

# Toute la lumière sur l'affaire Van Meegeren

Daniel PERRIN

Ce texte est la rédaction d'une conférence donnée aux journées nationales de l'APMEP le 23 octobre 2016. Je remercie vivement les organisateurs de ces journées de m'avoir invité à faire cette conférence.

Si j'ai choisi ici de parler d'équations différentielles et de modélisation – ce qui n'est pas mon domaine habituel – c'est pour trois raisons. D'abord, j'ai eu envie de me sortir de mes thèmes de conférences favoris (la géométrie, les nombres premiers et la cryptographie, l'expérimentation en mathématiques ou les problèmes ouverts, entre autres, voir [3]), thèmes que je ressasse depuis de nombreuses années : ce n'est pas parce que je suis retraité que je dois nécessairement radoter ! Ensuite, je trouve que l'histoire de Van Meegeren, faussaire contraint de se revendiquer comme tel, est magnifique, indépendamment des mathématiques et j'aime bien raconter des histoires, mon côté grand-père sans doute. Enfin, je pense que ce thème est très intéressant pour l'enseignement, même si les équations différentielles ne sont plus au programme de terminale. Je ne manquerai d'ailleurs pas de dire un petit mot, à peine polémique, à propos de ces programmes.

**Avertissement** La version initiale de ce texte comportait un grand nombre de reproductions de tableaux. J'en ai supprimé la plupart afin de diminuer le poids du fichier. Le lecteur les trouvera à l'une des adresses suivantes :

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Johannes\\_Vermeer](https://fr.wikipedia.org/wiki/Johannes_Vermeer)

<http://www.grandspeintres.com/vermeer/galerie.php>

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Han\\_van\\_Meegeren](https://fr.wikipedia.org/wiki/Han_van_Meegeren)

[http://www.essentialvermeer.com/misc/van\\_meegeren.html](http://www.essentialvermeer.com/misc/van_meegeren.html)

## 1 Vermeer et Van Meegeren

### 1.1 Vermeer, peintre de la lumière

Johannes Vermeer (dit Vermeer de Delft) (1632-1675), les dates sont importantes, est un peintre flamand, parfois appelé peintre de la lumière. Pour comprendre ce surnom, le lecteur pourra regarder reproductions présentes sur Wikipedia, notamment *La femme au collier de perles* (Staatmuseum, Berlin) et la *Vue de Delft* (Mauritshuis, La Haye).

Au XIX-ième siècle, Vermeer est tombé dans l'oubli, témoin l'exemple du célèbre tableau *La jeune fille à la perle* (Mauritshuis, La Haye)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/La\\_Jeune\\_Fille\\_a\\_la\\_perle](https://fr.wikipedia.org/wiki/La_Jeune_Fille_a_la_perle)

qui a été vendu 2 florins (plus 30 centimes de frais!), ce qui correspond à une dizaine d'euros d'aujourd'hui : une affaire! En revanche, dès le début du XX-ième siècle il est devenu très en vogue, comme le montre cette citation de Proust à propos de la vue de Delft :

*Enfin il fut devant le Vermeer qu'il se rappelait plus éclatant, plus différent de tout ce qu'il connaissait, mais où, grâce à l'article du critique, il remarqua pour la première fois des petits personnages en bleu, que le sable était rose, et enfin la précieuse matière du tout petit pan de mur jaune. Ses étourdissements augmentaient; il attachait son regard, comme un enfant à un papillon jaune qu'il veut saisir, au précieux petit pan de mur. C'est ainsi que j'aurais dû écrire, disait-il. Mes derniers livres sont trop secs, il aurait fallu passer plusieurs couches de couleur, rendre ma phrase en elle-même précieuse, comme ce petit pan de mur jaune.*

(Marcel Proust, *La Prisonnière*, cinquième tome d'*À la recherche du temps perdu*, 1923)

Les tableaux de Vermeer ont donc pris beaucoup de valeur et ce d'autant plus que sa production est minime : environ 35 œuvres.

## 1.2 Van Meegeren

### 1.2.1 L'histoire

Han Van Meegeren (Figure 1), né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures. En 1945, à la fin de la seconde guerre mondiale, l'épuration bat son plein aux Pays-Bas et les collaborateurs des nazis sont pourchassés. Le 29 mai 1945, Van Meegeren est arrêté pour avoir vendu à Hermann Göring, le numéro deux du régime nazi, grand amateur d'art, un tableau de Vermeer : *Jésus et la femme adultère* (Figure 2). Il risque la peine de mort pour haute trahison.

Pour se défendre, il révèle que ce tableau est un faux qu'il a lui-même peint<sup>1</sup> ainsi que de nombreux autres Vermeer, dont les fameux *Disciples d'Emmaüs* (voir Figure 3 ci-dessous).

Malheureusement pour lui, personne ne le croit car tous pensent qu'il s'agit là d'un système de défense pour éviter la peine capitale. D'autant que

---

1. C'est moi qui l'ai fait, comme dit Valérie Lemerrier! voir [http://www.dailymotion.com/video/x9d961\\_publicite-gateau-delifrance-c-est-m\\_webcam](http://www.dailymotion.com/video/x9d961_publicite-gateau-delifrance-c-est-m_webcam)

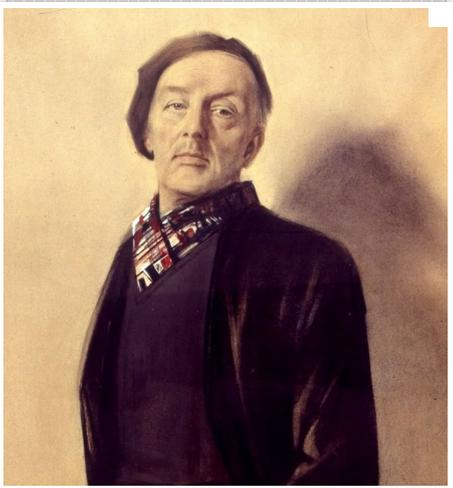


FIGURE 1 – Van Meegeren : autoportrait

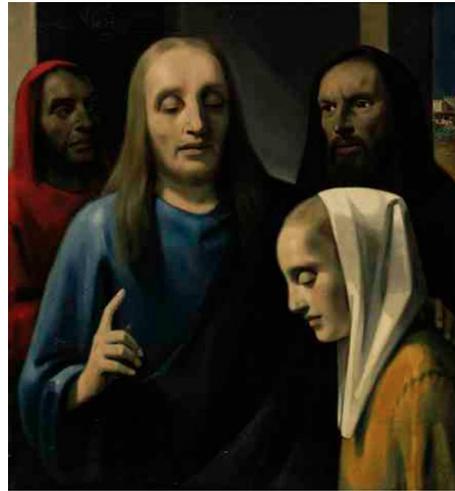


FIGURE 2 – Le Christ et la femme adultère

*Les disciples d'Emmaüs* avaient été vendus en juin 1938 au musée Boymans de Rotterdam (il y est toujours) pour une somme équivalente à 4 millions de dollars actuels et authentifiés par le plus grand expert de l'époque, Abraham Brédius. Voilà ce que dit Bredius : *Grâce à Dieu, cette oeuvre magnifique est sortie de l'ombre où elle se trouvait, immaculée, intacte comme si elle venait tout droit de l'atelier de l'artiste* et il ajoute *Nous avons ici un chef-d'oeuvre, je dirais LE chef-d'oeuvre de Vermeer, un de ses tableaux les plus grands par ses dimensions, une oeuvre totalement différente de toutes les autres, et dont pourtant chaque pouce ne peut être que de Vermeer.*

Alors, pour convaincre les incrédules, dans sa cellule, entre juillet et septembre 1945, Van Meegeren peint, devant témoins, un autre faux Vermeer *Jésus parmi les docteurs*, voir Figure 4.

Même s'il est moins réussi que les autres tableaux incriminés, cela ébranle les magistrats. Une commission d'enquête est nommée, dirigée par Paul Corremans<sup>2</sup>. Elle procède à une analyse scientifique du tableau et reconnaît que les tableaux sont des faux (voir ses arguments en 1.2.3 ci-dessous). Il faut toutefois reconnaître que le doute reste possible. En tous cas, en octobre 1947 Van Meegeren est condamné à un an de prison seulement ... pour faux. Hélas, il meurt d'une crise cardiaque en décembre 1947.

L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés. Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert

---

2. Chimiste de formation et expert pour l'authentification des œuvres d'art (1908-1965).



FIGURE 3 – Les disciples d'Emmaüs

et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, *Les Disciples d'Emmaüs* et *La dernière Cène*, sont d'authentiques Vermeer. Un armateur et collectionneur, Daniel van Beuningen, qui avait acheté *La dernière Cène* (qui a évidemment perdu presque toute sa valeur), exige que Paul Coremans admette publiquement qu'il s'est trompé. Devant son refus, il l'attaque en justice et réclame une indemnité de 10 millions de dollars américains actuels. Il est débouté en 1956.

Ce n'est qu'en 1967 que l'Artists Material Center de l'université Carnegie Mellon de Pittsburgh apporte une preuve définitive que les prétendus Vermeer ne peuvent dater de cette époque, grâce à une datation au plomb. C'est là qu'interviennent les mathématiques, comme je vais l'expliquer plus loin.

Pour la petite histoire, signalons que les tableaux de Van Meegeren ont pris une certaine valeur avec le temps. *La dernière Cène* a été vendue aux enchères 350000 francs à Paris en 1995, une exposition a été consacrée à Van Meegeren au Kunsthal de Rotterdam de février à juin 1996, et, comble de la reconnaissance, on trouve maintenant de faux ... Van Meegeren !

