Réflexions pour le centenaire de l'APMEP

Daniel Perrin

1 Deux mille ans de mathématiques, cent ans pour l'APM, mais bientôt la fin ?

C'est en tous cas ce qu'affirme Claude Allègre :

Va-t-on continuer à recourir aux mathématiques pour calculer ? Depuis l'apparition des calculettes, on n'enseigne plus à extraire une racine carrée, ni à se servir d'une table de logarithmes. Continuera-t-on demain à enseigner les subtilités de la construction des courbes ou le calcul d'intégrales compliquées ? L'ordinateur va nous conduire à reconsidérer les mathématiques comme un auxiliaire des sciences.

Je n'ai pas cité Claude Allègre dans le seul but de le faire huer par une assemblée de mathématiciens, ce qui est facile, mais parce que la question qu'il pose, celle du rapport des mathématiques et des autres sciences, est essentielle. Pour l'aborder, je vais d'abord interroger l'histoire.

1.1 Consolidation et développement

L'histoire montre que les mathématiques ont toujours présenté une alternance de phases d'explosion et de consolidation, dans lesquelles leur place n'a pas été immuable.

1.1.1 L'Antiquité

On connaît mal les mathématiques avant les Grecs. Il est clair qu'il y a une phase d'expansion, avec des techniques qui se développent et des résultats qui foisonnent dans toutes les directions, par exemple les théorèmes de Thalès et Pythagore en géométrie, ou la résolution de l'équation du second degré des Babyloniens, etc.

Avec Euclide, on assiste à une mise en ordre admirable, avec une précision digne des canons actuels. Mais une grande part des Eléments est inaccessible au public, même instruit (par exemple, la théorie des proportions, la méthode d'exhaustion). D'ailleurs, Platon revendique cet ésotérisme à propos des proportions, se moquant de *ceux qui divisent l'unité pour de la menue monnaie* et il ajoute : *les calculateurs divisent, les savants multiplient*.

1.1.2 Les révolutions du XVI-ième et du XVII-ième siècle

Une révolution dans les mathématiques se produit à cette époque grâce à deux progrès technologiques, internes aux mathématiques (et très corrélés). Il y a d'abord l'invention des décimaux, due à Stevin (1585). Elle donne à nos élèves de primaire et de collège des moyens de calcul que n'avaient ni les Grecs ni leurs successeurs.

Il y a ensuite l'invention du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz (vers 1650) Elle met à la portée d'un lycéen actuel des résultats comme la quadrature de la parabole ou le calcul du volume de la pyramide, deux sommets des mathématiques de l'antiquité.

1.1.3 L'âge d'or de l'analyse

Il s'ensuit une période d'explosion et des progrès en tous sens, grâce à l'emploi des nouvelles techniques. Le représentant le plus emblématique de cette période est sans doute Euler (1707-1783), à qui l'on doit une foule de résultats appuyés à la fois sur les techniques de Newton et Leibniz et sur les décimaux. Par exemple, il calcule la constante dite d'Euler γ, limite de $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n - \ln n$ avec 32 décimales :

$$\gamma \sim 0,577215664901532860(61811209008239)$$

(les décimales entre parenthèses sont fausses).

1.1.4 Les limites : la clairvoyance de Galois

Au début du XIX-ième siècle, cette phase commence à atteindre ses limites. Galois, le premier, perçoit que l'explosion précédente va s'essouffler :

Depuis Euler les calculs sont devenus de plus en plus nécessaires, mais de plus en plus difficiles à mesure qu'ils s'appliquaient à des objets de science plus avancés. Dès le commencement de ce siècle, l'algorithme avait atteint un degré de complication tel que tout progrès était devenu impossible par ce moyen, sans l'élégance que les géomètres modernes ont su imprimer à leurs recherches, et au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement et d'un seul coup un grand nombre d'opérations.

