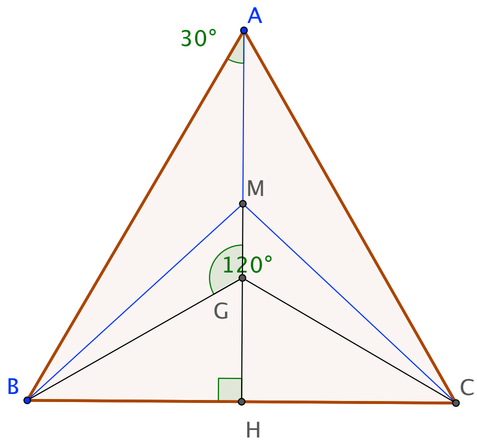

FIGURE 3 – La figure de base

On sait aussi que G, qui est le point de concours des médianes, est au tiers de $[AH]$. En particulier, on a $GB = GA = 2GH$.

Par la symétrie d'axe (AH), on est ramené à voir $\dfrac{MA}{2} + MB \geq \dfrac{GA}{2} + GB$. Il y a deux cas selon que M est dans $[AG]$ ou dans $[GH]$. Dans le premier cas il faut montrer $MB \geq GB + \frac{1}{2}MG$, dans le second $MB \geq GB - \frac{1}{2}MG$.

1.2.3 Par la géométrie, première S

En première S on dispose du produit scalaire, donc de la formule d'Al-Kashi [4]. On l'applique dans BMG : $BM^2 = BG^2 + MG^2 - 2BG \times GM \times \cos \widehat{BGM}$. L'angle $\widehat{BGM}$ vaut 120° dans le premier cas et 60° dans le second donc son cosinus vaut $-1/2$ ou $1/2$ et on a $BM^2 = BG^2 + MG^2 + BG \times GM$ ou $BM^2 = BG^2 + MG^2 - BG \times GM$. Il faut montrer que cette quantité est $\geq GB^2 + \frac{1}{4}MG^2 + GB \times GM$ ou $\geq GB^2 + \frac{1}{4}MG^2 - GB \times GM$ selon les cas, mais c'est évident car on a $MG^2 \geq \frac{1}{4}MG^2$, avec égalité si et seulement si M est en G.

1.2.4 Par la géométrie, collège 1

Une variante de la preuve précédente consiste à utiliser le théorème de Pythagore. Là encore il est nécessaire de distinguer selon la position du point M par rapport à G. Traitons le cas où M est dans $[AG]$. On calcule $MB^2 =$

4. Que l'on peut démontrer aussi avec des arguments de collège, bien entendu.

$MH^2+HB^2 = (MG+GH)^2+HB^2 = MG^2+GH^2+2\times MG\times GH+HB^2$. Il faut voir que cette quantité est $\geq (GB+\frac{1}{2}MG)^2 = GH^2+HB^2+GB\times MG+\frac{1}{4}MG^2$. En divisant par MG, on est ramené à montrer $\frac{3}{4}MG + 2GH \geq GB$. Mais, comme on a $GB = 2GH$, c'est évident.

Le cas où M est dans $[GH]$ est tout à fait analogue.

