Les mathématiques : utiles ? vivantes ? accessibles ?

Daniel et Marie-Jeanne PERRIN

18 octobre 2012

À la mémoire de François Colmez

Introduction

- Les mathématiques ont mauvaise presse.
  • Certains mettent en doute leur utilité (récemment Andrew Hacker dans le New-York Times : *faut-il arrêter d'enseigner les mathématiques à l'école ?*).
  • D'autres pensent qu'elles sont mortes (Claude Allègre : *L'ordinateur va nous conduire à reconsidérer les mathématiques comme un auxiliaire des sciences*).
  • D'autres enfin les jugent inaccessibles et dénoncent la dictature qu'elles exercent dans l'enseignement.

Introduction

- Les mathématiques ont mauvaise presse.
  • Certains mettent en doute leur utilité (récemment Andrew Hacker dans le New-York Times : *faut-il arrêter d'enseigner les mathématiques à l'école ?*).
  • D'autres pensent qu'elles sont mortes (Claude Allègre : *L'ordinateur va nous conduire à reconsidérer les mathématiques comme un auxiliaire des sciences*).
  • D'autres enfin les jugent inaccessibles et dénoncent la dictature qu'elles exercent dans l'enseignement.
- Nous allons essayer de répondre à ces trois points.

Octobre 2006 N° 351

Les mathématiques sont utiles

Il n'est pas facile de dire à quoi servent les mathématiques. Pourtant elles sont présentes partout, dans les sciences, les outils technologiques, mais aussi la médecine, l'économie, etc. Mais on est confronté à deux difficultés :

- elles ne sont pas apparentes,
- elles ne sont pas faciles.

Nous allons essayer de donner quelques exemples, en restant à un niveau relativement élémentaire (sans dépasser le lycée).

À quoi servent les fonctions ?

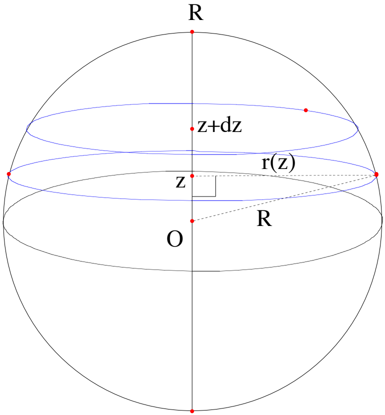
Parmi les thèmes que l'on étudie au lycée le plus important est sans doute celui des fonctions et c'est sur ce thème que nous allons mettre l'accent. En effet, les notions de variable et de fonction, qui traduisent le fait qu'une quantité **dépend** d'un ou plusieurs paramètres, sont essentielles dans tous les domaines des sciences (expérimentales, humaines, économiques) et même dans la vie courante.

À quoi servent les fonctions : le calcul différentiel et intégral

Pour étudier les fonctions, les notions de dérivée et d'intégrale (inventées par Newton et Leibniz vers 1650) fournissent un outil fantastique, qui constitue un progrès essentiel de l'humanité, ramenant au niveau d'un lycéen des problèmes autrefois très difficiles. C'est le cas du calcul du volume de la sphère, réalisé par Archimède, un sommet des mathématiques de l'antiquité, qui devient un exercice pour un élève de terminale.

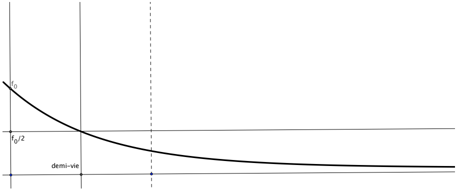
Archimède et la sphère

Par Pythagore : $r(z)^2 = R^2 - z^2$.
Volume de la tranche :
$dV = \pi(R^2 - z^2)dz$.
Volume total :
$$2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\,dz = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



À quoi servent les fonctions, suite

Les fonctions apparaissent notamment au travers des équations différentielles qui relient une fonction et sa dérivée.



Par exemple l'équation $y' = ay$ de la radioactivité est utilisée en archéologie (datation au Carbone 14), ou pour déterminer l'âge de la terre (datation au Rubidium-Strontium) ou encore pour détecter des faux en peinture, témoin la belle histoire de Van Meegeren.

Woman Reading Music
Han van Meegeren
1935-1936
Rijksmuseum, Amsterdam

Voir http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/Master.html

À quoi servent les fonctions : l'unité des mathématiques

L'une des forces des mathématiques est leur aspect **unificateur**. La même équation peut servir dans de nombreux domaines :

- L'équation $y' = ay$ de la radioactivité décrit aussi l'élimination des médicaments ou de l'alcool.

