

Dans tout ce qui suit on désigne par k un corps commutatif de caractéristique différente de 2 (par exemple \mathbf{R} ou \mathbf{C}) et par E un k -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. On appelle $L(E)$ l'anneau des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe (multiplicatif) des automorphismes de E . On note Id_E l'identité de E et I la matrice identité $n \times n$. On note simplement fg au lieu de $f \circ g$ le composé de deux endomorphismes f et g .

I. SYMÉTRIES

1. Symétries.

On suppose que E est somme directe de deux sous-espaces vectoriels : $E = F \oplus G$. Un élément x de E , s'écrit alors de manière unique sous la forme $x = y + z$, avec $y \in F$, $z \in G$. Avec ces notations on considère l'application $\sigma = \sigma_{F,G}$ de E dans E définie pour tout $x \in E$ par $\sigma(x) = y - z$. Si G n'est pas nul on dit que σ est la **symétrie vectorielle** par rapport à F , parallèlement à G .

a) Montrer que σ est un endomorphisme de E qui vérifie $\sigma^2 = \text{Id}_E$. Étudier les cas $F = \{0\}$, $G = \{0\}$. Donner au moins quatre bonnes raisons qui montrent que σ est dans $GL(E)$ (i.e., est bijectif).

b) Montrer que l'on a :

$$F = \{x \in E \mid \sigma(x) = x\}, \quad G = \{x \in E \mid \sigma(x) = -x\}.$$

c) Reformuler le résultat de b) en termes des valeurs propres de σ et des sous-espaces propres correspondants. L'endomorphisme σ est-il diagonalisable ? Écrire une matrice de σ dans une base convenablement choisie. Calculer la trace de σ . Soit σ une symétrie donnée, dans une base quelconque, par une matrice A . Donner une méthode pour trouver facilement les dimensions de F et G .

d) Quels sont les points de E fixes par σ ? Montrer qu'un sous-espace L de E est stable par σ (i.e., vérifie $\sigma(L) \subset L$ ou, ce qui revient au même, $\sigma(L) = L$) si et seulement si on a

$$L = (L \cap F) \oplus (L \cap G).$$

On suppose que σ est une symétrie hyperplane c'est-à-dire que F est un hyperplan de E (donc G une droite). Montrer que le sous-espace L est stable si et seulement si L est contenu dans F ou contient G .

2. Involutions.

Cette partie établit une réciproque de 1.a. Soit σ un endomorphisme de E qui est une involution, i.e., qui vérifie $\sigma^2 = \text{Id}_E$ et $\sigma \neq \text{Id}_E$.

a) Montrer que l'on a $\sigma \in GL(E)$.

b) Quelles sont les valeurs propres possibles pour σ ? Décrire les sous-espaces propres correspondants.

c) Montrer que σ est diagonalisable et que σ est une symétrie vectorielle que l'on précisera.

3. Conjugaison, commutation.

Soit $g \in GL(E)$ et soit σ une symétrie vectorielle.

a) Montrer que $g\sigma g^{-1}$ est une involution (donc une symétrie) et préciser ses sous-espaces propres.

b) À quelle condition g et σ commutent-elles ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux symétries hyperplanes commutent.

4. Exemples.

On suppose E de dimension 3 muni d'une base i, j, k .

a) Soient u_1 et u_2 les endomorphismes dont les matrices dans la base donnée sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -5 & 2 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 4 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u_i est-il une symétrie ? Si oui on précisera ses invariants.

b) Donner plusieurs exemples de symétries admettant $i + j + k$ comme point fixe.

II. HOMOTHÉTIES

L'homothétie de rapport $\lambda \in k$ est l'endomorphisme défini par $h_\lambda(x) = \lambda x$.

1. Homothéties et droites invariantes.

a) Soit $u \in L(E)$. On suppose que u laisse invariantes toutes les droites vectorielles de E . Montrer que u est une homothétie.

¶ b) On suppose que u laisse invariants tous les sous-espaces vectoriels de dimension d fixée avec $1 \leq d \leq n - 1$. Montrer que u est une homothétie.

2. Centre de $GL(E)$.

Soit Z le centre de $GL(E)$ (i.e., l'ensemble des $g \in GL(E)$ qui vérifient $ug = gu$ pour tout $u \in GL(E)$). Montrer que Z est le groupe des homothéties de rapport non nul. (On utilisera I 3.b et II 1.a).

