Toute la lumière sur l'affaire Van Meegeren

Daniel PERRIN

23 octobre 2016

Vermeer

et Van Meegeren

Vermeer, peintre de la lumière

- Johannes Vermeer (dit Vermeer de Delft) (1632-1675), parfois appelé peintre de la lumière.

Vermeer, peintre de la lumière

- Johannes Vermeer (dit Vermeer de Delft) (1632-1675), parfois appelé peintre de la lumière.
- Deux exemples : la dame au collier de perles* et la vue de Delft*.

Vermeer, peintre de la lumière

- Johannes Vermeer (dit Vermeer de Delft) (1632-1675), parfois appelé peintre de la lumière.
- Deux exemples : la dame au collier de perles* et la vue de Delft*.
- De l'oubli (l'exemple de la jeune fille à la perle*) à la gloire.

Vermeer, peintre de la lumière

- Johannes Vermeer (dit Vermeer de Delft) (1632-1675), parfois appelé peintre de la lumière.
- Deux exemples : la dame au collier de perles* et la vue de Delft*.
- De l'oubli (l'exemple de la jeune fille à la perle*) à la gloire.
- *Enfin il fut devant le Vermeer ... il remarqua pour la première fois des petits personnages en bleu, que le sable était rose, et enfin la précieuse matière du tout petit pan de mur jaune. ... C'est ainsi que j'aurais dû écrire, disait-il. Mes derniers livres sont trop secs, il aurait fallu passer plusieurs couches de couleur, rendre ma phrase en elle-même précieuse, comme ce petit pan de mur* jaune*.*

Vermeer, peintre de la lumière

- Johannes Vermeer (dit Vermeer de Delft) (1632-1675), parfois appelé peintre de la lumière.
- Deux exemples : la dame au collier de perles* et la vue de Delft*.
- De l'oubli (l'exemple de la jeune fille à la perle*) à la gloire.
- *Enfin il fut devant le Vermeer ... il remarqua pour la première fois des petits personnages en bleu, que le sable était rose, et enfin la précieuse matière du tout petit pan de mur jaune. ... C'est ainsi que j'aurais dû écrire, disait-il. Mes derniers livres sont trop secs, il aurait fallu passer plusieurs couches de couleur, rendre ma phrase en elle-même précieuse, comme ce petit pan de mur* jaune*.*
- (M. Proust, *La Prisonnière*, cinquième tome d'*À la recherche du temps perdu*, 1923)

Van Meegeren

- Han Van Meegeren*, né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures.

Van Meegeren

- Han Van Meegeren*, né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures.
- En mai 1945, il est arrêté pour avoir vendu à Hermann Göring un tableau de Vermeer : *Jésus* et la femme adultère*.

Van Meegeren

- Han Van Meegeren*, né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures.
- En mai 1945, il est arrêté pour avoir vendu à Hermann Göring un tableau de Vermeer : *Jésus* et la femme adultère*.
- Il risque la peine de mort pour haute trahison.

Van Meegeren

- Han Van Meegeren*, né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures.
- En mai 1945, il est arrêté pour avoir vendu à Hermann Göring un tableau de Vermeer : *Jésus* et la femme adultère*.
- Il risque la peine de mort pour haute trahison.
- Alors il révèle : *C'est un faux, c'est moi qui l'ai fait* !* et ajoute qu'il a ainsi peint de nombreux* autres faux Vermeer.

Van Meegeren (suite)

- Manque de chance, personne ne le croit. D'autant que parmi les faux qu'il revendique se trouvent *Les disciples* d'Emmaüs*, vendus en 1938 au musée Boymans de Rotterdam pour une somme équivalente à 4 millions de dollars actuels et authentifiés par le plus grand expert de l'époque, Abraham Brédius.

Van Meegeren (suite)

- Manque de chance, personne ne le croit. D'autant que parmi les faux qu'il revendique se trouvent *Les disciples* d'Emmaüs*, vendus en 1938 au musée Boymans de Rotterdam pour une somme équivalente à 4 millions de dollars actuels et authentifiés par le plus grand expert de l'époque, Abraham Brédius.
- Voilà ce que dit Bredius : *Grâce à Dieu, cette œuvre magnifique est sortie de l'ombre où elle se trouvait, immaculée, intacte comme si elle venait tout droit de l'atelier de l'artiste* et aussi *Nous avons ici un chef-d'œuvre, je dirais LE chef-d'oeuvre de Vermeer, un de ses tableaux les plus grands par ses dimensions, une œuvre totalement différente de toutes les autres, et dont pourtant chaque pouce ne peut être que de Vermeer.*

Van Meegeren (suite)

- Alors, pour convaincre les incrédules, dans sa cellule, entre juillet et septembre 1945, Van Meegeren peint un autre faux Vermeer *Jésus parmi les docteurs*.*

Van Meegeren (suite)

- Alors, pour convaincre les incrédules, dans sa cellule, entre juillet et septembre 1945, Van Meegeren peint un autre faux Vermeer *Jésus parmi les docteurs**.
- Cela ébranle les magistrats. Une commission d'enquête est nommée, dirigée par Paul Coremans, qui reconnaît que les tableaux sont des faux. En octobre 1947 Van Meegeren est condamné à un an de prison ... pour faux.