À quoi servent les fonctions : l'unité des mathématiques

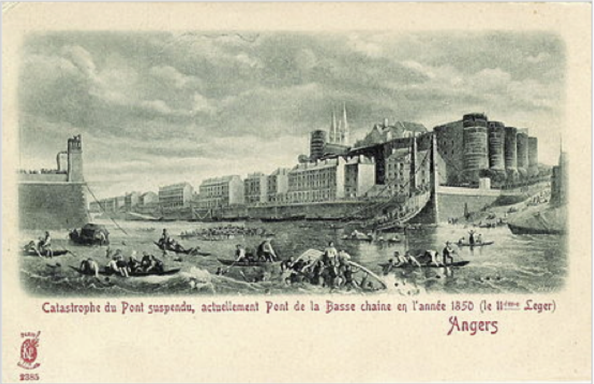
L'une des forces des mathématiques est leur aspect **unificateur**. La même équation peut servir dans de nombreux domaines :

- L'équation $y' = ay$ de la radioactivité décrit aussi l'élimination des médicaments ou de l'alcool.
- l'équation logistique $y' = ay(m - y)$ est pertinente pour décrire l'évolution d'une population ou la diffusion d'une épidémie.

À quoi servent les fonctions : l'unité des mathématiques

L'une des forces des mathématiques est leur aspect **unificateur**. La même équation peut servir dans de nombreux domaines :

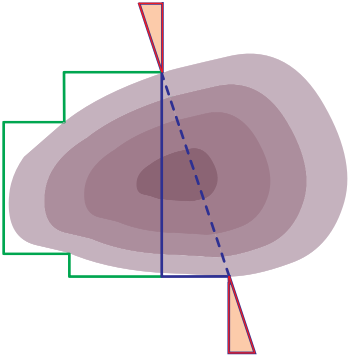
- L'équation $y' = ay$ de la radioactivité décrit aussi l'élimination des médicaments ou de l'alcool.
- l'équation logistique $y' = ay(m - y)$ est pertinente pour décrire l'évolution d'une population ou la diffusion d'une épidémie.
- L'équation du second ordre $ay'' + by' + vy = f(t)$ est fondamentale en électricité, en hydraulique, en mécanique, etc. (notamment pour décrire les phénomènes de résonance).



La rupture du pont de la Basse-Chaîne à Angers en 1850

À quoi sert la géométrie ?

Un exemple historique : la construction du tunnel de Samos selon Héron d'Alexandrie (voir Tom Apostol, *The tunnel of Samos* sur Internet)



À quoi sert la géométrie, suite

- Aujourd'hui, elle est notamment utile en architecture, pour la construction de voûtes et de maillages, ou encore en imagerie (par exemple pour le recollement d'images, utilisé dans les projets de véhicules sans pilotes).

À quoi sert la géométrie, suite

- Aujourd'hui, elle est notamment utile en architecture, pour la construction de voûtes et de maillages, ou encore en imagerie (par exemple pour le recollement d'images, utilisé dans les projets de véhicules sans pilotes).
- Mais l'intérêt principal de la géométrie est ailleurs : le fait de penser géométriquement, de pouvoir produire, sur n'importe quel sujet, des images, des représentations, et d'être capable de les utiliser, est essentiel dans tous les domaines et justifie l'enseignement de la géométrie.

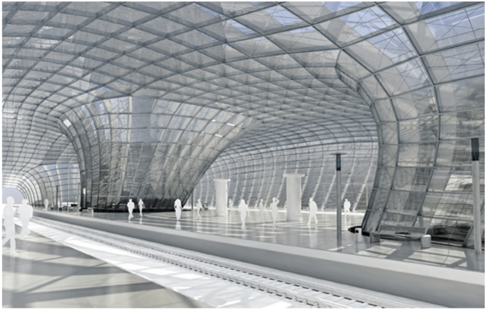
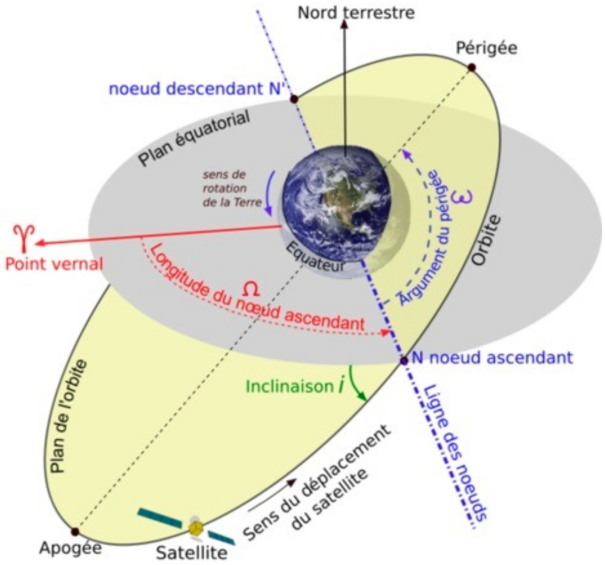