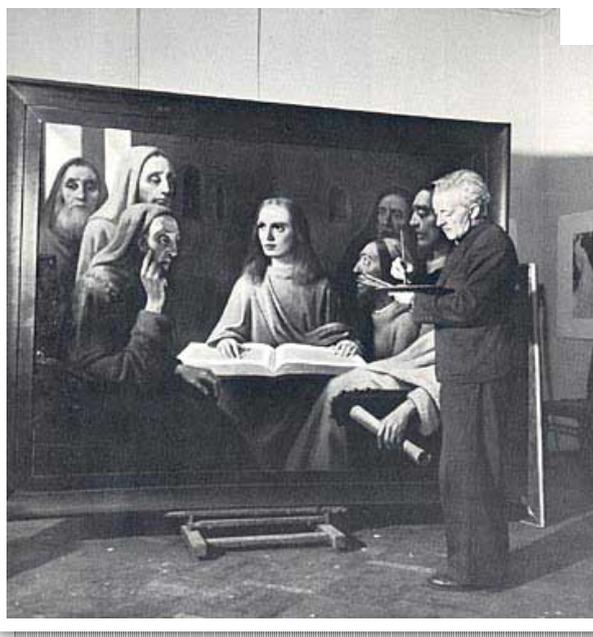


FIGURE 4 – Van Meegeren peignant *Jesus parmi les docteurs*

### 1.2.2 Une parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

Il est intéressant de comprendre comme Van Meegeren a pu bernier tous les experts de l'époque. Il y a pour cela plusieurs éléments<sup>3</sup>.

D'abord, un aspect psychologique. Comme peintre, Van Meegeren s'estime injustement décrié par les critiques et la confection de faux indétectables est une sorte de vengeance à leur égard.

Son travail de faussaire s'étale sur une longue période : 1932-1937, dans un endroit tranquille, à Roquebrune, dans le sud de la France. Pour avoir des supports authentiques, il utilise des tableaux sans valeur du XVII<sup>e</sup>-ième siècle desquels il enlève la peinture à la pierre ponce. Il prépare ses propres pigments en se servant de matériaux analogues à ceux utilisés à l'époque : pour le blanc, la céruse ou blanc de plomb, pour le bleu, une pierre rare, le lapis lazuli, et pour le rouge, un minéral à base de mercure, le cinabre. Il a recours à des pinceaux en poils de blaireau, du type de ceux que Vermeer aurait utilisés.

Ses connaissances en chimie sont aussi essentielles. Dans les années 1930, pour déterminer si un tableau est d'époque, les experts procèdent principa-

---

3. Ce paragraphe est largement inspiré du blogue *La science du faux*, d'Ariel Fenster, 25 février 2011. Voir aussi [6].

lement au test à l'alcool : les pigments d'un tableau ancien se polymérisent avec le temps et résistent quand ils sont frottés avec un coton imbibé d'alcool, ce qui n'est pas le cas avec un tableau fraîchement peint, où la peinture déteint. Pour contrer ce test, Van Meegeren a l'idée d'utiliser un vernis à base de bakélite, un polymère synthétique qui durcit à la chaleur.

Le génie du faussaire réside aussi dans le choix du thème des disciples d'Emmaüs. Il sait que l'expert qui sera responsable de l'authentification du tableau, Abraham Bredius, soutient que Vermeer a été influencé par le peintre italien Le Caravage (1571-1610). Comme une des œuvres du Caravage s'intitule *Souper à Emmaüs*<sup>4</sup>, Van Meegeren peint son tableau sur ce thème et dans le style du Caravage et la vanité de Brédius fait le reste.

### 1.2.3 Les arguments de Coremans

Voici le détail des raisons qui ont conduit la commission Coremans à décider que les pèlerins d'Emmaüs étaient un faux (voir [6] p. 80).

1) Les peintures anciennes n'ont que trois couches : le vernis, la peinture et le fond tandis que le tableau en a cinq.

2) Van Meegeren utilise (un peu, pour diluer l'autre) du bleu de cobalt qui n'a été découvert qu'au XIX-ième siècle.

3) La radiographie montre que les fissures des tableaux anciens sont plus profondes que celles de Van Meegeren (qu'il a obtenues en roulant les tableaux autour d'un tube).

4) On décèle la présence de bakélite.

Ces arguments semblent valables, mais, comme on l'a vu, ils n'ont pas emporté l'adhésion universelle.

## 2 Quelques rappels de physique et de mathématiques

Pour des détails on pourra consulter [10] sur ma page web.

### 2.1 L'équation différentielle linéaire du premier ordre

Les programmes de lycée du début des années 2000 avaient privilégié l'étude des équations différentielles en terminale S, allant même jusqu'à changer l'ordre traditionnel d'introduction du logarithme et de l'exponentielle en

---

4. Ce thème a inspiré beaucoup d'artistes, voir :

[http://www.professeurs-medecine-nancy.fr/Diaporama\\_Emmaus\\_oeuvres\\_citations.pdf](http://www.professeurs-medecine-nancy.fr/Diaporama_Emmaus_oeuvres_citations.pdf)

introduisant cette dernière comme solution de l'équation  $y' = y$ . À l'appui de cette nouveauté, les groupes techniques disciplinaires de mathématiques, physique-chimie et SVT avaient produit des documents d'accompagnement très intéressants sur la radioactivité ([2] et [4]) dont je m'inspire largement ici. Las, les programmes suivants ont jeté à la poubelle tout le travail antérieur, ne gardant que l'introduction de l'exponentielle. C'est pourquoi il m'a semblé utile de faire ici un petit rappel sur le sujet. Je dirai plus loin ce que je pense de la logique de ces programmes.

Je suppose ici seulement que l'on connaît les propriétés essentielles de la fonction exponentielle et notamment le fait qu'elle est sa propre dérivée.

### 2.1.1 L'équation toute nue

Rappelons le résultat :

**2.1 Théorème.** *Les solutions de l'équation différentielle (\*) :  $y' = \alpha y$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , sont les fonctions  $f(x) = Ce^{\alpha x}$  avec  $C \in \mathbf{R}$ .*

*Démonstration.* Il est clair que les fonctions  $y(x) = Ce^{\alpha x}$  sont solutions de (\*). Il suffit maintenant d'une idée – simple, mais géniale – pour conclure : celle de la variation de la constante. On cherche les solutions sous la forme  $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$ , ce qui revient à poser  $z(x) = y(x)e^{-\alpha x}$ . En dérivant on voit que  $z'$  est nulle, donc  $z$  constante, et on a gagné.

### 2.1.2 Avec un second membre

On s'intéresse maintenant à l'équation l'équation (\*\*) :  $y' - \alpha y = f(x)$  où  $f$  est une fonction continue définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$ . On a d'abord :

**2.2 Théorème.** *La solution générale de (\*\*) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (\*\*) la solution générale de (\*).*

*Démonstration.* Si on a une solution, il est clair que les autres s'obtiennent comme on a dit. Pour l'existence (et souvent pour le calcul direct) on utilise la variation de la constante : on pose  $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$ . Le calcul donne  $z'(x) = f(x)e^{-\alpha x}$  et si  $z$  est une primitive de cette fonction continue sur  $I$ ,  $z$  convient.

**2.3 Remarque.** Dans certains cas particuliers on peut trouver directement une solution de (\*\*). C'est le cas, par exemple, si  $f$  est constante, un polynôme, une fonction exponentielle ou trigonométrique. En particulier, si  $f(x) = e^{\beta x}$  on cherche une solution  $\lambda e^{\beta x}$ , etc.

### 2.1.3 L'équation fonctionnelle

Pour mémoire, rappelons que les exponentielles sont les seules fonctions qui vérifient l'équation fonctionnelle :  $f(x + y) = f(x)f(y)$ . Le résultat qui nous intéresse ici est le suivant, voir [10] pour toutes précisions :

**2.4 Théorème.** *Soit  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  une fonction monotone vérifiant l'équation fonctionnelle  $f(x + y) = f(x)f(y)$ . On suppose qu'il existe un  $x > 0$  tel que  $f(x) \neq 0$ . Alors, il existe  $\alpha \in \mathbf{R}$  tel que l'on ait, pour tout  $x$ ,  $f(x) = e^{\alpha x}$ .*

## 2.2 La décroissance exponentielle

### 2.2.1 Introduction

Les modèles de décroissance exponentielle étudiés ici s'appliquent à une large classe de phénomènes qui concernent aussi bien la dynamique des populations que la radioactivité, l'élimination des médicaments par les organismes, etc. Dans ce qui suit on s'intéressera plus particulièrement à la radioactivité et à son application à la datation.

Dans tous les cas on suppose qu'on est en présence d'une population (de cellules, de molécules, d'atomes, ...) qui varie en fonction du temps  $t$ . On repère cette population par un nombre **réel**  $N(t)$  qui "approche" le nombre entier d'individus, voir 2.6 ci-dessous pour une discussion.

### 2.2.2 Les hypothèses

On suppose qu'on a une population susceptible d'être dans deux états. On les nommera **vie** et **mort**, étant entendu que cela peut être aussi bien Carbone 14 et Carbone 12, Uranium 238 et Radium 226, ou Plomb 210 et 206. On fait les hypothèses suivantes :

1) On suppose qu'on peut passer de l'état de vie à l'état de mort, mais pas l'inverse : il n'y a pas de naissances, le phénomène est **irréversible**.

2) Le changement d'état se fait de manière **aléatoire**.