III. PROJECTEURS

On suppose que E est décomposé en somme directe de deux sous-espaces vectoriels non nuls : $E = F \oplus G$. On appelle **projection** de E sur F parallèlement à G l'endomorphisme

$p_{F,G}$ de E qui à un élément x de E , écrit (de manière unique) sous la forme $x = y + z$, avec $y \in F$, $z \in G$ associe l'élément y . Que se passe-t-il si F ou G est nul ?

On appelle **projecteur** un endomorphisme de E qui vérifie $p^2 = p$.

1. Projections.

Soit $p = p_{F,G}$ la projection de E sur F parallèlement à G .

a) Montrer que p est un endomorphisme. Déterminer le noyau $\text{Ker } p$ et l'image $\text{Im } p$. Montrer que p est un projecteur.

b) Reformuler le résultat de a) en termes des valeurs propres de p et des sous-espaces propres correspondants. L'endomorphisme p est-il diagonalisable ? Écrire une matrice de p dans une base convenablement choisie.

c) Calculer la trace de p . Indiquer comment on peut trouver le rang d'un projecteur dont on connaît la matrice dans une base quelconque.

d) Soit q la projection de E sur G parallèlement à F . Montrer qu'on a : $p + q = \text{Id}_E$ et $pq = qp = 0$.

2. Projecteurs.

a) Réciproquement, soit p un projecteur. Montrer que l'on a $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$. Déterminer les restrictions de p à $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$. Montrer que p est une projection que l'on précisera.

b) Soit $p \in L(E)$. Montrer que p est un projecteur si et seulement si pour tout $x \in E$ on a $x - p(x) \in \text{Ker } p$.

c) Soit $p \in L(E)$. Montrer que $2p - \text{Id}_E$ est une symétrie si et seulement si p est un projecteur.

3. Conjugaison, commutation.

Soit $p = p_{F,G}$ un projecteur et soit $g \in GL(E)$.

a) Montrer que gpg^{-1} est un projecteur que l'on précisera.

b) À quelle condition g et p commutent-ils ? Étudier le cas particulier où g est une symétrie hyperplane.

4. Somme de projecteurs.

a) Soient p et q deux projecteurs. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si on a $pq = qp = 0$.

¶ b) Soient p_1, \dots, p_r des projecteurs. Montrer que $p_1 + \dots + p_r$ est un projecteur si et seulement si on a pour tous i, j avec $i \neq j$, $p_i p_j = 0$. (Indication : on montrera l'égalité $\text{Im}(p_1 + \dots + p_r) = \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_r = \text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_r$ en utilisant les traces.)

5. Exemples.

On suppose E de dimension 3 et muni d'une base i, j, k .

Soient u_1, u_2, u_3 les endomorphismes dont les matrices dans la base donnée sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -7 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -5 & 2 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 4 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u_i est-il un projecteur ? Si oui, on précisera son rang et ses invariants.

CORRIGÉ

I. SYMÉTRIES

1) a) Dire que σ est un endomorphisme signifie que σ est linéaire. Ce type d'assertion est toujours trivial (ou faux). Écrivons la démonstration en détail cette fois-ci, le lecteur s'en chargera par la suite. Soient $x_1, x_2 \in E$, $\lambda_1, \lambda_2 \in k$. Il s'agit de montrer la formule :

$$\sigma(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \sigma(x_1) + \lambda_2 \sigma(x_2).$$

On décompose $x_i = y_i + z_i$ ($i = 1, 2$) avec $y_i \in F$ et $z_i \in G$. On a alors $\sigma(x_i) = y_i - z_i$. D'autre part, on a $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$ et ceci est la décomposition de $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ selon F et G (car cette décomposition est unique). On a alors $\sigma(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 \sigma(x_1) + \lambda_2 \sigma(x_2)$, cqfd.

Soit $x \in E$, décomposé selon F et G en $x = y + z$. On calcule $\sigma(x) = y - z$. Comme y et $-z$ sont dans F et G , ceci est la décomposition de $\sigma(x)$, de sorte que $\sigma^2(x) = y + z = x$. On a donc bien $\sigma^2 = \text{Id}_E$.