1.2.5 Par la géométrie, collège 2

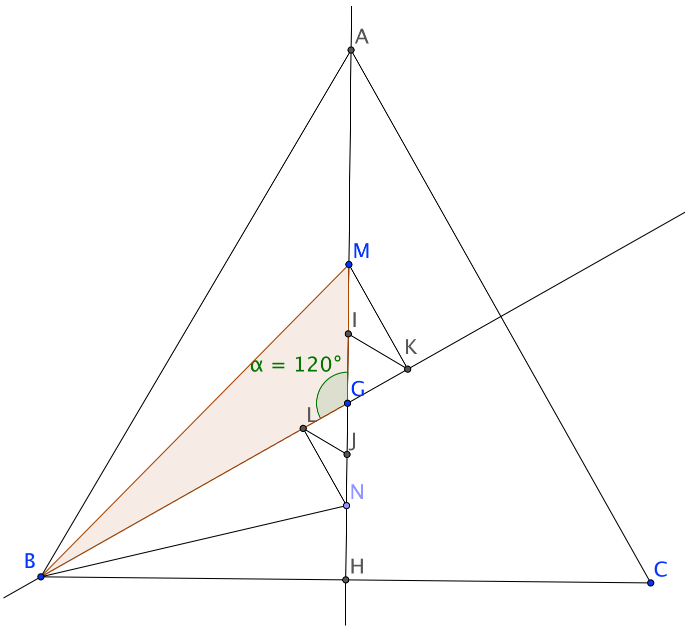

Figure 4 – La preuve géométrique

Premier cas : $M \in [AG[$

Comme il s'agit de montrer $MB \geq GB + \frac{1}{2}MG$ on introduit le milieu I de $[MG]$ (voir figure 4) et il faut prouver $MB \geq GB + GI$. Cela incite à prolonger $[GB]$ de la longueur GI et l'on obtient ainsi le point K. Comme l'angle $\widehat{BGM} = \widehat{BGA}$ vaut 120 degrés, l'angle $\widehat{IGK}$ vaut 60 degrés et le triangle isocèle IGK est équilatéral. Mais alors, le point K est sur le cercle de diamètre $[GM]$, de sorte que MKG est rectangle en K, donc aussi MKB. On en déduit bien $BK = BG + GK = BG + GI \leq BM$ puisque le côté de l'angle droit est plus court que l'hypoténuse.

Deuxième cas : $N \in [GH]$

Le raisonnement est identique en considérant le milieu J de $[NG]$.

2 L'énoncé général

On a vu que, dans le cas équilatéral, le minimum de $MA + MB + MC$ est atteint en le centre de gravité G. L'expérience avec un logiciel montre clairement que ce n'est plus le cas pour un triangle quelconque [5]. Cependant, dans le cas équilatéral, le point G est tel que les angles $\widehat{BGC}$, $\widehat{CGA}$ et $\widehat{AGB}$, angles sous lesquels on voit les côtés depuis G, sont tous trois égaux à 120° et c'est cette condition angulaire qui va se généraliser. On définit donc :

2.1 Définition. *Soit ABC un triangle. On appelle* **point de Fermat** *du triangle un point F tel que les angles $\widehat{BFC}$, $\widehat{CFA}$ et $\widehat{AFB}$ soient tous trois égaux à* 120 *degrés.*

On a alors le résultat suivant :

2.2 Théorème. *Soit ABC un triangle dont les angles sont tous plus petits que* 120 *degrés. Il existe un unique point de Fermat F du triangle. Si M est un point du triangle distinct de F on a $MA+MB+MC > FA+FB+FC$.*

2.1 Existence et unicité du point de Fermat

2.1.1 Condition nécessaire

On note d'abord que, si le point de Fermat existe, les angles du triangle sont plus petits que 120 degrés. En effet, si $\widehat{AFB}$ et $\widehat{AFC}$ valent tous deux 120°, les angles $\widehat{BAF}$ et $\widehat{CAF}$ qui sont avec eux dans les triangles AFB et AFC sont $< 60^\circ$, donc l'angle en A, $\widehat{BAC} = \widehat{BAF} + \widehat{CAF}$ est $< 120^\circ$.

2.1.2 Unicité

Notons ensuite que si le point de Fermat existe, il est unique. En effet, si on a un point de Fermat F et si G est un point du triangle, distinct de F, il est par exemple dans le triangle FBC. Mais alors, on a $\widehat{GBC} \leq \widehat{FBC}$ et $\widehat{GCB} \leq \widehat{FCB}$ et l'un au moins des inégalités est stricte. La somme des angles dans les triangles GBC et FBC montre qu'on a $\widehat{BGC} > \widehat{BFC} = 120^\circ$ et G n'est pas un point de Fermat.

5. En utilisant la preuve de 2.3, le lecteur montrera que le point de Fermat n'est égal au centre de gravité que dans le cas équilatéral.