3) On suppose que les individus en vie sont identiques entre eux : chacun a autant de chances de mourir, il n'y a ni malades, ni faibles, ni forts, le phénomène est **égalitaire**.

4) On suppose que les chances de mourir sont les mêmes au cours du temps : les individus ne vieillissent pas, un individu (vivant) a les mêmes chances de mourir pendant un laps de temps  $h$ , que ce soit au temps 0 ou au temps  $t$ . On parle de loi **sans vieillissement**<sup>5</sup>.

---

5. Outre la radioactivité, le modèle s'applique notamment à l'élimination d'un

### 2.2.3 Modélisation en terme de fréquences

On a donc une population  $N(t) \in \mathbf{R}$ . Au temps  $t = 0$  on a  $N(0) > 0$  (sinon  $N(t)$  est nul pour tout  $t$ ). L'hypothèse 1) dit que la fonction  $N(t)$  est décroissante. L'hypothèse 2) conduit à modéliser la situation en termes de probabilités. L'hypothèse 3) (et la loi des grands nombres) permet de calculer la probabilité de mort durant un certain laps de temps en termes de fréquences. Enfin, l'hypothèse 4) montre que le rapport entre le nombre de morts entre les temps  $t$  et  $t + h$ ,  $h > 0$ , et la population au temps  $t$ , est indépendant de  $t$ . Autrement dit<sup>6</sup> :

$$(*) \quad \frac{N(t) - N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(0) - N(h)}{N(0)}.$$

Intuitivement<sup>7</sup>, ce rapport est la probabilité qu'un individu meure entre les temps  $t$  et  $t + h$ , dite en termes de fréquences : nombre de cas favorables (si j'ose dire s'agissant de morts) sur nombre total de cas.

La relation ci-dessus s'écrit encore :

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = \frac{N(h) - N(0)}{h} \frac{N(t)}{N(0)}.$$

Faisons l'hypothèse supplémentaire que la fonction  $N$  est dérivable en 0. Le taux d'accroissement  $\frac{N(h) - N(0)}{h}$  tend alors vers  $N'(0)$  (négatif) quand  $h$  tend vers 0 et on en déduit que  $\frac{N(t+h) - N(t)}{h}$  tend vers  $\frac{N'(0)}{N(0)}N(t)$  ce qui montre que  $N$  est dérivable partout et vérifie l'équation différentielle  $N'(t) = \frac{N'(0)}{N(0)}N(t)$ . En posant  $\alpha = -\frac{N'(0)}{N(0)}$  on en déduit  $N(t) = N(0)e^{-\alpha t}$ .

**2.5 Remarques.** 1) Le lecteur pointilleux traitera le cas  $h < 0$ .

2) On peut retrouver le résultat sans hypothèse de dérivabilité en utilisant seulement la décroissance de  $N$  et l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, voir 2.4. En développant l'expression (\*) on obtient  $N(t+h)N(0) = N(t)N(h)$ . Si on pose  $G(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$ , la fonction  $G$  vérifie l'équation fonctionnelle  $G(t+h) = G(t)G(h)$ , pour tous  $t, h \in \mathbf{R}^+$ . Comme  $G$  est décroissante, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $G(t) = e^{-\alpha t}$  et on en déduit  $N(t) = N(0)e^{-\alpha t}$ .

**2.6 Remarque.** Voici comment<sup>8</sup> on peut rendre plus rigoureuse l'approche ci-dessus.

---

médicament par l'organisme.

6. On montre que  $N(t)$  ne peut pas s'annuler, voir [10].

7. Voir un traitement plus rigoureux en 2.6 ci-dessous.

8. Voir [2]. Merci à Laurent Miclo de m'avoir expliqué ce point.

On considère d'abord un individu pris individuellement. Il a une durée de vie  $T$  aléatoire et on pose  $p(t) = \mathbf{P}(T \geq t)$ . Les hypothèses montrent que  $p$  est une fonction décroissante, à valeurs dans  $[0, 1]$ , avec  $p(0) = 1$ . La probabilité que l'individu meure entre les temps  $t \geq 0$  et  $t + h$  est une probabilité conditionnelle qui vaut  $f(t, h) := \frac{p(t) - p(t+h)}{p(t)}$ . Avec l'hypothèse de non

vieillesse, on a  $f(t, h) = f(0, h)$ . Un calcul analogue à celui effectué ci-dessus montre que  $p(t)/p(0) = p(t)$  vérifie l'équation fonctionnelle  $p(t+h) = p(t)p(h)$ , donc est de la forme  $p(t) = e^{-\alpha t}$  puisque la fonction est décroissante.

On fixe maintenant un temps  $t$  et on considère la variable aléatoire  $n(t)$  (de Bernoulli) qui est le nombre d'individu (au singulier puisque c'est 0 ou 1) en vie au temps  $t$ . Son espérance est  $p(t) = e^{-\alpha t}$ . Si on a  $N(0)$  individus et si  $N(t)$  est le nombre d'individus au temps  $t$ , ce qui revient à répéter  $N(0)$  fois l'expérience de Bernoulli, la linéarité de l'espérance montre que l'espérance de  $N(t)$  est  $N(0)p(t) = N(0)e^{-\alpha t}$ . Par rapport à ce qui est dit ci-dessus,  $N(0)e^{-\alpha t}$  n'est donc pas  $N(t)$  mais son espérance.

Cela étant, si  $N(0)$  est grand, la loi des grands nombres dit que le rapport  $N(t)/N(0)$  est proche de l'espérance de l'expérience élémentaire, donc de  $p(t) = e^{-\alpha t}$  ce qui signifie que la probabilité  $p(t)$  de survie au temps  $t$  est proche de  $N(t)/N(0)$  : nombre de cas favorables sur nombre total de cas. C'est cette approximation qui a été utilisée ci-dessus.

## 2.3 La radioactivité

Ce paragraphe est fortement inspiré de [2], [4] et [9].

### 2.3.1 Noyaux

Un noyau atomique  $X$  est formé de  $A$  nucléons,  $Z$  protons et  $N = A - Z$  neutrons. On le note  ${}^A_Z X$ , par exemple  ${}^{238}_{92}U$  est l'uranium 238. Souvent on désigne  $X$  en donnant le nom de l'atome (par exemple uranium), ce qui fixe son nombre de protons (qui est son numéro atomique, ici 92) et le nombre total de nucléons  $A$  (par exemple 238), qui varie selon les isotopes<sup>9</sup>.

Pour mémoire, voici les numéros atomiques des éléments qui interviennent dans ce qui suit :  $U = 92$  (uranium),  $Th = 90$  (thorium),  $Pa = 91$  (protactinium),  $Ra = 88$  (radium),  $Rn = 86$  (radon),  $Po = 84$  (polonium),  $Bi = 83$  (bismuth),  $Pb = 82$  (plomb).

---

9. Le plomb, par exemple, qui est de numéro atomique  $Z = 82$ , a 38 isotopes (avec  $A$  compris entre 178 et 215) mais seulement quatre stables : 204, 206, 207 et 208.

### 2.3.2 Pourquoi la radioactivité ?

L'équilibre du noyau résulte de la concurrence entre deux interactions (on néglige la force de gravitation) :

1) l'interaction forte, attractive, entre nucléons (protons ou neutrons), intense, mais de courte portée (moins de  $4 \times 10^{-15} m$ ). Cette interaction contribue à l'énergie du noyau par un terme proportionnel à  $A$  (car chaque nucléon n'agit que sur ses proches voisins).

2) L'interaction électrique (dite "coulombienne", en référence à la loi de Coulomb) entre charges électriques de même nature (ici, les protons). Elle est répulsive, plus faible, mais met en jeu tous les protons et contribue à l'énergie par un terme<sup>10</sup> en  $A^{5/3}$ .

Lorsqu'on est en présence de gros noyaux (avec  $A$  grand, donc aussi  $Z$ ), c'est l'interaction coulombienne qui l'emporte et le noyau devient instable. C'est le cas des noyaux de grand numéro atomique. On a alors des phénomènes de radioactivité.

### 2.3.3 Les différents types de radioactivité

- Si un noyau a trop de neutrons, il émet des électrons : un neutron donne un proton plus un électron. On parle de radioactivité  $\beta^-$ . Exemple : le Bismuth 210,  $Z = 83, N = 127$  donne le Polonium 210,  $Z = 84, N = 127$ . Dans la chaîne de l'uranium il y a de nombreux exemples de  $\beta^-$ , souvent de petites périodes.

- Si un noyau est trop lourd, il émet des noyaux d'hélium :  $Z = N = 2$ , deux protons, deux neutrons (donc  $Z$  diminue de 2 et  $A$  de 4). On parle de radioactivité  $\alpha$ . Exemple : le Radium 226,  $Z = 88, N = 138$ , donne le Radon 222,  $Z = 86, N = 136$ . Dans la chaîne de l'uranium, il y a de nombreux exemples, souvent de grandes périodes.

- Si un noyau a trop de protons, il émet des positrons (ou électrons positifs) : un proton donne un neutron plus un positron. Cette radioactivité (dite  $\beta^+$ ) est rare et jamais naturelle. Exemple : le Carbone 11,  $Z = 6, N = 5$  donne le Bore 11,  $Z = 5, N = 6$ .

- Il y a enfin la radioactivité  $\gamma$  : l'atome passe d'un état excité à un état normal par émission d'un photon.