Van Meegeren (suite)

- Alors, pour convaincre les incrédules, dans sa cellule, entre juillet et septembre 1945, Van Meegeren peint un autre faux Vermeer *Jésus parmi les docteurs*.*
- Cela ébranle les magistrats. Une commission d'enquête est nommée, dirigée par Paul Coremans, qui reconnaît que les tableaux sont des faux. En octobre 1947 Van Meegeren est condamné à un an de prison ... pour faux.
- Malheureusement, il meurt d'une crise cardiaque en décembre 1947.

Van Meegeren (suite et fin)

- L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.

Van Meegeren (suite et fin)

- L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.
- Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, Les Disciples d'Emmaüs et La Dernière Cène, étaient d'authentiques Vermeer.

Van Meegeren (suite et fin)

- L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.
- Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, Les Disciples d'Emmaüs et La Dernière Cène, étaient d'authentiques Vermeer.
- Autre exemple, le procès Van Beuningen (1956).

Van Meegeren (suite et fin)

- L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.
- Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, Les Disciples d'Emmaüs et La Dernière Cène, étaient d'authentiques Vermeer.
- Autre exemple, le procès Van Beuningen (1956).
- Ce n'est qu'en 1967 que l'Artists Material Center de l'université Carnegie Mellon de Pittsburgh apporte une preuve définitive que les prétendus Vermeer ne pouvaient pas dater de cette époque, à l'aide d'une datation au plomb.

Van Meegeren (suite et fin)

- L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.
- Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, Les Disciples d'Emmaüs et La Dernière Cène, étaient d'authentiques Vermeer.
- Autre exemple, le procès Van Beuningen (1956).
- Ce n'est qu'en 1967 que l'Artists Material Center de l'université Carnegie Mellon de Pittsburgh apporte une preuve définitive que les prétendus Vermeer ne pouvaient pas dater de cette époque, à l'aide d'une datation au plomb.
- C'est ce que je vais expliquer dans un instant.

Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !

Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.

Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.
- Les supports, les pigments, les pinceaux.

Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.
- Les supports, les pigments, les pinceaux.
- Pour résister au test à l'alcool : un vernis à base de bakélite.

Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.
- Les supports, les pigments, les pinceaux.
- Pour résister au test à l'alcool : un vernis à base de bakélite.
- Brédius et le choix du thème : Le Caravage et Emmaüs*.

Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.
- Les supports, les pigments, les pinceaux.
- Pour résister au test à l'alcool : un vernis à base de bakélite.
- Brédius et le choix du thème : Le Caravage et Emmaüs*.
- Épilogue : de faux Vermeer mais de vrais Van Meegeren !

Quelques rappels

de physique et de mathématiques

Mourir sans vieillir : la décroissance exponentielle

- On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses :

Mourir sans vieillir : la décroissance exponentielle

- On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses :
- 1) On passe d'un état à l'autre (de vie à trépas), mais pas l'inverse (pas de naissances) : le phénomène est irréversible.

Mourir sans vieillir : la décroissance exponentielle

- On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses :
- 1) On passe d'un état à l'autre (de vie à trépas), mais pas l'inverse (pas de naissances) : le phénomène est irréversible.
- 2) Le changement d'état se fait de manière aléatoire.

Mourir sans vieillir : la décroissance exponentielle

- On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses :
- 1) On passe d'un état à l'autre (de vie à trépas), mais pas l'inverse (pas de naissances) : le phénomène est irréversible.
- 2) Le changement d'état se fait de manière aléatoire.
- 3) Les individus sont égaux entre eux devant la mort : ni malades, ni faibles, ni forts : le phénomène est égalitaire.

Mourir sans vieillir : la décroissance exponentielle

- On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses :
- 1) On passe d'un état à l'autre (de vie à trépas), mais pas l'inverse (pas de naissances) : le phénomène est irréversible.
- 2) Le changement d'état se fait de manière aléatoire.
- 3) Les individus sont égaux entre eux devant la mort : ni malades, ni faibles, ni forts : le phénomène est égalitaire.
- 4) Les chances de mourir sont les mêmes au cours du temps : c'est un phénomène sans vieillissement.

La décroissance exponentielle (suite)

- On note $N(t)$ le nombre d'individus en vie au temps t (on voit ce nombre comme un réel).

La décroissance exponentielle (suite)

- On note $N(t)$ le nombre d'individus en vie au temps t (on voit ce nombre comme un réel).
- La fonction $N(t)$ est décroissante.

La décroissance exponentielle (suite)

- On note $N(t)$ le nombre d'individus en vie au temps t (on voit ce nombre comme un réel).
- La fonction $N(t)$ est décroissante.
- On modélise le phénomène en termes de probabilités, voire de fréquences puisqu'il est égalitaire.

La décroissance exponentielle (suite)

- On note $N(t)$ le nombre d'individus en vie au temps t (on voit ce nombre comme un réel).
- La fonction $N(t)$ est décroissante.
- On modélise le phénomène en termes de probabilités, voire de fréquences puisqu'il est égalitaire.
- Pour tous $t, h > 0$ on a $\dfrac{N(t) - N(t+h)}{N(t)} = \dfrac{N(0) - N(h)}{N(0)}$.