2.1.3 Existence

Il y a plusieurs manières de montrer l'existence du point de Fermat, mais aucune n'est tout à fait évidente, surtout si l'on veut rester dans le cadre des programmes du secondaire. La plus simple [6] est la suivante :

2.3 Proposition. *Soit ABC un triangle dont tous les angles sont $< 120^\circ$. On construit deux triangles équilatéraux ABD et ACE à l'extérieur du triangle ABC. Soit F le point d'intersection* [7] *de (CD) et (BE). Alors F est le point de Fermat du triangle ABC.*

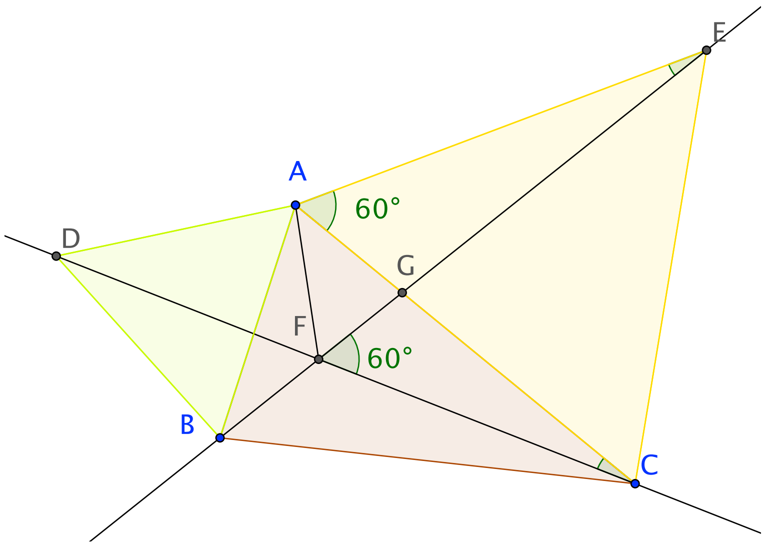

Figure 5 – Construction du point de Fermat

Démonstration. Voir figure 5. Les triangles CAD et EAB sont isométriques [8]. En effet on a $AC = AE$, $AD = AB$ et les angles en A sont tous deux égaux à $\widehat{BAC} + 60^\circ$. On en déduit que les angles en E et C de ces triangles sont égaux. Soit G le point d'intersection de (BE) et AC). Les triangles AGE et FGC sont semblables (outre les angles en E et C, ils ont les angles en G opposés par le sommet). On en déduit d'abord [9] que les angles $\widehat{EAG}$ et $\widehat{CFG}$

6. On a choisi ici une preuve dans l'esprit des programmes de collège 2016, c'est-à-dire avec les triangles isométriques et semblables, mais sans l'angle inscrit.

7. Il est intérieur au triangle parce que $\widehat{A}$ est $< 120^\circ$.

8. Si l'on connaît les rotations, on peut noter qu'on passe de l'un à l'autre par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$.

9. Ici, on peut se contenter d'invoquer la somme des angles de ces triangles.

sont égaux, donc ce dernier angle vaut 60°, ce qui donne $\widehat{BFC} = 120^\circ$. De plus, la similitude des triangles donne $\dfrac{AG}{FG} = \dfrac{GE}{GC}$ donc aussi $\dfrac{GA}{GE} = \dfrac{GF}{GC}$. Avec en plus l'égalité des angles $\widehat{AGF}$ et $\widehat{EGC}$, cela montre que les triangles AGF et EGC sont semblables, de sorte qu'on a [10] $\widehat{AFG} = \widehat{ECG} = 60^\circ$.

On a donc $\widehat{AFC} = \widehat{AFG} + \widehat{GFC} = 120^\circ$ et le troisième angle en F, $\widehat{AFB}$ vaut aussi 120°.