---

10. Voici comment on peut expliquer cette valeur. La force électrostatique entre deux particules distantes de  $r$  est en  $1/r^2$ , donc l'énergie est en  $1/r$ . Le nombre de particules interagissant est  $Z(Z-1)/2$  qui est de l'ordre de  $A^2$ . Cherchons maintenant la distance moyenne entre deux protons. Appelons  $a$  le rayon d'un nucléon (proton ou neutron). Le volume du noyau est alors de l'ordre de  $Aa^3$ , donc son rayon de l'ordre de  $A^{1/3}$  (à  $a$  près, constant). Mais alors, c'est aussi la distance moyenne  $r$  entre deux protons et on a donc  $r \sim A^{1/3}$  et l'énergie est donc de l'ordre de  $A^2 \times A^{-1/3} = A^{5/3}$ .

**2.7 Remarque.** Il y a trois grandes chaînes d'éléments radioactifs naturels : celle de l'uranium 238 que nous utiliserons, celle du 235 (qui ressemble à l'autre, passe par les mêmes corps : thorium, radium, radon, etc. mais avec des isotopes différents et finit au plomb 207) et celle du thorium 232 qui finit au plomb 208.

### 2.3.4 Période, ou demi-vie

La radioactivité rentre dans le cadre de la décroissance exponentielle car c'est un phénomène aléatoire, irréversible, égalitaire et sans vieillissement. Si l'on note  $p(t)$  la masse du corps radioactif, elle vérifie une équation différentielle  $p'(t) = -\alpha p(t)$  (avec  $\alpha > 0$ ) et on a  $p(t) = p(0)e^{-\alpha t}$ . On appelle **demi-vie ou période** le temps  $\tau$  qui correspond à la désintégration de la moitié de la masse. On a donc  $e^{-\alpha\tau} = 1/2$ , ou encore  $\tau = \ln 2/\alpha$ . Ces demi-vies dépendent fondamentalement des corps. Exemples : pour l'uranium 238, c'est  $4,5 \times 10^9$  ans, pour le carbone 14, c'est 5730 ans, mais pour le radon 220 c'est 56 secondes et pour le polonium 213,  $4 \times 10^{-6}$  secondes. Voir la figure 5 pour la radioactivité provenant de l'uranium 238. On notera les valeurs des périodes de l'uranium, mais aussi du radium (1600 ans) et du plomb 210 (22 ans). La radioactivité  $\alpha$  va vers le bas, la  $\beta^-$  vers le haut.

### 2.3.5 Vitesse de désintégration

La quantité  $-p'(t) = \alpha p(t)$  est la **vitesse de désintégration** (souvent exprimée en nombre d'atomes par minute). C'est elle qu'on mesure. Elle varie en sens inverse de la période et jouera un rôle capital dans ce qui suit.

### 2.3.6 Appareils de mesure

Pour mesurer les vitesses de désintégration, on commence par séparer les composants de nature physico-chimique différente (par exemple le radium et le plomb). On mesure ensuite les rayonnements de chacun.

Il existe plusieurs types d'appareils permettant de mesurer les vitesses de désintégration des corps radioactifs. Le plus célèbre est le compteur Geiger-Müller qui admet de nombreuses variantes, par exemple le CRAB (compteur de radioactivité alpha et beta) utilisé en physique au lycée. Le principe de ces compteurs est d'ioniser le gaz contenu dans le compteur afin qu'il émette des électrons et produise un signal électrique.

Signalons aussi le spectromètre de masse (qui sert plutôt à séparer les isotopes). Là encore, le principe est de vaporiser, puis d'ioniser les atomes. On sépare ensuite les ions en fonction du rapport masse/charge en les déviant

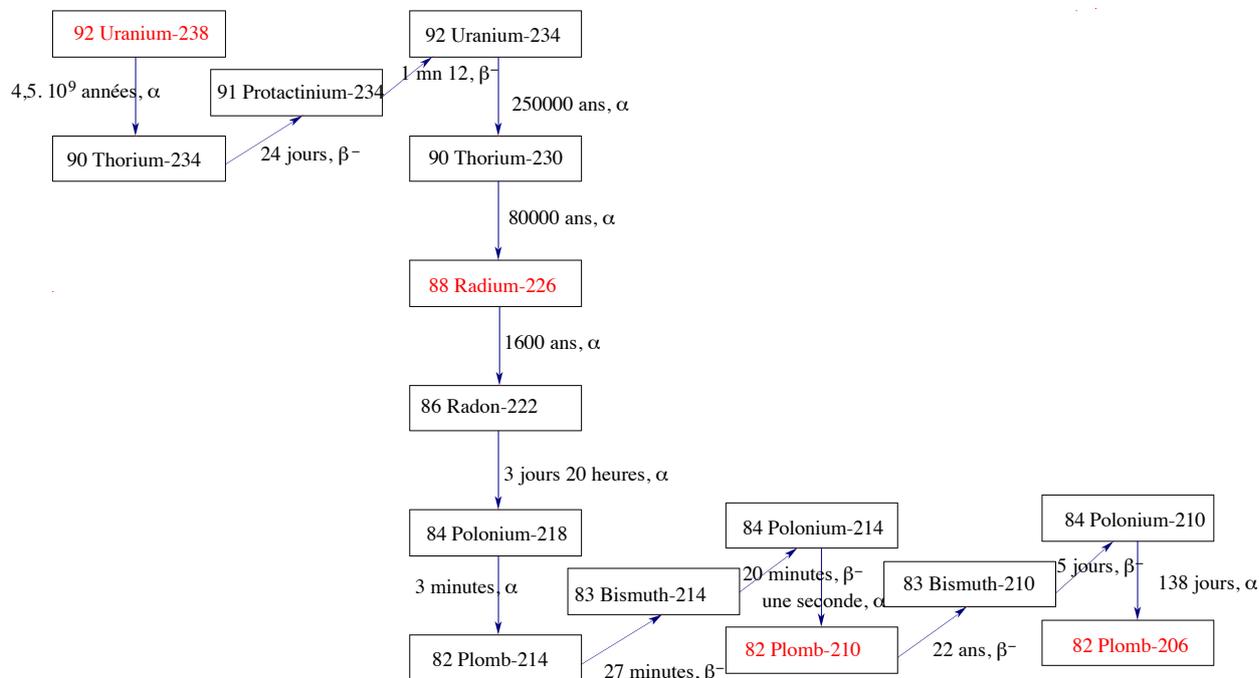


FIGURE 5 – Radioactivité des éléments provenant de l'uranium 238

par un champ magnétique. La déviation est proportionnelle à  $m/q$  et on détecte cela sur une plaque sensible (voir [4]).

## 2.4 L'équilibre radioactif

### 2.4.1 Le cadre

On considère des corps radioactifs  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , etc. de la même filiation radioactive,  $A$  étant un parent de  $B$ ,  $B$  un parent de  $C$ , etc. Cela signifie que  $A$  se désintègre en donnant  $B$ , qui lui-même se désintègre en donnant  $C$ , qui lui-même se désintègre en donnant  $D$ , etc. Dans l'exemple que nous étudierons ci-dessous<sup>11</sup>,  $A$  est l'uranium 238,  $B$  le radium 226,  $C$  le plomb 210 et  $D$  le plomb 206. On se limite d'abord à l'étude comparée des désintégrations de  $A$ ,  $B$  seulement, et l'on suppose que la période du père est (beaucoup) plus grande que celle du fils. On peut appliquer cela avec uranium et radium,

11. En négligeant les intermédiaires de plus petites périodes.

mais aussi, en négligeant dans un premier temps l'influence de l'uranium, à radium et plomb. On suppose donc que  $A$  se désintègre mais ne se renouvelle pas, tandis que  $B$  se désintègre et est renouvelé par  $A$ . Dans un second temps on prendra en compte les trois corps.

### 2.4.2 Constatation expérimentale

Dans la situation ci-dessus avec deux corps radioactifs ou plus, on constate expérimentalement qu'au bout d'un temps assez long<sup>12</sup>, il s'établit un **équilibre radioactif**. Cela signifie que les proportions de chaque corps restent stables : le  $C$  qui disparaît par désintégration en  $D$  est compensé à peu près exactement par celui qui provient de la désintégration de  $B$ , lequel  $B$  est compensé à peu près exactement par celui qui provient de la désintégration de  $A$ . Nous allons expliquer ce phénomène par le calcul.

### 2.4.3 Les équations dans le cas de deux corps

On note  $A(t)$  et  $B(t)$  les nombres d'atomes des deux produits en fonction du temps. On suppose qu'au départ, on a  $A(0) = a > 0$  et  $B(0) = b \geq 0$ .

Dans les deux cas, si l'on isole les désintégrations, elles sont régies par des équations différentielles linéaires :

$$A'(t) = -\alpha A(t) \quad (1) \quad \text{et} \quad B'(t) = -\beta B(t) \quad (2).$$

On note  $\tau_A$  et  $\tau_B$  les périodes de  $A$  et  $B$ . On a  $\alpha = \frac{\ln 2}{\tau_A}$  et de même pour  $B$ .

Attention, si pour  $A$  cette équation est valable sans restriction, puisque qu'on suppose que  $A$  ne se renouvelle pas, pour  $B$  il faut tenir compte de l'apport de la désintégration de  $A$ , et on a donc, en réalité :

$$B'(t) = -\beta B(t) + \alpha A(t). \quad (3)$$

En effet, dans le temps infinitésimal  $dt$ , le nombre d'atomes de type  $B$  qui se désintègrent est  $-\beta B(t)$ , comme on l'a vu, compensé par les  $\alpha A(t)$  atomes de type  $A$  qui deviennent  $B$ .