La décroissance exponentielle (suite)

- On note $N(t)$ le nombre d'individus en vie au temps t (on voit ce nombre comme un réel).
- La fonction $N(t)$ est décroissante.
- On modélise le phénomène en termes de probabilités, voire de fréquences puisqu'il est égalitaire.
- Pour tous $t, h > 0$ on a $\dfrac{N(t) - N(t+h)}{N(t)} = \dfrac{N(0) - N(h)}{N(0)}$.
- Si l'on suppose N dérivable en 0 on obtient l'équation différentielle $N'(t) = -\alpha N(t)$ avec $\alpha = -N'(0)/N(0) > 0$.

La décroissance exponentielle (suite)

- On note $N(t)$ le nombre d'individus en vie au temps t (on voit ce nombre comme un réel).
- La fonction $N(t)$ est décroissante.
- On modélise le phénomène en termes de probabilités, voire de fréquences puisqu'il est égalitaire.
- Pour tous $t, h > 0$ on a $\dfrac{N(t) - N(t+h)}{N(t)} = \dfrac{N(0) - N(h)}{N(0)}$.
- Si l'on suppose N dérivable en 0 on obtient l'équation différentielle $N'(t) = -\alpha N(t)$ avec $\alpha = -N'(0)/N(0) > 0$.
- On peut se passer de l'hypothèse de dérivabilité en notant que $N(t)/N(0)$ décroît et vérifie l'équation fonctionnelle de l'exponentielle.

L'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$

- On suppose seulement qu'on a défini l'exponentielle et qu'on connaît la formule $(e^t)' = e^t$.

L'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$

- On suppose seulement qu'on a défini l'exponentielle et qu'on connaît la formule $(e^t)' = e^t$.
- L'équation $y' + \alpha y = 0$ a des solutions évidentes : $y(t) = Ce^{-\alpha t}$ avec C constante, $C = y(0)$.

L'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$

- On suppose seulement qu'on a défini l'exponentielle et qu'on connaît la formule $(e^t)' = e^t$.
- L'équation $y' + \alpha y = 0$ a des solutions évidentes : $y(t) = Ce^{-\alpha t}$ avec C constante, $C = y(0)$.
- Une idée géniale : la variation de la constante !

L'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$

- On suppose seulement qu'on a défini l'exponentielle et qu'on connaît la formule $(e^t)' = e^t$.
- L'équation $y' + \alpha y = 0$ a des solutions évidentes : $y(t) = Ce^{-\alpha t}$ avec C constante, $C = y(0)$.
- Une idée géniale : la variation de la constante !
- On en déduit qu'il n'y a pas d'autres solutions que les évidentes.

L'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$

- On suppose seulement qu'on a défini l'exponentielle et qu'on connaît la formule $(e^t)' = e^t$.
- L'équation $y' + \alpha y = 0$ a des solutions évidentes : $y(t) = Ce^{-\alpha t}$ avec C constante, $C = y(0)$.
- Une idée géniale : la variation de la constante !
- On en déduit qu'il n'y a pas d'autres solutions que les évidentes.
- Le cas des équations $y' + ay = b$ ou $y' + ay = f(t)$.

La radioactivité

- L'origine de la radioactivité : un peu de physique.

La radioactivité

- L'origine de la radioactivité : un peu de physique.
- Le tableau* pour ${}^{238}_{92}U$.

La radioactivité

- L'origine de la radioactivité : un peu de physique.
- Le tableau* pour $^{238}_{92}U$.
- Le phénomène satisfait les hypothèses précédentes (aléatoire, irréversible, égalitaire, sans vieillissement).

La radioactivité

- L'origine de la radioactivité : un peu de physique.
- Le tableau* pour ${}^{238}_{92}U$.
- Le phénomène satisfait les hypothèses précédentes (aléatoire, irréversible, égalitaire, sans vieillissement).
- Donc si un atome ou un isotope A (instable) donne un atome B, c'est selon la loi précédente : $A'(t) = -\alpha A(t)$ et on en déduit la formule $A(t) = ae^{-\alpha t}$, avec $a = A(0)$.

La radioactivité (suite)

- La période (ou demi-vie*) est le temps τ tel que $A(\tau) = a/2$. On a $\tau = \ln 2/\alpha$.

La radioactivité (suite)

- La période (ou demi-vie*) est le temps τ tel que $A(\tau) = a/2$. On a $\tau = \ln 2/\alpha$.
- Exemples de périodes : uranium 238, 4,5 milliards d'années, radium 226, 1600 ans, plomb 210, 22 ans. Le tableau* pour ${}^{238}_{92}U$.

La radioactivité (suite)

- La période (ou demi-vie*) est le temps τ tel que $A(\tau) = a/2$. On a $\tau = \ln 2/\alpha$.
- Exemples de périodes : uranium 238, 4,5 milliards d'années, radium 226, 1600 ans, plomb 210, 22 ans. Le tableau* pour $^{238}_{92}U$.
- La quantité $\alpha A(t) = -A'(t)$ est la **vitesse de désintégration** (souvent exprimée en nombre d'atomes par minute). Comme α, elle varie en sens inverse de la période.

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, l'expérience

- On suppose qu'on a deux corps A et B radioactifs, A donnant B (qui lui-même se transforme en C).