Si $G = \{0\}$ la décomposition de x est triviale : $x = x + 0$ et on a $\sigma(x) = x : \sigma = \text{Id}_E$. De même si $F = \{0\}$, on a $\sigma(x) = -x$ pour tout $x : \sigma = -\text{Id}_E$ est l'homothétie vectorielle de rapport -1 ou encore la symétrie centrale de centre 0 .

Il y a de nombreuses méthodes pour montrer qu'un endomorphisme est bijectif.

i) Comme on est en dimension finie il suffit qu'il soit injectif, donc que son noyau soit nul. Ici, c'est facile, si $\sigma(x) = y - z = 0$, vu l'unicité de la décomposition, cela implique $y = z = 0$, donc $x = 0$.

ii) On peut aussi montrer que σ est surjectif (donc bijectif) : $x = y + z$ est l'image de $y - z$.

iii) En fait, dans le cas présent le plus simple est de constater qu'on connaît l'inverse de σ : vu la relation $\sigma^2 = \text{Id}_E$, c'est σ lui-même (σ est involutive).

iv) Enfin une variante de cette démonstration consiste à calculer le déterminant : $\det(\sigma^2) = \det(\text{Id}_E) = 1 = \det(\sigma)^2$, donc $\det(\sigma) = \pm 1$ est non nul et σ est inversible.

b) Si $x \in F$ sa décomposition est $x = x + 0$ et on a $\sigma(x) = x$. Réciproquement, si $x = y + z$ vérifie $\sigma(x) = y - z = x$, c'est qu'on a $z = -z$ donc $z = 0$ (*) et donc $x \in F$. La démonstration est identique pour G .

c) La question précédente montre que F et G sont les sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres 1 et -1 de σ . (En toute rigueur pour que 1 et -1 soient vraiment valeurs propres il faut que F et G soient non nuls). Comme $E = F \oplus G$ cela montre que σ est diagonalisable et que ses seules valeurs propres sont 1 et -1 . (C'est un résultat général, facile à vérifier ici : si $\lambda \neq \pm 1$ était valeur propre on aurait $x = y + z \neq 0$ avec $\sigma(x) = y - z = \lambda x = \lambda y + \lambda z$ et, vu l'unicité de la décomposition, on aurait $y = \lambda y$,

(*) car la caractéristique du corps est différente de 2

$z = -\lambda z$ donc $y = z = 0$, contradiction). Alors, on obtient une base de vecteurs propres en réunissant une base e_1, \dots, e_p de F et une base e_{p+1}, \dots, e_n de G . Dans cette base la matrice de σ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & \end{pmatrix}.$$

On note que la trace de cette matrice est égale à la différence $\dim F - \dim G$. Comme la trace ne dépend pas de la base, cette différence est immédiatement connue dès qu'on a la matrice de σ dans n'importe quelle base. Comme on a par ailleurs $\dim F + \dim G = \dim E$, on en déduit les valeurs des dimensions de F et G .

Commentaire : L'intérêt de l'usage de la trace en algèbre linéaire est triple (cf. ci-dessous III 4.b) :

- elle est très facile à calculer,
- elle est linéaire : $\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)$,
- elle est invariante par changement de base.

d) Les points fixes de σ sont les $x \in E$ tels que $\sigma(x) = x$: ce sont les points de F . Soit L un sous-espace de E . Montrons l'équivalence :

$$(1) \quad L \text{ stable} \iff L = (L \cap F) \oplus (L \cap G).$$

Attention, ce genre de formule, en dépit de son apparence sympathique n'est pas vraie en général, par exemple, si $E = \mathbf{R}^2$ est muni de la base e_1, e_2 , il s'écrit $E = F \oplus G$ avec $F = \mathbf{R}e_1$ et $G = \mathbf{R}e_2$, mais si $L = \mathbf{R}(e_1 + e_2)$ la formule ci-dessus est fautive car $L \cap F = L \cap G = \{0\}$.