### 2.4.4 Le résultat

**2.8 Théorème.** *Avec les notations précédentes, si l'on suppose  $\beta > \alpha$ , le rapport des vitesses de désintégration  $\frac{\beta B(t)}{\alpha A(t)}$  tend vers  $\frac{\beta}{\beta - \alpha} = \frac{\tau_A}{\tau_A - \tau_B}$  quand  $t$  tend vers l'infini.*

---

12. On précisera ci-dessous, mais il s'agit de siècles, voire de milliers d'années, c'est pourquoi on parle d'équilibre **séculaire**. Ces durées semblent longues, mais elles sont négligeables par rapport à la période de l'uranium 238 qui est de 4,5 milliards d'années.

Si l'on suppose  $\alpha$  négligeable devant  $\beta$  (ou ce qui revient au même,  $\tau_B$  négligeable devant  $\tau_A$ ), cette limite est très proche de 1.

**2.9 Commentaire.** Autrement dit, pour un temps assez grand, dans un laps de temps  $dt$  infinitésimal, il apparaît autant d'atomes de  $B$  provenant de  $A$  qu'il ne s'en désintègre : on a bien un équilibre radioactif pour  $B$ . On notera que ceci n'est pas vrai pour  $A$  qui ne fait que perdre, mais comme sa période est immense, cette décroissance est infime à l'échelle de  $B$ .

**2.10 Remarque.** Dans le cas uranium-radium, la limite  $\frac{\beta}{\beta-\alpha}$  vaut 1,00000035, dans le cas radium-plomb elle vaut 1,014.

### 2.4.5 Résolution des équations

L'équation (1) ne pose pas de problème et donne  $A(t) = ae^{-\alpha t}$ . On reporte cette quantité dans (3) et on a :

$$B'(t) = -\beta B(t) + \alpha a e^{-\alpha t} \quad \text{ou encore} \quad B'(t) + \beta B(t) = \alpha a e^{-\alpha t}. \quad (4)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, avec un second membre. L'équation sans second membre a pour solution générale  $B(t) = Ce^{-\beta t}$  et il suffit d'ajouter à cette fonction une solution particulière de (4). On cherche cette solution sous la forme  $ce^{-\alpha t}$  et on trouve  $c = \frac{\alpha a}{\beta - \alpha}$ . En définitive, on a donc  $B(t) = Ce^{-\beta t} + \frac{\alpha a}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t}$  et on calcule  $C$  avec la condition initiale  $B(0) = b$ . On trouve :

$$B(t) = be^{-\beta t} + \frac{\alpha a}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}).$$

On en déduit :

$$\frac{\beta B(t)}{\alpha A(t)} = \frac{\beta b}{\alpha a} e^{-(\beta-\alpha)t} + \frac{\beta}{\beta - \alpha} (1 - e^{-(\beta-\alpha)t}).$$

Comme  $\beta - \alpha$  est  $> 0$ , les exponentielles tendent vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  et donc le rapport tend vers  $\frac{\beta}{\beta-\alpha}$  comme annoncé.

**2.11 Remarques.** 1) On voit que la valeur limite du rapport est indépendante des teneurs initiales des produits. En revanche, si  $b$  est non nul, l'écart à la valeur limite dépend de  $a$  et  $b$ .

2) Dans le cas  $b = 0$ , on voit qu'au bout d'un temps égal à 10 fois la période  $\tau_B$ , le rapport des vitesses est égal à sa limite avec une erreur relative d'environ 0,001. Par exemple, pour uranium-radium, c'est le cas au bout de 16000 ans, autant dire rien à l'échelle géologique.

### 2.4.6 Le cas de trois corps

Ce cas est analogue au précédent et nous le présentons de manière plus succincte.

On suppose qu'on a trois corps  $A, B, C$  de la même filiation radioactive,  $A$  étant un parent de  $B$  lui-même parent de  $C$ , encore radioactif. On appelle  $\alpha, \beta, \gamma$  les coefficients de désintégration et on cherche les fonctions  $A(t), B(t), C(t)$  avec les conditions initiales  $A(t) = a, B(t) = C(t) = 0$ . Il n'y a rien à changer au calcul de  $A$  et  $B$ . Pour  $C$ , en vertu des calculs précédents, on a l'équation :

$$C'(t) = -\gamma C(t) + \beta B(t) = -\gamma C(t) + \frac{\alpha\beta a}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

On trouve une solution particulière de cette équation :

$$C_0(t) = \frac{\alpha\beta a}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} e^{-\alpha t} - \frac{\alpha\beta a}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} e^{-\beta t}$$

à laquelle on ajoute  $ce^{-\gamma t}$  en ajustant  $c$  pour avoir la condition initiale  $C(0) = 0$ , ce qui donne :

$$C(t) = \frac{\alpha\beta a}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}) - \frac{\alpha\beta a}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-\gamma t})$$

On en déduit aisément le théorème suivant :

**2.12 Théorème.** *Avec les notations précédentes, si l'on suppose  $\gamma > \beta > \alpha$ , le rapport des vitesses de désintégration  $\frac{\gamma C(t)}{\alpha A(t)}$  tend vers  $\frac{\beta\gamma}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}$  quand  $t$  tend vers l'infini.*

*Si l'on suppose  $\alpha$  négligeable devant  $\beta$  et  $\gamma$  (ou  $\tau_C$  et  $\tau_B$  négligeables devant  $\tau_A$ ), cette limite est très proche de 1.*

## 3 Vermeer ou Van Meegeren

Dans ce paragraphe, j'explique ce qu'ont fait les chercheurs<sup>13</sup> de l'Artists Material Center de l'université Carnegie Mellon de Pittsburgh, voir [5] et [7]. Il s'agit de dater le fameux tableau controversé, les *Disciples d'Emmaüs*, afin de savoir s'il peut être de Vermeer.

---

13. L'idée initiale date de 1928 (Ziegert) mais les techniques de radio-chimie n'étaient pas assez précises à l'époque pour permettre son application.

### 3.1 Le principe

Parmi les couleurs couramment utilisées par les peintres depuis très longtemps, et notamment à l'époque de Vermeer, il y a la céruse, ou blanc de plomb<sup>14</sup>. Il s'agit d'un carbonate de plomb qui contient deux isotopes radioactifs qui font partie de la chaîne radioactive de l'uranium-238 : le plomb-210 et le radium-226, respectivement de périodes 22 ans et 1600 ans, voir le tableau 5.

Le plomb-210 se désintègre en donnant du plomb-206 (un des isotopes ordinaires de plomb, qui n'est plus radioactif) et le radium-226 donne<sup>15</sup> du plomb-210. Ce qu'il faut bien comprendre ici c'est que, dans le minerai dont est extrait le plomb, il y a un équilibre radioactif comme on l'a vu ci-dessus : le plomb-210 qui se désintègre est remplacé **à l'identique** par la désintégration du radium-226, elle-même équilibrée par celle de l'uranium-238. En revanche, lors du traitement du minerai en vue d'en extraire le plomb, 90 à 95 % du radium et de l'uranium sont éliminés avec les scories, tandis que le plomb 210 radioactif, qui a les mêmes propriétés physico-chimiques que l'isotope stable 206, l'accompagne dans le minerai purifié. Le plomb utilisé en peinture contient donc une quantité importante de plomb 210 dont **la désintégration en plomb 206 n'est plus compensée par celle du radium** et sa teneur diminue de façon mesurable au cours du temps jusqu'à retrouver l'équilibre avec la petite fraction restante de radium.

### 3.2 Les équations

Fixons les notations. On note  $p(t)$  (resp.  $r(t)$ ) le nombre d'atomes de plomb-210 (resp. de radium-226) par gramme de blanc de plomb au temps  $t$ , dans le tableau que l'on examine. Comme on l'a expliqué plus haut, on voit ce nombre comme un réel. Lorsque ces éléments sont isolés, ils se désintègrent avec des lois comme celles vues ci-dessus :  $p'(t) = -\lambda p(t)$  et  $r'(t) = -\mu r(t)$ , et les constantes  $\lambda, \mu$  (que l'on exprime en nombre d'atomes par minute) se calculent à partir des périodes. Précisément, le coefficient  $\lambda$  est donné par  $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$  où  $\tau$  est la période du plomb-210, donc 22 ans ou encore  $\tau = 22 \times 365 \times 24 \times 60 = 11,5632 \times 10^6$  minutes. Cela donne  $\lambda = 5,9944 \times 10^{-8}$ . De même on a  $\mu = 8,24 \times 10^{-10}$ .

En réalité, comme il reste encore du radium malgré le traitement du minerai, pas assez pour maintenir l'équilibre mais un peu tout de même,

---

14. Interdit de nos jours en raison de sa toxicité.

15. En passant par le radon-222, le polonium-218, le plomb-214, le bismuth-214, le polonium-214, voir Figure 5, mais ces éléments ont des demi-vies tellement petites (moins de quatre jours en tout) qu'on peut négliger ces étapes.

pour établir l'équation différentielle du phénomène, il faut tenir compte de la désintégration du plomb, mais aussi de celle du radium. L'équation est alors  $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r(t)$ , puisque la désintégration du radium redonne du plomb.

Cette équation peut se résoudre directement comme on l'a fait plus haut, mais, comme la période du radium (1600 ans) est beaucoup plus grande que celle du plomb (22 ans) et qu'elle est très grande aussi par rapport aux temps qui sont en jeu (environ 300 ans entre Vermeer et nous), on peut supposer en première approximation que  $r(t)$  est constant et égal à  $r$ . Pour voir ce qui change si l'on ne fait plus cette approximation, voir 3.4 ci-dessous.