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, l'expérience

- On suppose qu'on a deux corps A et B radioactifs, A donnant B (qui lui-même se transforme en C).
- L'expérience montre que, si la période de A est nettement plus grande que celle de B, au bout d'un temps assez long il se crée un **équilibre radioactif** : la désintégration de B est compensée exactement par celle de A.

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, l'expérience

- On suppose qu'on a deux corps A et B radioactifs, A donnant B (qui lui-même se transforme en C).
- L'expérience montre que, si la période de A est nettement plus grande que celle de B, au bout d'un temps assez long il se crée un **équilibre radioactif** : la désintégration de B est compensée exactement par celle de A.
- Nous allons expliquer mathématiquement cette constatation.

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, les mathématiques

- On pose $A(0) = a$, $B(0) = b$. La loi de A est donnée par $A'(t) = -\alpha A(t)$, d'où $A = ae^{-\alpha t}$.

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, les mathématiques

- On pose $A(0) = a$, $B(0) = b$. La loi de A est donnée par $A'(t) = -\alpha A(t)$, d'où $A = ae^{-\alpha t}$.
- Pour B il y a compensation : $B'(t) = -\beta B(t) + \alpha A(t) = -\beta B(t) + \alpha a e^{-\alpha t}$ (avec $\beta > \alpha$).

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, les mathématiques

- On pose $A(0) = a$, $B(0) = b$. La loi de A est donnée par $A'(t) = -\alpha A(t)$, d'où $A = ae^{-\alpha t}$.
- Pour B il y a compensation : $B'(t) = -\beta B(t) + \alpha A(t) = -\beta B(t) + \alpha a e^{-\alpha t}$ (avec $\beta > \alpha$).
- Il n'est pas difficile de résoudre cette équation. On obtient $B(t) = be^{-\beta t} + \dfrac{\alpha a}{\beta - \alpha}\big(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\big)$.

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, les mathématiques

- On pose $A(0) = a$, $B(0) = b$. La loi de A est donnée par $A'(t) = -\alpha A(t)$, d'où $A = ae^{-\alpha t}$.
- Pour B il y a compensation : $B'(t) = -\beta B(t) + \alpha A(t) = -\beta B(t) + \alpha a e^{-\alpha t}$ (avec $\beta > \alpha$).
- Il n'est pas difficile de résoudre cette équation. On obtient $B(t) = be^{-\beta t} + \dfrac{\alpha a}{\beta - \alpha}\big(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\big)$.
- On en déduit que le rapport $\dfrac{\beta B(t)}{\alpha A(t)} = \dfrac{\beta b}{\alpha a} e^{-(\beta-\alpha)t} + \dfrac{\beta}{\beta - \alpha}(1 - e^{-(\beta-\alpha)t})$ tend vers $\frac{\beta}{\beta-\alpha}$ quand t tend vers l'infini.

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps (suite)

- Si la période du corps A est grande par rapport à celle de B, β est grand par rapport à α et la limite du rapport des vitesses de désintégration est voisine de 1 : dans un laps de temps dt infinitésimal, il apparaît autant d'atomes de B provenant de A qu'il ne s'en désintègre, on a bien un équilibre radioactif pour B.

Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps (suite)

- Si la période du corps A est grande par rapport à celle de B, β est grand par rapport à α et la limite du rapport des vitesses de désintégration est voisine de 1 : dans un laps de temps dt infinitésimal, il apparaît autant d'atomes de B provenant de A qu'il ne s'en désintègre, on a bien un équilibre radioactif pour B.
- Par exemple, si A est l'uranium 238 et B le radium 226, la limite est $1,000000355$ et il suffit de 32000 ans (autant dire rien par rapport à la période de l'uranium) pour que cette limite soit atteinte à 10^{-6} près. Le tableau* pour $^{238}_{92}U$.

Équilibre radioactif avec trois corps

- On suppose qu'on a trois corps A, B, C radioactifs, A donnant B, qui lui-même se transforme en C, lequel donne D. On suppose pour simplifier qu'au temps 0 on a $A(0) = a$ et $B(0) = C(0) = 0$.

Équilibre radioactif avec trois corps

- On suppose qu'on a trois corps A, B, C radioactifs, A donnant B, qui lui-même se transforme en C, lequel donne D. On suppose pour simplifier qu'au temps 0 on a $A(0) = a$ et $B(0) = C(0) = 0$.
- On a encore $A(t) = ae^{-\alpha t}$ et $B(t) = \dfrac{\alpha a}{\beta - \alpha}\big(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\big)$.

Équilibre radioactif avec trois corps

- On suppose qu'on a trois corps A, B, C radioactifs, A donnant B, qui lui-même se transforme en C, lequel donne D. On suppose pour simplifier qu'au temps 0 on a $A(0) = a$ et $B(0) = C(0) = 0$.
- On a encore $A(t) = ae^{-\alpha t}$ et $B(t) = \dfrac{\alpha a}{\beta - \alpha}\big(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\big)$.
- Un calcul analogue donne :

$$C(t) = \frac{\alpha\beta a}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\big(e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}\big) - \frac{\alpha\beta a}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}\big(e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}\big)$$

Équilibre radioactif avec trois corps

- On suppose qu'on a trois corps A, B, C radioactifs, A donnant B, qui lui-même se transforme en C, lequel donne D. On suppose pour simplifier qu'au temps 0 on a $A(0) = a$ et $B(0) = C(0) = 0$.
- On a encore $A(t) = ae^{-\alpha t}$ et $B(t) = \dfrac{\alpha a}{\beta - \alpha}\big(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\big)$.
- Un calcul analogue donne :

$$C(t) = \frac{\alpha\beta a}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\big(e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}\big) - \frac{\alpha\beta a}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}\big(e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}\big)$$

- Si l'on suppose $\gamma > \beta > \alpha$, $\dfrac{\gamma C(t)}{\alpha A(t)}$ tend vers $\dfrac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}$ quand t tend vers l'infini.