Le sens \Leftarrow est facile : si $x \in L$ il s'écrit $x = y + z$ avec $y \in L \cap F$ et $z \in L \cap G$ et on a $\sigma(x) = y - z \in L$, donc L est stable. Réciproquement, supposons L stable et montrons qu'on a la somme directe. Il est clair que les deux sous-espaces ont une intersection nulle. Soit $x \in L$. On peut l'écrire, comme tout vecteur de E , $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Ce qui n'est pas évident c'est que y et z sont dans L . On applique σ , on obtient $\sigma(x) = y - z \in L$. Mais alors, on a

$$y = \frac{x + \sigma(x)}{2} \in L \quad \text{et} \quad z = \frac{x - \sigma(x)}{2} \in L.$$

Si F est de dimension $n - 1$ et G de dimension 1 et si L est stable par σ on regarde $L \cap G$. Comme G est de dimension 1, on a $L \cap G = G$ ou $\{0\}$. Si $L \cap G = G$ c'est que L contient G . Si $L \cap G = \{0\}$ on a $L = L \cap F$ donc L est contenu dans F . Réciproquement, si L est

contenu dans F ou contient G on vérifie facilement que L est somme directe de ses traces sur F et G .

2) a) On a déjà répondu à cette question : comme $\sigma^2 = \text{Id}_E$, σ est son propre inverse.

b) Si λ est une valeur propre de σ il existe un vecteur x **non nul** tel que $\sigma(x) = \lambda x$. Appliquons σ à cette relation on a $\sigma^2(x) = x = \lambda\sigma(x) = \lambda^2 x$. Comme $x \neq 0$ on en déduit $\lambda^2 = 1$, donc les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 . Les sous-espaces propres associés sont

$$F = \{x \in E \mid \sigma(x) = x\}, \quad G = \{x \in E \mid \sigma(x) = -x\}.$$

c) Dire que σ est diagonalisable c'est dire que E est somme directe des sous-espaces propres F et G . On a déjà $F \cap G = \{0\}$. (C'est un fait général pour des sous-espaces propres que l'on vérifie aussitôt ici : si $x \in F \cap G$ on a $\sigma(x) = x = -x$ donc $x = 0$.) Il reste à voir que E est somme de F et G , donc que tout x de E s'écrit $y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Analysons ce que doivent être alors y et z en appliquant σ : on a $\sigma(x) = \sigma(y) + \sigma(z) = y - z$. On en déduit en résolvant le système de deux équations ainsi obtenues :

$$y = \frac{x + \sigma(x)}{2} \quad z = \frac{x - \sigma(x)}{2}$$

(c'est le même calcul qu'en 1.d ci-dessus) et on vérifie, inversement que si on définit y et z ainsi on a bien $x = y + z$, $\sigma(y) = y$, $\sigma(z) = -z$. L'endomorphisme σ est donc diagonalisable et vu la formule qui donne $\sigma(x)$ ci-dessus c'est la symétrie vectorielle par rapport à F , parallèlement à G .

Remarque 1. Quelques commentaires sur ce qui précède. D'abord, pour étudier un endomorphisme u , la méthode standard est, comme ici, de chercher à le diagonaliser (si possible, et sinon à le trianguler). En effet, il aura alors, dans une base bien choisie une matrice très simple avec laquelle les calculs seront faciles, par exemple l'élévation à la puissance n, \dots . Lorsque u est donné par une matrice explicite on sait comment mener ce genre de calcul. L'exemple ci-dessus est un peu différent : l'unique hypothèse est que u vérifie une équation polynômiale $P(u) = 0$ (ici $P(X) = X^2 - 1$). Cette seule condition fournit déjà les valeurs propres : elles sont (parmi) les racines de P (même calcul que ci-dessus). De plus on a le théorème suivant, utile à connaître, même s'il n'est pas au programme du CAPES :

Théorème 2. Soit u un endomorphisme. On suppose qu'on a $P(u) = 0$ où $P(X)$ est un polynôme simplement scindé (i.e., P s'écrit : $P(X) = (X - x_1) \cdots (X - x_r)$ avec les x_i distincts). Alors u est diagonalisable.

Ce qui précède prouve ce théorème dans le cas $P(X) = X^2 - 1$.

3) Cette question, que nous retrouverons souvent est une application de ce que nous appellerons le **Principe de conjugaison**. Soit G un groupe de transformations d'un ensemble X et soient σ et g des éléments de G . Le **conjugué** de σ par g est l'élément

$g\sigma g^{-1}$ de G . Le principe de conjugaison, essentiel dans de nombreuses questions, dit les choses suivantes :

- 1) $g\sigma g^{-1}$ est un élément “de même nature” que σ ,
- 2) les éléments caractéristiques de $g\sigma g^{-1}$ s’obtiennent à partir de ceux de σ en les “transportant par g ”.