Figure 7 This mesh which possesses a face-face offset at constant distance has been created by an iterative design process which employs subdivision and optimization using both (2) and (3) in an alternating way (image courtesy B. Schneider).

Les mathématiques qui ne servent pas aujourd'hui serviront peut-être demain. Exemple 1 : les coniques

- Lorsque les Grecs étudiaient les coniques (c'est-à-dire les sections des cônes par des plans, ellipse, parabole, hyperbole), il s'agissait de mathématiques "pures", c'est-à-dire qui n'avaient pas d'applications.
- Depuis, Kepler ($\sim$ 1610) est arrivé ...


Nord terrestre
Périgée
noeud descendant N'
Plan équatorial
sens de
rotation
de la Terre
♈
Point vernal
Equateur
Longitude du nœud ascendant
Ω
Argument du périgée
ω
Orbite
N noeud ascendant
Inclinaison i
Ligne des noeuds
Plan de l'orbite
Sens du déplacement
du satellite
Apogée
Satellite

Exemple 2 : l'arithmétique

- Si en 1970 on avait demandé à un mathématicien : *à quoi servent les nombres premiers ?* Il aurait répondu : à rien, on les étudie *pour l'honneur de l'esprit humain* (comme disait Jacobi vers 1850)

Exemple 2 : l'arithmétique

- Si en 1970 on avait demandé à un mathématicien : *à quoi servent les nombres premiers ?* Il aurait répondu : à rien, on les étudie *pour l'honneur de l'esprit humain* (comme disait Jacobi vers 1850)
- et il aurait peut-être ajouté, comme notre collègue R. Godement : *au moins, quand on fait de l'arithmétique, on ne travaille pas pour la bombe atomique !*

Exemple 2 : l'arithmétique

- Si en 1970 on avait demandé à un mathématicien : *à quoi servent les nombres premiers ?* Il aurait répondu : à rien, on les étudie *pour l'honneur de l'esprit humain* (comme disait Jacobi vers 1850)
- et il aurait peut-être ajouté, comme notre collègue R. Godement : *au moins, quand on fait de l'arithmétique, on ne travaille pas pour la bombe atomique !*
- Grave erreur ...

Le code RSA (Rivest-Shamir-Adleman) et les nombres premiers

Il s'agit d'un procédé de codage récent (1978) et simple (niveau terminale S), très utilisé dans les transactions bancaires (et aussi ... par les militaires). L'intérêt de ce code est qu'il est à clé publique : même si l'on connaît la clé de codage, on ne peut pas en déduire une clé de décodage. Le principe est le suivant :

- On sait fabriquer de très grands nombres premiers p et q, disons de 200 chiffres.
- Les multiplier est un jeu d'enfant pour une machine.
- Pour des nombres de cette taille (400 chiffres) **on ne sait pas** retrouver p et q à partir de leur produit pq.
- Pour coder un message il suffit de connaître le produit pq (public), pour le décoder il faut connaître p **et** q (secrets).

Les mathématiques sont vivantes : il reste beaucoup de problèmes à résoudre

Peut-être serez-vous étonnés de savoir qu'il y a beaucoup de questions sans réponses en mathématiques et que la recherche y est très active : on dit couramment qu'il s'est fait plus de mathématiques nouvelles depuis 1945 que de l'origine des temps à 1945.

Cependant, l'énoncé des problèmes actuels est en général incompréhensible (exemple : *le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen-Macaulay est-il connexe ?* ou les problèmes du millenium), sauf en arithmétique et c'est donc là que nous allons choisir nos exemples.