Équilibre radioactif avec trois corps (suite)

- Si β et γ sont grands devant α, cette limite est voisine de 1. C'est le cas si A est l'uranium 238, B le radium 226, C le plomb 210 et D le plomb 206.

Équilibre radioactif avec trois corps (suite)

- Si β et γ sont grands devant α, cette limite est voisine de 1. C'est le cas si A est l'uranium 238, B le radium 226, C le plomb 210 et D le plomb 206.
- On en déduit que les vitesses de désintégration $\alpha A(t)$, $\beta B(t)$ et $\gamma C(t)$ sont à peu près égales lorsque t est grand (quelques milliers d'années, ce qui n'est rien par rapport à la période de l'uranium : $4,5$ milliards d'années).

Vermeer ou Van Meegeren ?

Le principe : datation au plomb

Parmi les couleurs couramment utilisées par les peintres depuis très longtemps, il y a la céruse ou blanc de plomb. Il s'agit d'un carbonate de plomb qui contient deux isotopes radioactifs (provenant de la désintégration de l'uranium-238) : le plomb-210 et le radium-226. Encore le tableau*.

Le principe : datation au plomb (suite)

- Tant que le minerai n'est pas extrait, on a vu qu'il y a équilibre radioactif : la désintégration du plomb est compensée par celle du radium, elle-même compensée par celle de l'uranium.

Le principe : datation au plomb (suite)

- Tant que le minerai n'est pas extrait, on a vu qu'il y a équilibre radioactif : la désintégration du plomb est compensée par celle du radium, elle-même compensée par celle de l'uranium.
- Lors du traitement du minerai en vue d'en extraire le plomb, 90 à 95 % du radium et de l'uranium sont éliminés avec les scories.

Le principe : datation au plomb (suite)

- Tant que le minerai n'est pas extrait, on a vu qu'il y a équilibre radioactif : la désintégration du plomb est compensée par celle du radium, elle-même compensée par celle de l'uranium.
- Lors du traitement du minerai en vue d'en extraire le plomb, 90 à 95 % du radium et de l'uranium sont éliminés avec les scories.
- Dans le plomb purifié utilisé en peinture, la désintégration du plomb n'est donc plus compensée par celle du radium : la concentration en plomb 210 diminue, celle en plomb 206 augmente.

Le principe : datation au plomb (suite)

- On prélève un petit échantillon du tableau incriminé et on mesure essentiellement deux choses :
  - la vitesse de désintégration du plomb 210,
  - celle du radium résiduel.

Le principe : datation au plomb (suite)

- On prélève un petit échantillon du tableau incriminé et on mesure essentiellement deux choses :
  - la vitesse de désintégration du plomb 210,
  - celle du radium résiduel.
- Les appareils de mesure : compteurs de type Geiger, détecteurs à ionisation, à scintillation, thermoluminescents, etc.

Les mathématiques

- On appelle $p(t)$ la quantité (en nombre d'atomes par gramme de blanc de plomb) de plomb au temps t, $r(t)$ celle de radium, $u(t)$ celle d'uranium et λ, μ, α les coefficients de désintégration (en mn^{-1}, calculés à partir des périodes).

Les mathématiques

- On appelle $p(t)$ la quantité (en nombre d'atomes par gramme de blanc de plomb) de plomb au temps t, $r(t)$ celle de radium, $u(t)$ celle d'uranium et λ, μ, α les coefficients de désintégration (en mn^{-1}, calculés à partir des périodes).
- On a $\lambda \sim 6 \times 10^{-8}$, $\mu \sim 8,2 \times 10^{-10}$ et $\alpha \sim 3 \times 10^{-16}$.

Les mathématiques

- On appelle $p(t)$ la quantité (en nombre d'atomes par gramme de blanc de plomb) de plomb au temps t, $r(t)$ celle de radium, $u(t)$ celle d'uranium et λ, μ, α les coefficients de désintégration (en mn^{-1}, calculés à partir des périodes).
- On a $\lambda \sim 6 \times 10^{-8}$, $\mu \sim 8,2 \times 10^{-10}$ et $\alpha \sim 3 \times 10^{-16}$.
- En première approximation, on peut supposer $r(t) = r_0$ constant.

Les mathématiques

- On appelle $p(t)$ la quantité (en nombre d'atomes par gramme de blanc de plomb) de plomb au temps t, $r(t)$ celle de radium, $u(t)$ celle d'uranium et λ, μ, α les coefficients de désintégration (en mn^{-1}, calculés à partir des périodes).
- On a $\lambda \sim 6 \times 10^{-8}$, $\mu \sim 8,2 \times 10^{-10}$ et $\alpha \sim 3 \times 10^{-16}$.
- En première approximation, on peut supposer $r(t) = r_0$ constant.
- On a alors l'équation en p : $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r_0$, qui se résout facilement.