Cette formulation est évidemment un peu vague (c’est pourquoi nous parlons d’un principe et non d’un théorème) mais elle permet, dans toutes les situations particulières, de trouver un énoncé précis qu’il reste alors à **démontrer** dans chaque cas.

Pour illustrer ce principe, voyons ce qu’il dit dans le cas des symétries : si σ est la symétrie vectorielle par rapport à F , parallèlement à G ,

- 1) $g\sigma g^{-1}$ est de même nature : c’est une symétrie vectorielle,
- 2) ses éléments caractéristiques sont transportés par g : $g\sigma g^{-1}$ est la symétrie par rapport à $g(F)$, parallèlement à $g(G)$.

Montrons ce qui précède : on montre d’abord que $g\sigma g^{-1}$ est une involution (elle sera donc une symétrie par 2.c). En effet, on a $(g\sigma g^{-1})(g\sigma g^{-1}) = g\sigma^2 g^{-1} = \text{Id}_E$. On cherche ensuite les sous-espaces propres de $g\sigma g^{-1}$ pour les valeurs propres 1 et -1 . Soit $x \in E$. On a $g\sigma g^{-1}(x) = x \iff \sigma g^{-1}(x) = g^{-1}(x) \iff g^{-1}(x) \in F \iff x \in g(F)$. Le même raisonnement s’applique avec la valeur propre -1 ce qui prouve l’assertion annoncée.

Le lecteur vérifiera plus généralement de la même manière :

Proposition 3. Soit G un groupe dont l’élément neutre est noté 1 et soient $\sigma, g \in G$.

- 1) On suppose $g^n = 1$. Alors on a $(g\sigma g^{-1})^n = 1$.
- 2) Si G est un groupe de transformations de X et si A est l’ensemble des points fixes de σ

$$A = \{x \in X \mid \sigma(x) = x\}$$

l’ensemble des points fixes de $g\sigma g^{-1}$ est $g(A)$.

b) La remarque fondamentale, que nous reverrons souvent, c’est que les propriétés de commutation s’expriment de manière très commode en termes de conjugaison. En effet, dire que g et σ commutent signifie qu’on a $g\sigma = \sigma g$ ou encore, en composant par g^{-1} , $g\sigma g^{-1} = \sigma$. Comme on a décrit ci-dessus le conjugué $g\sigma g^{-1}$ comme la symétrie correspondant à $g(F)$ et $g(G)$, on voit que g et σ commutent si et seulement si on a $g(F) = F$ et $g(G) = G$, autrement dit si F et G sont stables par g .

Supposons maintenant que σ et g soient deux symétries hyperplanes par rapport à F, G (resp. F', G'). Dire qu’elles commutent signifie que F et G sont stables par g et on a vu en 1.d que cela signifie, pour F (resp. pour G) qu’il est contenu dans F' ou contient G' . Pour des raisons de dimension il ne reste que deux possibilités :

- soit $F = F'$ et $G = G'$, c’est-à-dire $\sigma = g$,
- soit $G' \subset F$ et $G \subset F'$ (la droite de chacune des symétries est contenue dans l’hyperplan de l’autre).

4) a) La trace de A_1 n’est pas un entier donc A_1 n’est pas la matrice d’une symétrie (cf. 1.c). En revanche, pour A_2 la trace vaut 1 donc il est possible que u_2 soit une symétrie. Pour le voir on calcule le carré de la matrice A_2 et on trouve I de sorte que u_2 est une

involutions, donc une symétrie. Il reste à calculer les sous-espaces propres : on trouve pour F le plan $x + y + z = 0$ et pour G la droite engendrée par $(1, 1, 1)$. On notera que comme la trace vaut 1 on sait sans calcul qu'on a $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$.

b) On obtient une symétrie d'espace de points fixes $F = \mathbf{R}(i + j + k)$ en choisissant un supplémentaire G de F . Il y a une infinité de solutions distinctes, par exemple G engendré par i, j , ou j, k , ou $i - j, j + k$, etc ...