Or je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs, (simplifications intellectuelles, s'entend ; de matérielles il n'y en a pas) ont *leurs limites ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analystes ne trouveront plus ni le temps ni la place de se produire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues.*

Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage.

1.1.5 L'exemple de la théorie des invariants

Un très bel exemple de cette situation est donné par la théorie des invariants. Cette théorie centrée sur les déterminants, est reine de l'algèbre au XIX-ième siècle, avec notamment Cayley. Le point culminant de la théorie est la preuve par Gordan (1888) de la finitude de l'algèbre des invariants d'une forme à deux variables par un calcul explicite. Mais Gordan échoue sur les formes à 3 variables car le calcul devient inextricable. C'est Hilbert qui résout le problème de finitude, mais de manière non effective, en fondant par là même l'algèbre commutative moderne. La réaction de Gordan est incrédule, voire dédaigneuse : *Das ist Theologie, nicht Mathematik.*

1.1.6 L'apogée de la formalisation : Bourbaki

La filiation de Galois, Hilbert et d'autres mène tout droit à Bourbaki. On retrouve, avec les Eléments de Mathématique la même tentative d'unification et de solidification que celle des Éléments d'Euclide ... avec les mêmes défauts : théories sans algorithmes de calcul, coupure avec les applications, dédain pour la vulgarisation. Je me souviens, quand j'étais étudiant, dans les années 1960, combien la mathématique d'alors était impériale.

Mais la roche tarpéienne est proche du Capitole ...

2 La révolution informatique, mais pas la fin des mathématiques

2.1 De grands bouleversements

Cette fois, la révolution vient de l'extérieur. L'apparition des calculatrices et des ordinateurs donne des moyens de calcul extraordinaires qui permettent parfois de faire en quelques secondes ce que les anciens faisaient durant des mois.

On peut citer de nombreux exemples :

• Les calculs astronomiques de LeVerrier,

• L'utilisation des bases de Gröbner et des logiciels de calcul formel en algèbre.

• La preuve du théorème des quatre couleurs.

Cette explosion peut faire penser à certains, dans le grand public et même parmi les scientifiques, que la fin des mathématiques est arrivée.

2.2 Vers le deuxième centenaire ?

Il me semble cependant que les mathématiques ont encore de beaux jours devant elles, et ce, pour plusieurs raisons.

2.2.1 Les limites de l'ordinateur

Les ordinateurs, même s'ils ont permis de franchir des limites qui paraissaient il y a peu inabordables, n'ont pas une capacité infinie et dans certains domaines, leur limite est plus proche qu'on ne le croit. J'ai utilisé il y a quelque temps le logiciel de calcul formel Macaulay, qui effectue en quelques secondes des calculs que l'on mettrait des mois à faire à la main. Il n'empêche qu'il m'est souvent arrivé d'atteindre ses limites.

Pour donner un exemple concret, j'emprunte le problème suivant à Jean-Paul Delahaye : *Les nombres* $n^{17}+9$ *et* $(n+1)^{17}+9$ *sont-ils toujours premiers entre eux ?*

Si l'on fait l'expérience avec un ordinateur, on voit que c'est vrai longtemps, longtemps, mais faux cependant pour :

$$n = 8424432925592889329288197322308900672459420460792433.$$

2.2.2 L'informatique : une pourvoyeuse de problèmes

L'informatique n'est nullement l'ennemie des mathématiques (même si parfois certains se comportent comme si c'était le cas). En effet, elle rencontre dans son développement de nombreux problèmes qui rejoignent les mathématiques. C'est le cas en particulier de tout ce qui concerne les performances des algorithmes, la calculabilité, voir par exemple le problème P=NP (l'un des problèmes du millénium).

2.3 Un exemple : la suite logistique

J'aime beaucoup cet exemple, je n'en suis pas spécialiste, mais je l'ai un peu étudié, voir http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/ à la rubrique conférences.