Les mathématiques

- On appelle $p(t)$ la quantité (en nombre d'atomes par gramme de blanc de plomb) de plomb au temps t, $r(t)$ celle de radium, $u(t)$ celle d'uranium et λ, μ, α les coefficients de désintégration (en mn^{-1}, calculés à partir des périodes).
- On a $\lambda \sim 6 \times 10^{-8}$, $\mu \sim 8,2 \times 10^{-10}$ et $\alpha \sim 3 \times 10^{-16}$.
- En première approximation, on peut supposer $r(t) = r_0$ constant.
- On a alors l'équation en p : $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r_0$, qui se résout facilement.
- On fait apparaître les vitesses de désintégration (en nombre d'atomes par minute) :

$$\lambda p(t) = \mu r_0 + (\lambda p_0 - \mu r_0)e^{-\lambda t}.$$

La machine à remonter le temps

- Les équations différentielles, ça fonctionne dans les deux sens. Ici, contrairement à la tendance naturelle, il est un peu plus simple de mettre l'origine **au moment de l'examen du tableau (1967)**.

La machine à remonter le temps

- Les équations différentielles, ça fonctionne dans les deux sens. Ici, contrairement à la tendance naturelle, il est un peu plus simple de mettre l'origine **au moment de l'examen du tableau (1967)**.
- On cherche $T < 0$ (la date de création du tableau).

La machine à remonter le temps

- Les équations différentielles, ça fonctionne dans les deux sens. Ici, contrairement à la tendance naturelle, il est un peu plus simple de mettre l'origine **au moment de l'examen du tableau (1967)**.
- On cherche $T < 0$ (la date de création du tableau).
- La formule $\lambda p(t) = \mu r_0 + (\lambda p_0 - \mu r_0)e^{-\lambda t}$ donne T :

$$e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0} = e^{\lambda |T|}$$

La machine à remonter le temps

- Les équations différentielles, ça fonctionne dans les deux sens. Ici, contrairement à la tendance naturelle, il est un peu plus simple de mettre l'origine **au moment de l'examen du tableau (1967)**.
- On cherche $T < 0$ (la date de création du tableau).
- La formule $\lambda p(t) = \mu r_0 + (\lambda p_0 - \mu r_0)e^{-\lambda t}$ donne T :

$$e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0} = e^{\lambda |T|}$$

- On mesure $\lambda p_0 \sim 8,5$ et $\mu r_0 \sim 0,8$ dans un échantillon du tableau, mais le problème c'est qu'on ignore ce que vaut $\lambda p(T)$, vitesse de désintégration au temps (soi-disant) de Vermeer.

Majorer $\lambda p(T)$

- On va majorer la quantité inconnue $\lambda p(T)$. Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif**.

Majorer $\lambda p(T)$

- On va majorer la quantité inconnue $\lambda p(T)$. Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif**.
- Si T est le temps de l'extraction du minerai (antérieur à l'exécution de la toile) on a $\alpha u(T) \sim \mu r(T) \sim \lambda p(T)$.

Majorer $\lambda p(T)$

- On va majorer la quantité inconnue $\lambda p(T)$. Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif**.
- Si T est le temps de l'extraction du minerai (antérieur à l'exécution de la toile) on a $\alpha u(T) \sim \mu r(T) \sim \lambda p(T)$.
- Comme la période de l'uranium est très longue, on peut considérer qu'on a $u(T) \simeq u_0$.

Majorer $\lambda p(T)$

- On va majorer la quantité inconnue $\lambda p(T)$. Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif**.
- Si T est le temps de l'extraction du minerai (antérieur à l'exécution de la toile) on a $\alpha u(T) \sim \mu r(T) \sim \lambda p(T)$.
- Comme la période de l'uranium est très longue, on peut considérer qu'on a $u(T) \simeq u_0$.
- On ne connaît pas u_0 qui est le nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb au temps de Vermeer.

Majorer $\lambda p(T)$

- On va majorer la quantité inconnue $\lambda p(T)$. Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif**.
- Si T est le temps de l'extraction du minerai (antérieur à l'exécution de la toile) on a $\alpha u(T) \sim \mu r(T) \sim \lambda p(T)$.
- Comme la période de l'uranium est très longue, on peut considérer qu'on a $u(T) \simeq u_0$.
- On ne connaît pas u_0 qui est le nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb au temps de Vermeer.
- Mais on va le majorer.

Majorer $\lambda p(t)$

- On peut considérer que le nombre u_0 n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle.

Majorer $\lambda p(t)$

- On peut considérer que le nombre u_0 n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle.
- Attention, la teneur en uranium des minerais de plomb est très variable.

Majorer $\lambda p(t)$

- On peut considérer que le nombre u_0 n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle.
- Attention, la teneur en uranium des minerais de plomb est très variable.
- En moyenne elle est $2,7 \times 10^{-6}$ grammes d'uranium (par gramme de minerai), mais pour certains minerais américains elle vaut jusqu'à $0,03\,g$.