II. HOMOTHÉTIES

1) a) L'hypothèse signifie que pour toute droite D de E on a $u(D) = D$. En prenant un vecteur x non nul sur D cela se traduit ainsi :

$$(1) \quad \forall x \in E, \quad \exists \lambda \in k, \quad u(x) = \lambda x,$$

tandis que la conclusion signifie :

$$(2) \quad \exists \lambda \in k, \quad \forall x \in E, \quad u(x) = \lambda x.$$

Attention, il y a interversion des quantificateurs et les formules ne sont pas équivalentes, on a $(2) \Rightarrow (1)$, mais pas, a priori, l'inverse : on sait qu'on a pour chaque x un λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$, mais il semble dépendre de x et il faut voir que $\lambda_x = \lambda_y$ pour tous $x, y \in E$.

On note déjà que si x et y sont colinéaires et non nuls c'est facile : si on a $y = \mu x$ avec $\mu \neq 0$, on a par hypothèse $u(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$, mais aussi, par linéarité, $u(y) = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x$, d'où $\mu \lambda_x = \lambda_y \mu$ et $\lambda_x = \lambda_y$.

Supposons donc maintenant x et y indépendants. L'idée consiste à utiliser, outre les relations $u(x) = \lambda_x x$ et $u(y) = \lambda_y y$ la relation analogue avec $x + y$: $u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ puis la linéarité de u qui donne $\lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$ et comme x et y sont linéairement indépendants, on en déduit $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

b) On raisonne par récurrence sur d , le cas $d = 1$ ayant été vu en a). Supposons l'assertion prouvée pour d et passons à $d + 1$ avec $d + 1 \leq n + 1$. Il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 4. *Si $d \leq n - 2$, tout sous-espace F de dimension d de E est intersection de deux sous-espaces F_1, F_2 de dimension $d + 1$.*

Si on a ce lemme et si F est de dimension d on l'écrit $F = F_1 \cap F_2$ avec F_i de dimension $d + 1$, donc, par hypothèse, stable par u : $u(F_i) = F_i$. On en déduit $u(F) = F$ et comme ceci vaut pour tout sous-espace de dimension d on conclut par l'hypothèse de récurrence.

Pour montrer le lemme on prend une base e_1, \dots, e_d de F qu'on complète en une base de E en adjoignant $e_{d+1}, e_{d+2}, \dots, e_n$. Il suffit alors de prendre pour F_1 (resp. F_2) le sous-espace engendré par e_1, \dots, e_d, e_{d+1} (resp. e_1, \dots, e_d, e_{d+2}).

2) Il est clair que les homothéties commutent avec tous les éléments de $GL(E)$ et même de $L(E)$. En effet la relation $uh_\lambda = h_\lambda u$ se traduit en $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ et c'est la linéarité de u . Réciproquement, soit $g \in Z$. On sait que g commute avec tous les éléments de $GL(E)$, en particulier avec les symétries, et, plus particulièrement encore avec les symétries $\sigma_{D,H}$ où D est une droite vectorielle quelconque et H un hyperplan supplémentaire. Il résulte alors de I 3.b que l'on a $g(D) = D$, et ceci vaut pour toute droite D de E . Mais alors, par 1.a ci-dessus, g est une homothétie. Comme on suppose $g \in GL(E)$ elle est bien entendu de rapport $\neq 0$.

III. PROJECTEURS

Notons que si $F = \{0\}$ (resp. $G = \{0\}$) on a $p = 0$ (resp. $p = \text{Id}_E$). On écartera ces cas dans la suite.

1) a) On voit facilement que p est un endomorphisme (cf. I 1). Le noyau de p est formé des $x = y + z$ tels que $y = 0$, c'est donc G . L'image de p est F : il est clair qu'on a $\text{Im } p \subset F$ et réciproquement, si $y \in F$, on a $y = y + 0$ donc $p(y) = y$. Ceci montre aussitôt que p est un projecteur : si $x = y + z$ on a $p(x) = y$ et $p^2(x) = p(y) = y = p(x)$ car $y \in F$.

b) Le noyau G de p est le sous-espace propre relatif à la valeur propre 0, et, dans le cas présent on a vu que x est dans l'image de p si (et seulement si) on a $p(x) = x$, de sorte que F est le sous-espace propre relatif à 1. Comme $E = F \oplus G$, il s'ensuit que p est diagonalisable et que 0 et 1 sont ses seules valeurs propres. Dans une base obtenue en réunissant une base e_1, \dots, e_p de F et une base e_{p+1}, \dots, e_n de G la matrice de p est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Comme la trace de p ne dépend pas du choix de la base on peut la calculer avec la matrice ci-dessus et on trouve $\text{Tr}(p) = \dim F = \text{rang}(p)$. Cela donne un moyen rapide pour calculer le rang d'un endomorphisme dont on sait que c'est un projecteur.

d) Si $x = y + z$ on a $q(x) = z$, donc $(p + q)(x) = y + z = x$ et $p + q = \text{Id}_E$. De plus, on a aussi, clairement, $pq = qp = O$.