On a donc l'équation différentielle simplifiée  $p'(t) = -\lambda p(t) + \mu r$ . La résolution est alors évidente et on obtient :

$$(*) \quad p(t) = \frac{\mu r}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) + p_0 e^{-\lambda t}.$$

Dans cette formule,  $p_0$  est la quantité de plomb au temps  $t = 0$  et  $r = r_0$  celle de radium.

Ici, il y a deux solutions pour le choix du temps origine : on peut prendre le moment de la confection du tableau, et parcourir le temps vers le futur, ou mettre l'origine au moment de l'examen du tableau (1967) et remonter le temps. C'est cette option que nous prenons ici car elle est un peu plus simple. On désigne alors par  $T < 0$  le moment de la peinture (l'époque de Vermeer, soi-disant). L'invariant utile est encore la vitesse de désintégration  $\lambda p(t)$  (exprimée en nombre d'atomes par gramme de plomb et par minute). On a ainsi la formule :  $\lambda p(t) = \mu r_0 + (\lambda p_0 - \mu r_0)e^{-\lambda t}$  pour un temps  $t$  quelconque, qui donne, pour le temps  $T$  la relation :

$$e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0}.$$

Dans cette formule, on **mesure**<sup>16</sup>  $\lambda p_0 = 8,5$ . C'est le nombre d'atomes de plomb-210 désintégrés par minute et par gramme de minerai dans le tableau, mesuré en 1967 comme expliqué plus haut. On mesure aussi  $\mu r_0$ , vitesse de désintégration du radium dans la peinture en 1967, qui vaut<sup>17</sup> 0,8.

En revanche, on ignore ce que vaut  $\lambda p(T)$ , vitesse de désintégration du plomb 210 à l'époque de la confection du tableau.

16. En réalité, on mesure plutôt la vitesse de désintégration du Polonium 210, qui est à peu près la même en vertu des calculs effectués au paragraphe précédent. Il y a plusieurs raisons, voir [7], c'est un corps différent du plomb, donc plus facile à séparer par des procédés physico-chimiques et il émet des noyaux d'hélium (ou particules  $\alpha$ ) plus gros, donc plus faciles à compter.

17. On affirme parfois que le fait que ces valeurs soient très éloignées indique que le tableau est récent, cf. [5] ou [1]. Ce n'est pas faux, mais, en réalité, les choses sont un peu plus complexes. Voir paragraphe 5.3.

### 3.3 La ruse

La méthode est assez subtile et consiste à majorer  $\lambda p(T)$ . Comme on l'a dit, à l'époque de Vermeer, ou plutôt au moment de l'extraction du minerai, il y avait équilibre radioactif entre les trois composants uranium 238, radium 226 et plomb 210. Cela signifie que la vitesse de désintégration  $\lambda p(T)$  était la même que celle de l'uranium  $\alpha u(T)$ , où  $\alpha$  est la constante de l'équation de la désintégration de l'uranium et  $u(T)$  le nombre d'atomes d'uranium par gramme de minerai de plomb au temps  $T$ . Bien entendu, le nombre  $\alpha$  est connu : la période de l'uranium étant  $T = 4,51 \times 10^9$  années, soit  $4,51 \times 10^9 \times 525600$  minutes, on a  $\alpha = \ln 2/T = 2,924 \times 10^{-16}$ .

En ce qui concerne le nombre  $u(T)$ , on peut considérer qu'il n'a pas changé depuis le 17-ième siècle et qu'il est égal à ce qu'il vaudrait aujourd'hui, soit  $u_0$  (car  $|T|$  est de l'ordre de 300 ans au plus alors que la période de l'uranium est de  $4,51 \times 10^9$  années). Le problème c'est qu'en revanche, la teneur en uranium<sup>18</sup> est très variable selon les minerais. En moyenne elle est de  $2,7 \times 10^{-6}$  grammes d'uranium dans un gramme de minerai, mais elle peut aller, dans des cas très rares de minerais américains (qu'il est peu plausible que Vermeer ait utilisé), jusqu'à 3%.

Nous allons faire le calcul dans ce cas extrême, ce qui nous donnera une valeur maximale pour  $\alpha u_0$ , donc pour  $\lambda p(T)$  et donc pour  $|T|$ . Si nous supposons que la teneur en uranium est de 3%, c'est-à-dire qu'il y a 0,03 gramme d'uranium dans un gramme de blanc de plomb, cela correspond à  $u_0 = \frac{6,02 \times 10^{23} \times 0,03}{238} \sim 7,59 \times 10^{19}$  atomes d'uranium par gramme de minerai (car 238 grammes est la masse d'une mole d'uranium qui contient le nombre d'Avogadro  $6,02 \times 10^{23}$  d'atomes). La vitesse de désintégration de l'uranium est donc au grand, grand maximum  $\alpha u_0 \sim 22189$  (nombre d'atomes désintégrés par minute et par gramme<sup>19</sup>). L'hypothèse d'équilibre radioactif montre qu'en tous cas  $\lambda p(T)$  ne peut dépasser ce nombre.

Rappelons qu'on a :

$$e^{\lambda|T|} = e^{-\lambda T} = \frac{\lambda p(T) - \mu r_0}{\lambda p_0 - \mu r_0}$$

avec  $\lambda p_0 \sim 8,5$ ,  $\mu r_0 \sim 0,8$  et  $\lambda p(T) \leq 22189$ . On en déduit la majoration  $e^{\lambda|T|} \leq \frac{22189 - 0,8}{7,7} \sim 2881,58$ , donc  $|T| \leq 132892267$  (en minutes), soit, en années,  $|T| \leq 132892267/(60 \times 24 \times 365) \sim 253$  ans. Au plus tôt la peinture

18. C'est-à-dire la proportion d'uranium dans le minerai.

19. Ce chiffre est énorme. Avec la teneur moyenne en uranium, le résultat est de l'ordre de 2 atomes d'uranium désintégrés par minute et par gramme.

daterait donc de 1714, 40 ans après la mort de Vermeer (mort en 1675)! Le tableau ne peut donc pas être un Vermeer.

**3.1 Remarque.** Si l'on pense que le tableau a été peint vers 1934, on a  $|T| = 33$  ans et on trouve une vitesse de désintégration de 22,6 atomes par minute et par gramme, soit une teneur en uranium de  $3 \times 10^{-5}$ . Les mesures montrent que c'est une valeur supérieure à la moyenne, mais qui reste tout à fait plausible.

### 3.4 Variante en tenant compte de la désintégration du radium

Dans le calcul ci-dessus, on a négligé la variation de la concentration en radium entre le temps de la peinture et celui de l'examen du tableau. Prenons maintenant en compte cette variation. On note  $r(t)$  le nombre d'atomes au temps  $t$  (en minutes). On considère que  $r(t)$  est variable, mais on néglige la désintégration de l'uranium<sup>20</sup>. On trouve  $r(t) = r_0 e^{-\mu t}$  où  $r_0$  est la proportion de radium en 1967 (on s'intéresse toujours aux temps négatifs.) En ce qui concerne le plomb, on note<sup>21</sup>  $P(t)$  le nombre d'atomes au temps  $t$  et on a l'équation  $P'(t) = -\lambda P(t) + \mu r(t) = \lambda P(t) + \mu r_0 e^{-\mu t}$ . Le calcul est identique à celui mené en 2.8 ci-dessus et l'on a :

$$\lambda P(t) = \lambda p_0 e^{-\lambda t} + \frac{\lambda \mu r_0}{\lambda - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}).$$

Comme ci-dessus, on connaît  $\lambda, \mu, \lambda p_0, \mu r_0$  et on a la majoration de  $\lambda P(t)$  par  $K$ . En appelant  $T$  le temps en années (lié à  $t$  par la relation  $t = 365 \times 24 \times 60 \times T$ ) écoulé entre la peinture et 1967, on a la formule :

$$F(T) := \lambda P(T) = 8.5 e^{-0.0315T} + 0.811 (e^{-0.00043T} - e^{-0.0315T}).$$

On trace le graphe de la fonction  $F(T)$ , on constate qu'elle est décroissante (voir figure ci-dessous) et il s'agit de trouver la valeur de  $T$  qui correspond à la valeur maximale possible vue ci-dessus  $\lambda P(T) = 22189$ . On peut résoudre cette équation par les méthodes approchées standard ou lire le résultat sur le graphe. On trouve  $T = -252,94$  et on retrouve pour l'âge de la peinture la valeur précédente avec moins d'un an d'écart.

---

<sup>20</sup>. Sinon, on a une équation avec trois corps, à peine plus compliquée, et on vérifie que l'influence de l'uranium est vraiment négligeable.

<sup>21</sup>. On change un peu la notation pour voir les modifications apportées par le nouveau calcul.