Majorer $\lambda p(t)$

- On peut considérer que le nombre u_0 n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle.
- Attention, la teneur en uranium des minerais de plomb est très variable.
- En moyenne elle est $2,7 \times 10^{-6}$ grammes d'uranium (par gramme de minerai), mais pour certains minerais américains elle vaut jusqu'à $0,03\,g$.
- On fait le calcul dans ce cas extrême :

$$u_0 = \frac{6,02 \times 10^{23} \times 0,03}{238} \sim 7,5 \times 10^{19}$$

Majorer $\lambda p(t)$

- On peut considérer que le nombre u_0 n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle.
- Attention, la teneur en uranium des minerais de plomb est très variable.
- En moyenne elle est $2,7 \times 10^{-6}$ grammes d'uranium (par gramme de minerai), mais pour certains minerais américains elle vaut jusqu'à $0,03\,g$.
- On fait le calcul dans ce cas extrême :

$$u_0 = \frac{6,02 \times 10^{23} \times 0,03}{238} \sim 7,5 \times 10^{19}$$

- On a donc $\alpha u_0 \leq 22500$ (avec la valeur moyenne : $\alpha u_0 \simeq 2$).

Conclusion sur Van Meegeren

- Rappelons la formule ($|T|$ désigne l'âge du tableau) :

$$e^{\lambda|T|} = e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0}$$

avec $\lambda p_0 \sim 8,5$, $\mu r_0 \sim 0,8$ et $\lambda p(T) \sim \alpha u_0 \leq 22500$.

Conclusion sur Van Meegeren

- Rappelons la formule ($|T|$ désigne l'âge du tableau) :

$$e^{\lambda |T|} = e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0}$$

avec $\lambda p_0 \sim 8,5$, $\mu r_0 \sim 0,8$ et $\lambda p(T) \sim \alpha u_0 \leq 22500$.

- On en déduit la majoration $e^{\lambda |T|} \leq \dfrac{22500 - 0,8}{7,7} \sim 2956$, donc $|T| \leq 133120000$ (en minutes).

Conclusion sur Van Meegeren

- Rappelons la formule ($|T|$ désigne l'âge du tableau) :

$$e^{\lambda|T|} = e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0}$$

avec $\lambda p_0 \sim 8,5$, $\mu r_0 \sim 0,8$ et $\lambda p(T) \sim \alpha u_0 \leq 22500$.

- On en déduit la majoration $e^{\lambda|T|} \leq \dfrac{22500 - 0,8}{7,7} \sim 2956$,

donc $|T| \leq 133120000$ (en minutes).

- Soit, en années, $|T| \leq 133120000/(60 \times 24 \times 365) \sim 253$ ans.

Conclusion sur Van Meegeren

- Rappelons la formule ($|T|$ désigne l'âge du tableau) :

$$e^{\lambda|T|} = e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0}$$

avec $\lambda p_0 \sim 8,5$, $\mu r_0 \sim 0,8$ et $\lambda p(T) \sim \alpha u_0 \leq 22500$.

- On en déduit la majoration $e^{\lambda|T|} \leq \dfrac{22500 - 0,8}{7,7} \sim 2956$, donc $|T| \leq 133120000$ (en minutes).
- Soit, en années, $|T| \leq 133120000/(60 \times 24 \times 365) \sim 253$ ans.
- Au plus tôt la peinture daterait de 1714, 40 ans après la mort de Vermeer !

Conclusion sur Van Meegeren

- Rappelons la formule ($|T|$ désigne l'âge du tableau) :

$$e^{\lambda|T|} = e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0}$$

  avec $\lambda p_0 \sim 8,5$, $\mu r_0 \sim 0,8$ et $\lambda p(T) \sim \alpha u_0 \leq 22500$.
- On en déduit la majoration $e^{\lambda|T|} \leq \dfrac{22500 - 0,8}{7,7} \sim 2956$, donc $|T| \leq 133120000$ (en minutes).
- Soit, en années, $|T| \leq 133120000/(60 \times 24 \times 365) \sim 253$ ans.
- Au plus tôt la peinture daterait de 1714, 40 ans après la mort de Vermeer !
- Moralité : conseil aux apprentis faussaires ...

Variante tenant compte de la désintégration du radium

- On ne suppose plus $r(t)$ constant. On a $r(t) = r_0 e^{-\mu t}$ où r_0 est la proportion de radium en 1967.

Variante tenant compte de la désintégration du radium

- On ne suppose plus $r(t)$ constant. On a $r(t) = r_0 e^{-\mu t}$ où r_0 est la proportion de radium en 1967.
- On note $P(t)$ le nombre d'atomes de plomb au temps t et on a l'équation $P'(t) = -\lambda P(t) + \mu r(t) = \lambda P(t) + \mu r_0 e^{-\mu t}$.