2) a) **Attention** pour un endomorphisme u quelconque on n'a pas en général $E =$

$\text{Ker } u \oplus \text{Im } u$. Ce qui est toujours vrai c'est la relation sur les dimensions :

$$(3) \quad \dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u$$

mais si on prend pour u l'endomorphisme de \mathbf{R}^2 dont la matrice dans la base e_1, e_2 est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $\text{Ker } u = \text{Im } u = \mathbf{R}e_1$ donc $\text{Ker } u \cap \text{Im } u \neq \{0\}$.

Dans le cas d'un projecteur, montrons d'abord la relation $\text{Ker } p \cap \text{Im } p = \{0\}$. Si x est dans l'intersection on a $x = p(x')$ et $p(x) = 0$. Comme $p^2 = p$ on en déduit $p(x) = 0 = p^2(x') = p(x') = x$, cqfd. La relation $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ résulte alors de la relation (3) ci-dessus et de la formule :

$$\dim(\text{Ker } p + \text{Im } p) + \dim(\text{Ker } p \cap \text{Im } p) = \dim \text{Ker } p + \dim \text{Im } p.$$

La restriction de p à $\text{Ker } p$ est évidemment nulle. Si $x \in \text{Im } p$, le calcul fait ci-dessus montre que $p(x) = x$. On en déduit que si $x = y + z$ avec $y \in \text{Im } p$ et $z \in \text{Ker } p$ on a $p(x) = y$, de sorte que p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

b) Dire que, pour tout x , $x - p(x)$ est dans le noyau de p signifie exactement qu'on a $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$ pour tout x , donc que p est un projecteur. On notera que l'on retrouve ainsi le fait que $E = \text{Im } p + \text{Ker } p$ en écrivant $x = p(x) + x - p(x)$.

c) On calcule $(2p - \text{Id}_E)^2 = 4p^2 - 4p + \text{Id}_E$. Dire que $2p - \text{Id}_E$ est une symétrie signifie que ce carré est l'identité, donc qu'on a $4p^2 = 4p$ donc $p^2 = p$ car la caractéristique de k est différente de 2.

3) a) C'est une nouvelle application du principe de conjugaison (même si ici on est dans un anneau et non dans un groupe). Le principe nous prédit que gpg^{-1} est de même nature que p , donc un projecteur et que ses éléments caractéristiques sont transportés par g donc que gpg^{-1} est la projection sur $g(F)$ parallèlement à $g(G)$. Bien entendu il faut démontrer ces assertions :

- i) gpg^{-1} est un projecteur car $(gpg^{-1})^2 = (gpg^{-1})(gpg^{-1}) = gp^2g^{-1} = gpg^{-1}$,
- ii) ses éléments caractéristiques, à savoir son noyau et son image sont respectivement $g(F)$ et $g(G)$: cela résulte du lemme suivant qui est une des formes précises que prend le "principe de conjugaison" :

Lemme 5. Soient $u \in L(E)$ et $g \in GL(E)$. On a :

$$\text{Ker } (gug^{-1}) = g(\text{Ker } u), \quad \text{Im } (gug^{-1}) = g(\text{Im } u).$$

Démonstration. Comme g est bijectif on a les équivalences :

i) $x \in \text{Ker}(gug^{-1}) \iff gug^{-1}(x) = 0 \iff ug^{-1}(x) = 0 \iff g^{-1}(x) \in \text{Ker } u \iff x \in g(\text{Ker } u)$.

ii) $x \in \text{Im}(gug^{-1}) \iff \exists y, x = gug^{-1}(y) \iff \exists y, g^{-1}(x) = ug^{-1}(y) \iff g^{-1}(x) \in \text{Im } u \iff x \in g(\text{Im } u)$.

b) On traduit la commutation en termes de conjugaison : $pg = gp \iff p = gpg^{-1}$. Comme p est le projecteur relatif à F et G et gpg^{-1} celui relatif à $g(F)$ et $g(G)$, p et g commutent si et seulement si on a $g(F) = F$ et $g(G) = G$.