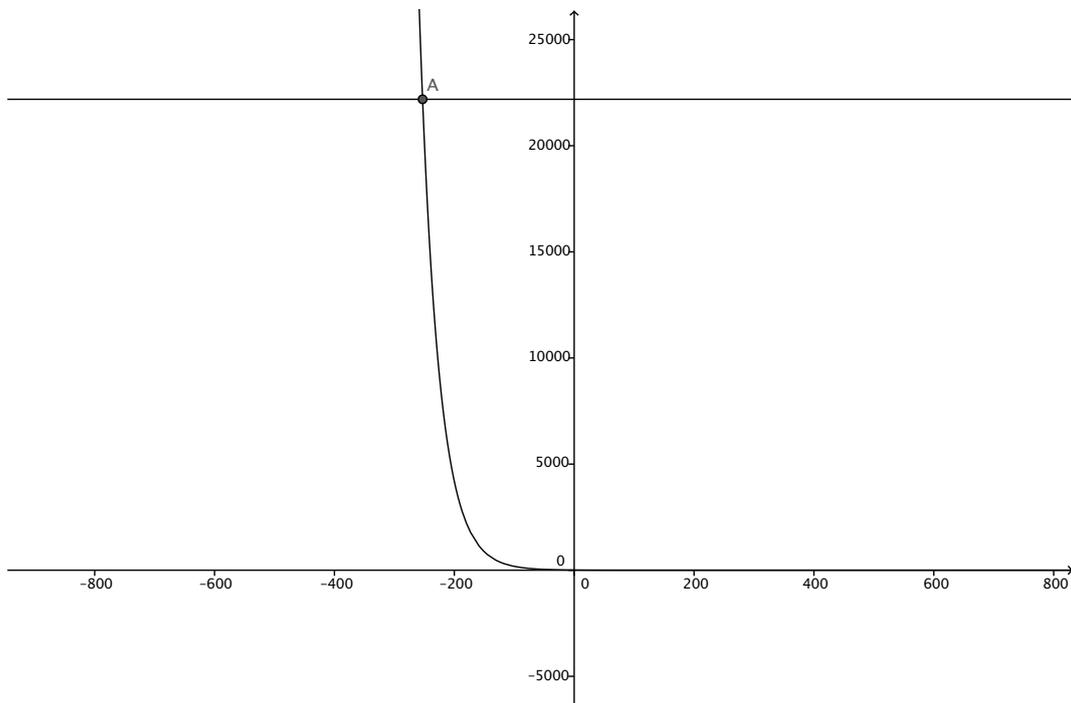


FIGURE 6 – L'âge de la peinture

### 3.5 Un conseil aux apprentis faussaires ?

La méthode de datation précédente fonctionne bien lorsqu'il s'agit d'authentifier des peintures anciennes (XVIII-ième siècle et en-deça). En revanche, à cause des variations des concentrations en uranium dans les minerais de plomb, elle ne s'applique pas bien aux peintures trop récentes et notamment à celles du XX-ième siècle. Ce sont donc celles-là qu'il faut falsifier en priorité<sup>22</sup> ... Voir [8] ou [11] pour des détails.

<sup>22</sup>. Comme plusieurs personnes me l'ont fait remarquer lors de l'exposé oral, une manière de déjouer la datation au plomb serait de disposer de blanc de plomb de l'époque de Vermeer, idéalement les tubes de peinture de l'époque, ou des pigments récupérés sur des tableaux, voire d'en fabriquer à partir de plomb récupéré sur des tuyaux ou autres. Mais tout cela ne semble pas facile à réaliser.

## 4 Discussion

### 4.1 Les experts, les sciences et les mathématiques

Comme on l'a vu avec la déclaration de l'inénarrable Bredius citée ci-dessus, il arrive que les experts se trompent. On peut évidemment se moquer du personnage, mais l'expérience montre que ce genre d'erreurs est encore monnaie courante aujourd'hui, comme on le voit dans le cas de deux faussaires contemporains Wolfgang Beltracchi<sup>23</sup>, voir [8], ou Guy Ribes<sup>24</sup>, voir [11]. De plus, ce qui est vrai dans l'authentification des œuvres d'art l'est aussi dans bien d'autres domaines et je ne suis pas loin de partager l'opinion du physicien Richard Feynman : *La science est la croyance en l'ignorance des experts*.

De fait, l'exemple de l'affaire Van Meegeren est révélateur de l'intérêt pour le citoyen, de connaître un peu de mathématiques, et plus généralement de sciences, pour discuter les affirmations des experts. Mais il montre aussi que, lorsqu'on est confronté à un problème réel, les mathématiques ne sont qu'un élément de la solution et que les difficultés principales sont souvent extra-mathématiques, comme on l'a vu avec le problème de la concentration en uranium des minerais de plomb. Cela ne peut que nous inciter à demeurer modestes et à multiplier les contacts avec nos collègues scientifiques.

### 4.2 Discussion sur l'enseignement

Du point de vue de l'enseignement, le thème de Van Meegeren me semble particulièrement intéressant. D'abord, l'histoire est magnifique et de nature à captiver les élèves. On peut par exemple utiliser ce thème comme support de TPE comme l'ont fait trois lycéens de Limours, Zoé Chambre, Marion Molinier et Gaël Vignes, voir <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Master.html>. Cela étant, il y a tout de même quelques difficultés qu'il ne faut pas occulter.

- D'abord, faire travailler des élèves sur une modélisation vraiment sérieuse n'est pas évident et cela nécessite un minimum d'investissement dans des champs extérieurs aux mathématiques. Ici, il s'agit essentiellement de deux domaines : l'histoire de l'art et la physique. Pour d'autres thèmes cela pourrait être la chimie ou la biologie, etc. On en trouvera quelques exemples dans mon cours de master *Mathématiques et autres disciplines*, notamment les

---

23. Ainsi Werner Spies, ancien directeur du Musée national d'art moderne – centre Pompidou, a authentifié comme des tableaux de Max Ernst sept faux de Wolfgang Beltracchi.

24. Dans ce cas, même la propre fille de Marc Chagall s'y est laissée prendre, disant à propos d'un faux de Ribes : *Je vous assure qu'il est authentique, je me souviens d'avoir vu mon père le peindre*. On notera qu'ici l'expert, Jacques Dupin, penchait pour un faux.

chapitres 4 et 5, <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Master.html>.

- Ensuite, dans le cas de Van Meegeren, l'outil mathématique essentiel est la résolution d'équations différentielles. Or, on sait que les équations différentielles ne sont plus au programme de terminale. Cela étant, ce dont on a besoin ici est vraiment minime et on peut compléter le programme sans trop d'efforts.

- À ce sujet, je ne peux que déplorer l'évolution récente des programmes : alors que ceux de 2002 mettaient l'accent sur les équations différentielles, avec des exemples tout à fait convaincants, elles ont disparu des suivants, tandis que la place des probabilités et des statistiques a encore été renforcée, notamment par l'introduction de la loi normale. Je ne connais pas bien les raisons qui ont présidé à cette décision, le fonctionnement des commissions qui ont fait le travail à cette époque étant assez opaque. J'en imagine plusieurs, toutes aussi discutables les unes que les autres : le lobbying de nos collègues probabilistes et statisticiens<sup>25</sup>, une idéologie discutable qui tend à privilégier les outils de l'aléatoire par rapport aux méthodes déterministes, que sais-je encore ?

Pour ma part, j'ai écrit en d'autres lieux tout le mal que je pensais de l'introduction de la loi normale en terminale, voir <http://publications-sfds.math.cnrs.fr/ojs/index.php/StatEns/issue/view/48>. J'espère donc pour les programmes de Terminale S un sérieux rééquilibrage entre analyse et probabilités. Par chance, les programmes ne sont pas immuables et ce qu'une commission a fait, une autre peut le défaire, *Tempus edax rerum*.

## 5 Annexes

### 5.1 Les articles de Keisch *et al.*

Les annexes ci-dessous apportent quelques compléments, en revenant notamment aux articles originaux [5] et [7]. Voici d'abord quelques précisions concernant les notations de ces articles :

- 1) L'indice 0 correspond au moment du traitement du minerai, donc à peu près au moment où le tableau est peint.

- 2) Ils notent  $[Pb]_t$ ,  $[Ra]$ , etc. (et ils appellent concentrations) ce que je note  $\lambda p(t)$ ,  $\mu r$ , etc.

- 3) Leur équation est  $[Pb]_t - [Ra] = ([Pb]_0 - [Ra])e^{-\lambda t}$ , ce qui revient à l'équation (\*) donnée ci-dessus :

$$(*) \quad \lambda p(t) - \mu r = (\lambda p_0 - \mu r)e^{-\lambda t}.$$

---

25. Certains d'entre eux, et non des moindres, commencent à penser qu'on est allé trop loin.

4) Ils introduisent un invariant  $SF$  appelé **facteur de séparation** :

$$SF := [Pb]_0/[Ra] = \frac{\lambda p_0}{\mu r}.$$

5) Avec cette quantité ils obtiennent l'équation :

$$1 - \frac{[Ra]}{[Po]} = \frac{(SF - 1)e^{-\lambda t}}{(SF - 1)e^{-\lambda t} + 1}$$

dans laquelle les concentrations sont  $[Po] = \lambda p(t)$  (avec le polonium, voir ci-dessous) et  $[Ra] = \mu r$ . On vérifie que cette formule est équivalente à (\*) en plus compliquée ...

## 5.2 Plomb ou polonium ?

Dans la pratique, voir [5] ou [7], ce qu'on mesure n'est pas la radioactivité du plomb 210, mais celle du polonium 210. Il y a deux raisons à cela :

### 5.2.1 C'est justifié

En effet, la vitesse de désintégration du plomb 210 est aussi celle du polonium 210, à peu de choses près. On est en présence d'un problème à 3 corps comme en 2.12 ci-dessus (ici  $A$  est le Plomb 210,  $B$  le Bismuth 210,  $C$  le Polonium 210 et  $D$  le Plomb 206). On a vu que  $\gamma C(t)/\alpha A(t)$  tend vers une limite  $k := \beta\gamma/(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)$  quand  $t$  tend vers l'infini. En remplaçant  $\alpha$  par  $\ln 2/\tau$  et en tenant compte des périodes, on voit que l'on a  $k = \frac{22^2 \times 365^2}{(22 \times 365 - 5)(22 \times 365 - 138)} \simeq 1,0181$  qui est effectivement proche de 1.