Variante tenant compte de la désintégration du radium

- On ne suppose plus $r(t)$ constant. On a $r(t) = r_0 e^{-\mu t}$ où r_0 est la proportion de radium en 1967.
- On note $P(t)$ le nombre d'atomes de plomb au temps t et on a l'équation $P'(t) = -\lambda P(t) + \mu r(t) = \lambda P(t) + \mu r_0 e^{-\mu t}$.
- On en déduit

$$\lambda P(t) = \lambda p_0 e^{-\lambda t} + \frac{\lambda \mu r_0}{\lambda - \mu}\big(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}\big).$$

Variante tenant compte de la désintégration du radium

- On ne suppose plus $r(t)$ constant. On a $r(t) = r_0 e^{-\mu t}$ où r_0 est la proportion de radium en 1967.
- On note $P(t)$ le nombre d'atomes de plomb au temps t et on a l'équation $P'(t) = -\lambda P(t) + \mu r(t) = \lambda P(t) + \mu r_0 e^{-\mu t}$.
- On en déduit

$$\lambda P(t) = \lambda p_0 e^{-\lambda t} + \frac{\lambda \mu r_0}{\lambda - \mu}\left(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}\right).$$

- Si T (en années) est le temps écoulé depuis la peinture on a

$$F(T) := \lambda P(T) = 8.5\, e^{-0.0315T} + 0.811(e^{-0.00043T} - e^{-0.0315T}).$$

Variante tenant compte de la désintégration du radium

- On ne suppose plus $r(t)$ constant. On a $r(t) = r_0 e^{-\mu t}$ où r_0 est la proportion de radium en 1967.
- On note $P(t)$ le nombre d'atomes de plomb au temps t et on a l'équation $P'(t) = -\lambda P(t) + \mu r(t) = \lambda P(t) + \mu r_0 e^{-\mu t}$.
- On en déduit

$$\lambda P(t) = \lambda p_0 e^{-\lambda t} + \frac{\lambda \mu r_0}{\lambda - \mu}\big(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}\big).$$

- Si T (en années) est le temps écoulé depuis la peinture on a

$$F(T) := \lambda P(T) = 8.5\, e^{-0.0315T} + 0.811(e^{-0.00043T} - e^{-0.0315T}).$$

- On cherche la valeur de T correspondant au $\lambda P(T) = 22500$ maximal par exemple avec le graphe*.

L'intérêt du sujet en lui-même

- On a vu qu'il arrive que les experts se trompent (et c'est encore le cas aujourd'hui, voir *L'affaire Beltracchi* de S. Koldehoff et T. Tim ou *Autoportrait d'un faussaire* de G. Ribes).

L'intérêt du sujet en lui-même

- On a vu qu'il arrive que les experts se trompent (et c'est encore le cas aujourd'hui, voir *L'affaire Beltracchi* de S. Koldehoff et T. Tim ou *Autoportrait d'un faussaire* de G. Ribes).
- Comme le dit Richard Feynman :
  La science est la croyance en l'ignorance des experts.

L'intérêt du sujet en lui-même

- On a vu qu'il arrive que les experts se trompent (et c'est encore le cas aujourd'hui, voir *L'affaire Beltracchi* de S. Koldehoff et T. Tim ou *Autoportrait d'un faussaire* de G. Ribes).
- Comme le dit Richard Feynman :
  La science est la croyance en l'ignorance des experts.
- L'exemple de Van Meegeren est révélateur de l'intérêt d'une approche scientifique, pour discuter les affirmations des experts.

L'intérêt du sujet par rapport aux mathématiques

- Dans la plupart des travaux scientifiques, les mathématiques ont une part à prendre.

L'intérêt du sujet par rapport aux mathématiques

- Dans la plupart des travaux scientifiques, les mathématiques ont une part à prendre.
- On l'a vu ici sur le thème de l'équilibre radioactif.

L'intérêt du sujet par rapport aux mathématiques

- Dans la plupart des travaux scientifiques, les mathématiques ont une part à prendre.
- On l'a vu ici sur le thème de l'équilibre radioactif.
- Mais on a vu aussi que, lorsqu'on est confronté à un problème réel, les mathématiques seules n'apportent pas les réponses et que les difficultés sont souvent extra-mathématiques.

Du côté de l'enseignement

- C'est une belle histoire qu'on peut par exemple utiliser en TPE*.

Du côté de l'enseignement

- C'est une belle histoire qu'on peut par exemple utiliser en TPE*.
- Attention, faire travailler des élèves sur une modélisation qui soit vraiment sérieuse n'est pas évident et cela nécessite un minimum d'investissement dans des domaines autres que les mathématiques.

Du côté de l'enseignement

- C'est une belle histoire qu'on peut par exemple utiliser en TPE*.
- Attention, faire travailler des élèves sur une modélisation qui soit vraiment sérieuse n'est pas évident et cela nécessite un minimum d'investissement dans des domaines autres que les mathématiques.
- Bien sûr, les équations différentielles ne sont plus au programme de terminale mais ce dont on a besoin ici est minime.

Du côté de l'enseignement

- C'est une belle histoire qu'on peut par exemple utiliser en TPE*.
- Attention, faire travailler des élèves sur une modélisation qui soit vraiment sérieuse n'est pas évident et cela nécessite un minimum d'investissement dans des domaines autres que les mathématiques.
- Bien sûr, les équations différentielles ne sont plus au programme de terminale mais ce dont on a besoin ici est minime.
- Par ailleurs, les programmes ne sont pas immuables et ceux de TS mériteraient un sérieux rééquilibrage entre analyse et probabilités.

Un quizz pour vérifier vos connaissances

- De ces deux peintures, l'une est un faux. Laquelle ? 1 2

Un quizz pour vérifier vos connaissances

- De ces deux peintures, l'une est un faux. Laquelle ? 1 2
- Merci de votre attention.