Si g est la symétrie par rapport à l'hyperplan H parallèlement à la droite D , on a vu en I 1.d que cela signifie que F (resp. G) est contenu dans H ou contient D . Comme $F + G = E$, F et G ne sont pas tous deux contenus dans H . Comme $F \cap G = \{0\}$, F et G ne contiennent pas tous deux D . En résumé, p et g commutent dans deux cas :

$$(F \subset H \text{ et } G \supset D), \quad \text{ou} \quad (G \subset H \text{ et } F \supset D).$$

4) a) Calculons $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + pq + qp = p + q + pq + qp$ car p et q sont des projecteurs. (Attention, les endomorphismes p et q ne commutent pas en général.) On voit que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq + qp = 0$. Il est clair que si $pq = qp = 0$ $p + q$ est un projecteur. La réciproque est un peu plus délicate : on part de la relation $pq = -qp$ et du fait que p et q sont des projecteurs et on veut montrer $pq = qp = 0$. Il suffit bien sûr de montrer $pq = qp$. On n'a pas beaucoup de solutions : on essaie de mettre ensemble les hypothèses et on regarde ce que l'on obtient. On peut ainsi multiplier à gauche et à droite par p la relation $pq = -qp$. On obtient $pq = -pqp$ et $pqp = -qp$ d'où $-pqp = pq = qp$ donc $pq = qp = 0$.

b) On calcule le carré de $p_1 + \dots + p_r$ en tenant compte de $p_i^2 = p_i$:

$$(p_1 + \dots + p_r)^2 = p_1 + \dots + p_r + \sum_{i \neq j} p_i p_j.$$

Si on a $p_i p_j = 0$ pour $i \neq j$ il est clair que $p_1 + \dots + p_r$ est un projecteur.

Réciproquement, supposons que $p = p_1 + \dots + p_r$ soit un projecteur. Ce qui suit est une bonne illustration de l'utilisation de la trace (rappelons que pour un projecteur p on a $\text{rang}(p) = \text{Tr}(p)$).

Selon l'indication fournie, on cherche à comparer

$$I = \text{Im}(p_1 + \dots + p_r) \quad \text{et} \quad S = \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_r.$$

Il y a une inclusion triviale : si $x \in E$ on a $(p_1 + \dots + p_r)(x) = p_1(x) + \dots + p_r(x)$ donc $I \subset S$. D'autre part on sait que $\dim S \leq \sum_{i=1}^r \dim(\text{Im } p_i) = \sum_{i=1}^r \text{Tr}(p_i)$. Mais, comme p est un projecteur on a aussi $\dim I = \text{Tr}(p) = \sum_{i=1}^r \text{Tr}(p_i)$ puisque la trace est linéaire, donc $\dim S \leq \dim I$. On en déduit d'abord l'égalité $I = S$, mais, mieux, comme $\dim S$ est la somme des dimensions des $\text{Im } p_i$ c'est que la somme est **directe** et on a donc :

$$\text{Im}(p_1 + \dots + p_r) = \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_r = \text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_r.$$

Pour conclure montrons que si $i \neq j$ on a $p_i p_j(x) = 0$.

On calcule $y = (p_1 + \cdots + p_r)p_j(x) = p p_j(x)$. Comme $\text{Im } p_j \subset \text{Im } p$ et que p est un projecteur on a $y = p_j(x)$. En développant on trouve :

$$\sum_{i \neq j} p_i p_j(x) = 0.$$

Mais, comme les sous-espaces $\text{Im } p_i$ sont en somme directe ceci implique $p_i p_j(x) = 0$ pour tout i , cqfd.

5) La trace des matrices A_1 et A_3 n'étant pas un entier > 0 les endomorphismes correspondants ne peuvent être des projecteurs. En revanche on a $\text{Tr}(A_2) = 2$. On vérifie qu'on a $(A_2)^2 = A_2$ de sorte que u_2 est bien un projecteur. Son rang est la trace de A_2 , donc 2. En résolvant le système linéaire $A_2 x = 0$ on trouve que le noyau de u_2 est $\mathbf{R}(-2/3, -4/5, 1)$. D'autre part on voit sur la matrice que l'image de u_2 a pour base les vecteurs $(3, 4, -5)$ et $(1, 2, -3)$.