2.2 Le point de Fermat réalise le minimum

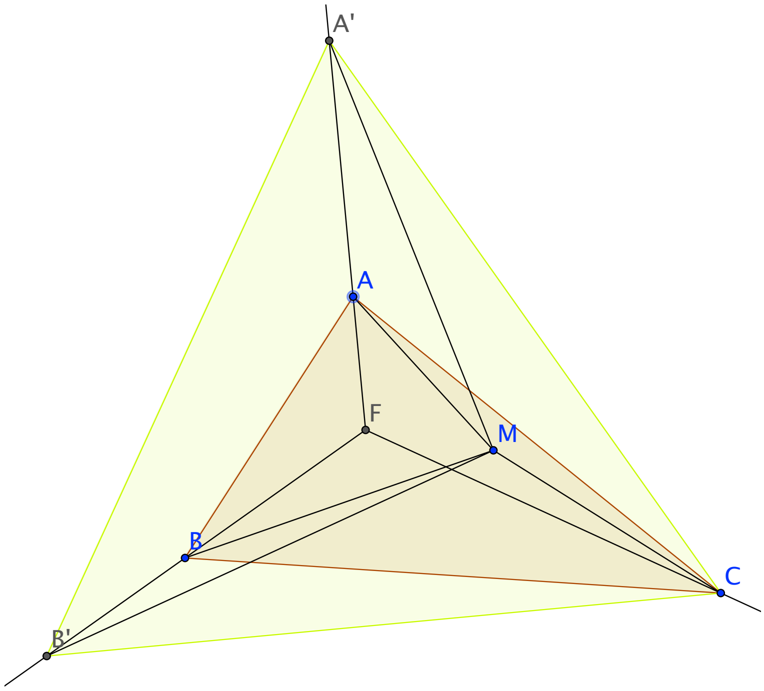

FIGURE 6 – Réduction au cas équilatéral

Soit F le point de Fermat de ABC et montrons qu'on a $MA + MB + MC \geq FA + FB + FC$ pour tout point M du triangle. On se ramène au cas équilatéral. Pour cela on choisit le sommet le plus éloigné de F, disons C, et on prolonge les segments $[FA]$ et $[FB]$ en $[FA']$ et $[FB']$ avec $FA' = FB' = FC$, voir figure 6. Le triangle $A'B'C$ est équilatéral. En effet, $FA'C$, par exemple, est isocèle en F avec un angle de 120°, donc ses angles à la base valent 30°. Il

10. Si l'on dispose du théorème de l'angle inscrit et de sa réciproque, on voit que E, A, F, C sont cocycliques grâce à l'égalité $\widehat{AEF} = \widehat{ACF}$ et on en déduit l'égalité des autres angles à 60°.

en résulte que les angles de $A'B'C$ valent tous 60°. Si M est un point de ABC distinct de F, on a $MA \geq MA' - AA'$ et $MB \geq MB' - BB'$ par l'inégalité triangulaire, donc $MA + MB + MC \geq MA' + MB' + MC - AA' - BB' > FA' + FB' + FC - AA' - BB'$ en vertu du cas équilatéral et on conclut en utilisant $FA = FA' - AA'$ et $FB = FB' - BB'$.

3 Compléments

3.1 Les points extérieurs

La proposition suivante montre qu'on peut se limiter aux points du triangle pour chercher le minimum.

3.1 Proposition. *Soit ABC un triangle. Si M est un point extérieur au triangle, il existe N dans le triangle tel que $NA+NB+NC \leq MA+MB+MC$.*

Démonstration. Il faut distinguer deux cas de figure.

Le point M est dans une bande

On suppose que M est, par exemple, dans la (demi)-bande limitée par le segment $[BC]$ et les demi-droites perpendiculaires à (BC) en B et C, de l'autre côté de A par rapport à (BC), voir figure 6. Soit N le projeté orthogonal de M sur (BC). L'hypothèse assure que N est dans $[BC]$. Alors, on a $NA + NB + NC \leq MA + MB + MC$. En effet, on a $NB \leq MB$ car le triangle MNB est rectangle en N et de même $NC \leq MC$. On a aussi $NA \leq MA$. En effet, dans le triangle MNA, comme A et M sont de part et d'autre de (BC) et que $\widehat{BNM}$ est droit, l'angle en N est obtus. Le côté MA qui fait face à cet angle est donc plus grand que NA par 0.1.

Le point M est dans un coin

On suppose que M est, par exemple, dans le secteur défini par les deux demi-droites d'origine B, perpendiculaires à (BA) et (BC), à l'extérieur du triangle, voir figure 7. Alors, on a $MA + MB + MC \geq BA + BB + BC$. En effet, l'hypothèse montre que le triangle AMB a un angle obtus en B, donc que l'on a $MA \geq BA$, toujours par 0.1. De même, on a $MC \geq BC$ et on en déduit le résultat.