2.3.1 L'exemple

Il s'agit de la suite récurrente $u_{n+1} = au_n(1 - u_n)$ qui intervient notamment dans les problèmes d'évolution de populations. On peut l'étudier expérimentalement en terminale, avec une calculatrice, c'est d'ailleurs ce qu'a fait Feigenbaum (qui est physicien) dans les années 1970 et cela lui a permis de produire de nombreuses conjectures. Mais pour comprendre vraiment le comportement de cette suite suivant les valeurs du paramètre a il faut faire beaucoup, beaucoup, beaucoup de mathématiques.

2.3.2 Comprendre

C'est le maître mot de ce qui précède : l'ordinateur nous donne un moyen extraordinaire d'expérimentation qui permet de détecter les phénomènes, mais il reste à les **comprendre** et c'est là que les mathématiques vont être indispensables. (C'est sans doute cela que Claude Allègre n'a jamais ... compris.)

Vu le nombre de questions encore ouvertes, vu toutes celles qui proviennent des autres disciplines, vu la complexité des mathématiques utilisées pour traiter un exemple aussi simple en apparence que la suite logistique, il est clair qu'il reste beaucoup de mathématiques à faire, et pour longtemps.

2.4 Les difficultés des mathématiques

2.4.1 L'explosion

L'une des difficultés des mathématiques est qu'il s'agit d'une science cumulative dont les résultats ne sont pas remis en question : les résultats d'Euclide sont encore valables aujourd'hui et on chercherait vainement une autre science où il en soit ainsi.

De plus, les mathématiques ont connu depuis cinquante ans un développement quasi-exponentiel. On dit couramment qu'il s'est produit plus de mathématiques depuis la seconde guerre mondiale que de l'origine des temps à la seconde guerre mondiale. Il y a actuellement plus de 100000 chercheurs en mathématiques de par le monde et une estimation grossière de la production annuelle de la recherche mathématique montre qu'elle est d'au moins 400000 pages (1000 pages $\times 400$ revues). Il est clair qu'aucun mathématicien actuel, fut-il le plus brillant, ne peut avoir une vision globale de sa discipline comme pouvait encore l'avoir Henri Poincaré il y a un siècle.

2.4.2 Les médiateurs

Une conséquence inévitable de cette explosion est qu'il se crée un fossé gigantesque entre les mathématiques de la recherche et le public.

Entre le public et les chercheurs il y a donc besoin de médiateurs, à tous les niveaux. Ces médiateurs, c'est nous, ce sont tous les professeurs de mathématiques. La diffusion, la vulgarisation, l'explication font partie de notre travail.

Il est aussi essentiel qu'il y ait des lieux de rencontre où les mathématiciens, de la maternelle à l'université, puissent se côtoyer. Par chance, ces lieux existent : ce sont les IREM.

2.5 Quelles mathématiques

2.5.1 Les deux piliers

Depuis toujours, l'édifice des mathématiques repose sur deux piliers : le nombre et la forme, qu'il faut consolider ensemble sous peine de voir l'ouvrage s'effondrer. À l'heure actuelle cela signifie, à mon avis, défendre bec et ongles la géométrie, car la tendance actuelle est au tout numérique.

Hélas, les concepteurs des programmes ne semblent pas avoir compris cela . . .

2.5.2 Des arguments

Pour une discussion sur l'importance du "penser géométriquement" je vous renvoie au rapport de la commission Kahane : *L'enseignement des sciences mathématiques* (Odile Jacob, 2002).

En un mot, la nécessité de la géométrie par rapport au numérique, c'est l'importance d'une vision plus globale des choses par rapport à une vision microscopique. D'une certaine manière, se concentrer sur le numérique, c'est abdiquer devant la machine : si la puissance de calcul est seule en cause, l'homme ne peut rivaliser avec l'ordinateur (on le voit par exemple dans le cas du jeu d'échecs).

2.5.3 Une citation pour finir

J'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant sur un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées. (Alain Connes)