Bien entendu, il faut aussi vérifier que le temps est assez grand pour que le rapport des vitesses soit proche de sa limite. Ici le plus gros terme de l'erreur est de l'ordre de  $e^{-(\gamma-\alpha)t} = e^{-\ln 2(\frac{1}{138} - \frac{1}{22 \times 365})t}$  et c'est  $< 10^{-2}$  (resp.  $< 10^{-6}$ ) pourvu que le temps (en jours) soit  $> 1070$  (resp.  $> 2798$ ) donc que 3 ans (resp. 7 ans 8 mois). Comme on travaille sur une durée supposée de 300 ans, c'est tout à fait suffisant.

### 5.2.2 C'est plus facile

Pourquoi regarder le polonium plutôt que le plomb ? Contrairement à la radioactivité du plomb qui est de type  $\beta$ , celle du polonium est de type  $\alpha$ , c'est-à-dire qu'il émet des noyaux d'hélium, plus gros, donc plus faciles à compter, voir [7] (Keisch dans [5] dit qu'il est plus "sensitive").

### 5.3 Un principe et sa discussion

Le principe qui apparaît dans [5] et [7] et qui est repris dans [1] est le suivant :

**Principe :** *Le plomb moderne contient du plomb 210 (ou du polonium 210) en excès par rapport au radium 226, mais pas le plomb ancien. Plus précisément, si l'on note respectivement  $A, \alpha$  et  $B, \beta$  le radium et le plomb 210 et leurs coefficients de désintégration, le rapport  $\frac{\beta B}{\alpha A}$  (c'est-à-dire le coefficient  $SF$ ) est voisin de 1 dans le cas du plomb ancien, mais plus grand dans le cas du plomb moderne.*

Cet argument, s'il n'est pas vraiment erroné, est tout de même un peu trop rapide. Reprenons le calcul de 2.8 en prenant pour  $A$  le radium et pour  $B$  le plomb **radioactif**. Le rapport des vitesses est donné par la formule :

$$\frac{\beta B(t)}{\alpha A(t)} = \frac{\beta b}{\alpha a} e^{-(\beta-\alpha)t} + \frac{\beta}{\beta-\alpha} (1 - e^{-(\beta-\alpha)t}).$$

On a  $\beta \simeq 6 \times 10^{-8}$  et  $\alpha = 8,24 \times 10^{-10}$ . On suppose que les Disciples d'Emmaüs sont de Vermeer et on met l'origine au temps de Vermeer, avec les valeurs initiales  $a, b$ . Il s'écoule un temps de 300 ans soit  $300 \times 365 \times 24 \times 60$  minutes et on sait que les vitesses de désintégrations en 1967 sont  $\alpha A \simeq 0,8$  (atomes par minute) et  $\beta B \simeq 8,5$ . Le rapport est d'environ 10,6, très loin de la valeur limite  $\beta/(\beta-\alpha) \simeq 1,014$ . Comme l'exponentielle  $e^{-(\beta-\alpha)t}$  vaut environ 0,000088, l'écart de 9,6 ne peut provenir que du premier terme et cela impose un rapport  $b/a \simeq 1500$ . Il s'agit de voir pourquoi c'est absurde.

Le terme  $a$  (appelé aussi  $r_0$  ci-dessus) est supposé ne pas changer entre Vermeer et nous. On a  $\alpha a \simeq 0,8$ , d'où  $a = 0,8/\alpha \simeq 970 \times 10^6$ . Avec  $b/a = 1500$ , cela donne  $b = 1500 \times 970 \times 10^6 \simeq 1,45 \times 10^{12}$ . Rappelons que c'est censé être le nombre d'atomes de plomb<sup>26</sup> 210 dans un gramme de minerai, à l'époque de Vermeer.

Par ailleurs,  $\beta b$  est aussi la vitesse de désintégration de l'uranium, au temps de Vermeer (donc aussi au nôtre avec l'approximation usuelle). En effet, avant purification du minerai, ces vitesses sont égales par équilibre radioactif. Comme le traitement n'enlève que les scories, et pas le plomb, même radioactif, il ne change pas  $b$ , donc pas non plus  $\beta b$ . En un mot : beaucoup de plomb radioactif dans le minerai signifie beaucoup d'uranium.

Cela donne pour cette vitesse  $b\beta = 1,45 \times 10^{12} \times 6 \times 10^{-8} \simeq 8,7 \times 10^4 = 87000$ . Or, on a vu ci-dessus (voir 3.3) que dans le cas du minerai à 3% d'uranium, le plus riche possible, cette quantité est  $\leq 22189$ , ce qui réfute le fait que la peinture soit aussi ancienne.

26. Le nombre d'atomes de Pb 206 dans un gramme vaut  $2,9 \times 10^{21}$ , par Avogadro.

On voit que la conclusion est exacte, mais qu'elle requiert toujours l'analyse sur les minerais d'uranium. En réalité, ce qui justifie le principe c'est l'expérience réalisée sur d'autres peintures de l'époque, pour lesquelles le rapport  $\beta B/\alpha A$  est voisin de 1 (ce qui corrobore le fait que les minerais couramment utilisés à l'époque en Europe ne sont pas trop riches en uranium).

## 5.4 Aspects quantitatifs

Reprenons la situation à deux corps  $A, B$  avec des périodes  $\tau_A$  et  $\tau_B$ ,  $\tau_A > \tau_B$ , donc des constantes de désintégration  $\alpha, \beta$ ,  $\alpha = \ln 2/\tau_A$  et  $\beta = \ln 2/\tau_B$ , avec  $\beta > \alpha$ . On suppose qu'au départ on a  $b = B(0) = 0$ . On a vu alors l'expression du rapport des vitesses de désintégration :

$$\frac{\beta B(t)}{\alpha A(t)} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} (1 - e^{-(\beta - \alpha)t})$$

et il en résulte que le rapport des vitesses admet pour limite  $l := \frac{\beta}{\beta - \alpha}$  quand  $t$  tend vers l'infini, ce rapport étant proche de 1 si  $\beta \gg \alpha$ . Deux questions se posent du point de vue quantitatif, eu égard à une précision  $\epsilon = 10^{-N}$  donnée :

- 1) La limite est-elle comprise entre 1 et  $1 + \epsilon$  ?
- 2) À partir de quel temps, le rapport est-il à moins de  $\epsilon$  de la limite ?

### 5.4.1 La limite

Le calcul est facile, on a  $1 < l < 1 + \epsilon$  si et seulement si  $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1 + \epsilon}{\epsilon}$  ou encore  $\frac{\tau_A}{\tau_B} > \frac{1 + \epsilon}{\epsilon} \simeq \frac{1}{\epsilon}$ . Autrement dit, la précision est à peu près le rapport des périodes. Par exemple pour U 238 et Ra 226 ce rapport est de l'ordre de  $10^{-7}$ , mais pour Ra 226 et Pb 210 il est de l'ordre de  $10^{-2}$  et pour Pb 210 et Po 210 aussi.

### 5.4.2 L'approche

Il s'agit de savoir quand la quantité  $e^{-(\beta - \alpha)t}$  est  $< \epsilon = 10^{-N}$ . La condition est  $t > N \frac{\ln 10}{\ln 2} \frac{\tau_A \tau_B}{\tau_A - \tau_B}$ .

Si on néglige  $\tau_B$  devant  $\tau_A$ , on trouve  $t > N \frac{\ln 10}{\ln 2} \tau_B \simeq 3.3N\tau_B$ . Autrement dit, pour obtenir une précision de  $10^{-N}$  il faut un temps environ égal à  $3.3N$  fois la petite période. Par exemple, avec  $N = 3$  il faut 10 fois la petite période, donc 16000 ans pour U 238 et Ra 226, 220 ans pour Ra 226 et Pb 210, et 3, 5 ans pour Pb 210 et Po 210.

## 6 Références

### Références

- [1] Braun M. *Differential equations and their applications*, Springer, 1983.
- [2] *Document d'accompagnement pour les programmes de mathématiques*, CNDP, 2002.
- [3] Perrin D. *Conférences*  
<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/conferences.html>
- [4] *Document d'accompagnement pour les programmes de physique-chimie*, CNDP, 2002.
- [5] Keisch B. *Dating Works of Art through their natural radioactivity : Improvements and applications*, Science, 160, 413-415, April 1968.
- [6] Keisch B., *Secrets of the past : Nuclear Energy Applications in Art and Archeology*, U.S. Atomic Energy Commission, 1972. Disponible sur Internet : <http://www.osti.gov/includes/opennet/includes/Understanding%20the%20Atom/Nuclear%20Energy%20Applications%20in%20Art%20and%20Archeology.pdf>
- [7] Keisch B., Feller R., Levine A.S., Edwards P.R., *Dating and authenticating Works of Art by Measurement of Natural Alpha Emitters*, Science 155, 1238-1241, March 1967.
- [8] Koldehoff S., Timm T., *L'affaire Beltracchi*, Actes-Sud, 2013.
- [9] *Laradioactivité.com*, site de l'IN2P3,  
<http://www.laradioactivite.com/fr/site/pages/Accueil.htm>
- [10] Perrin D., *Mathématiques et autres disciplines, chapitre 3*  
<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/interdisciplines/Cours3equadiff1-11.pdf>
- [11] Ribes G. et Péretié J.-B., *Autoportrait d'un faussaire*, Presses de la Cité, 2015.