3.2 Corollaire. *Dans le cas d'un triangle dont les angles sont tous $< 120^\circ$, le minimum de la fonction $M \mapsto MA + MB + MC$ pour M variant dans le plan, est atteint au point de Fermat du triangle.*

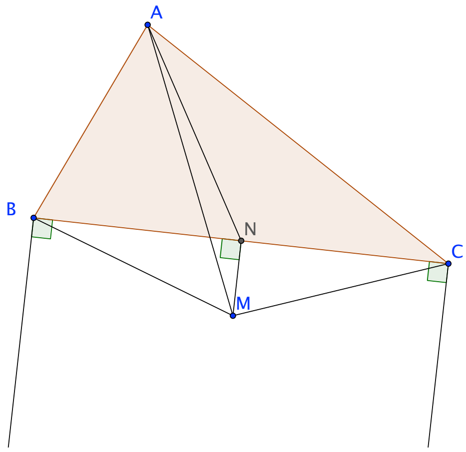

FIGURE 7 – Le cas de la bande

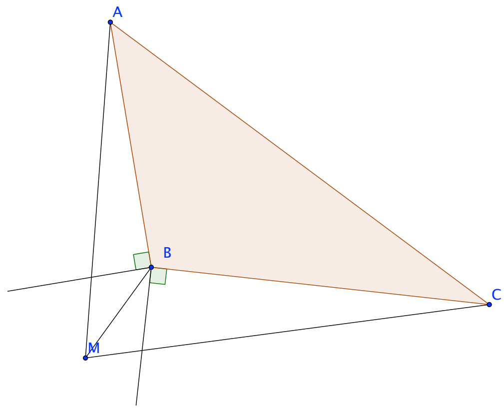

FIGURE 8 – Le cas du coin

3.2 Le cas d'un triangle avec un angle de plus de 120°

Dans ce cas on a le résultat suivant :

3.3 Proposition. *Soit ABC un triangle dont l'angle en A est $\geq 120^{\circ}$. Alors, le minimum de la fonction $MA + MB + MC$ pour M variant dans le plan est atteint au point A.*

Démonstration. On peut se limiter au cas où M est dans le triangle en vertu de 3.1. Si le triangle est isocèle en A, le même raisonnement qu'en 1.2 permet de supposer que M est sur la hauteur $[AH]$. Il s'agit alors de montrer [11] qu'on a $AB < BM + \frac{1}{2}AM$. On pose $\alpha = \widehat{BAM}$ et $\beta = \widehat{ABM}$ avec $\alpha > 60^{\circ}$. On a la relation des sinus dans ABM :

$$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AM}{\sin\beta} = \frac{BM}{\sin\alpha}.$$

La relation à prouver se ramène à $2\sin(\alpha+\beta) \leq 2\sin\alpha + \sin\beta$, soit encore $2\sin\alpha\cos\beta + 2\sin\beta\cos\alpha \leq 2\sin\alpha + \sin\beta$. Mais comme on a $\alpha > 60^{\circ}$ donc $\cos\alpha < 1/2$, on a le résultat.

On se ramène ensuite au cas isocèle en prolongeant le plus petit des côtés AB et AC, disons AC, en AC', voir figure 9. En vertu du cas isocèle, on a $MA + MB + MC' \geq AB + AC' = AB + AC + CC'$. Si l'on ajoute MC aux deux membres on a $MA + MB + MC + MC' \geq AB + AC + CC' + MC \geq AB + AC + MC'$, la dernière inégalité provenant de l'inégalité triangulaire et on a le résultat.

11. Une première version de ce résultat était radicalement fausse. Merci à Akil Zaimi de nous avoir signalé cette erreur.

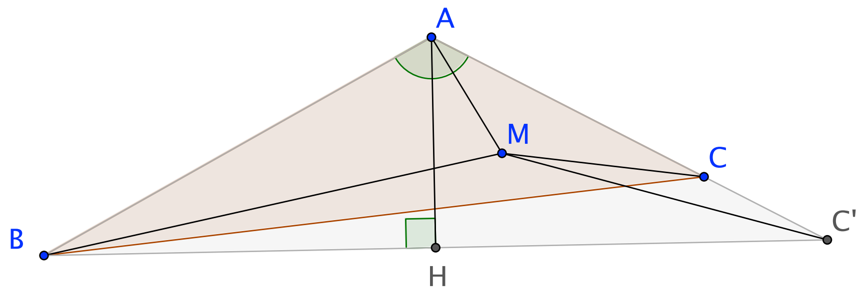

FIGURE 9 – Le cas d'un grand angle

Références

[1] Berger Marcel, *Géométrie*, Nathan, 1990.