Il reste beaucoup de problèmes à résoudre en mathématiques : quelques exemples autour des nombres

Nous venons de voir l'importance des nombres premiers pour la cryptographie. Il y a beaucoup de questions ouvertes sur ce thème. En voici une.

À partir de 10, les nombres premiers se terminent par $1, 3, 7, 9$. Voici une dizaine riche où les quatre possibles sont premiers : $11, 13, 17, 19$.

- Y a-t-il d'autres dizaines riches ?

Il reste beaucoup de problèmes à résoudre en mathématiques : quelques exemples autour des nombres

Nous venons de voir l'importance des nombres premiers pour la cryptographie. Il y a beaucoup de questions ouvertes sur ce thème. En voici une.

À partir de 10, les nombres premiers se terminent par $1, 3, 7, 9$. Voici une dizaine riche où les quatre possibles sont premiers : $11, 13, 17, 19$.

- Y a-t-il d'autres dizaines riches ?
- On sait depuis Euclide qu'il y a une infinité de nombres premiers, mais y a-t-il une infinité de dizaines riches ?

Et les dizaines pauvres ?

- Existe-t-il des dizaines pauvres (sans nombre premier) ?

- Et des centaines pauvres ?

- Peut-on trouver un million de nombres de suite sans aucun nombre premier ?

Pour se distraire : la suite de Collatz

- On part d'un entier n. S'il est pair on le divise par 2.

Pour se distraire : la suite de Collatz

- On part d'un entier n. S'il est pair on le divise par 2.
- S'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1, il devient pair et on recommence.

Pour se distraire : la suite de Collatz

- On part d'un entier n. S'il est pair on le divise par 2.
- S'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1, il devient pair et on recommence.
- **Exemples** $n = 7$, $n = 27$, etc.

Pour se distraire : la suite de Collatz

- On part d'un entier n. S'il est pair on le divise par 2.
- S'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1, il devient pair et on recommence.
- **Exemples** $n = 7$, $n = 27$, etc.
- **Conjecture :** La suite de Collatz finit toujours par revenir à 1.

Pour se distraire : la suite de Collatz

- On part d'un entier n. S'il est pair on le divise par 2.
- S'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1, il devient pair et on recommence.
- **Exemples** $n = 7$, $n = 27$, etc.
- **Conjecture :** La suite de Collatz finit toujours par revenir à 1.
- **Question subsidiaire :** À quoi ça sert ?

Un exemple de Jean-Paul Delahaye, ou pourquoi prouver quand on a fait des milliards d'expériences ?

- Soit n un entier.

  Les nombres $n^{17}+9$ et $(n+1)^{17}+9$ sont-ils toujours premiers entre eux ?

Un exemple de Jean-Paul Delahaye, ou pourquoi prouver quand on a fait des milliards d'expériences ?

- Soit n un entier.

  Les nombres $n^{17}+9$ et $(n+1)^{17}+9$ sont-ils toujours premiers entre eux ?
- **Réponse :** C'est vrai longtemps, longtemps, mais ... c'est faux pour :

  $$n = 8\,424\,432\,925\,592\,889\,329\,288\,197\,322\,308\,900\,672\,459\,420\,460\,792\,433,$$

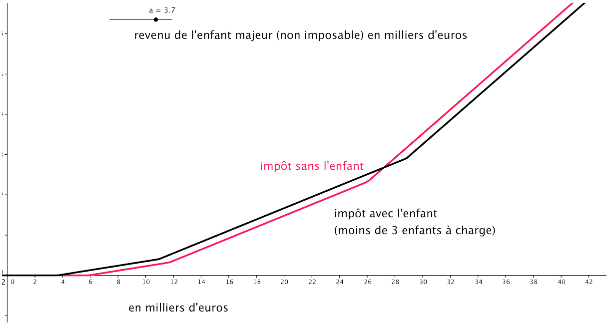
  facteur commun :

  $$r = 8\,936\,582\,237\,915\,716\,659\,950\,962\,253\,358\,945\,635\,793\,453\,256\,935\,559.$$

Dans la vie courante : les impôts

On entend souvent dire : *Oui, mais si je gagne plus, je vais franchir une tranche et au final, je vais y perdre.*
C'est tout à fait faux.

Une question plus délicate : quand a-t-on intérêt à demander le rattachement d'un enfant majeur et non imposable au foyer fiscal de ses parents ?


a = 3.7
revenu de l'enfant majeur (non imposable) en milliers d'euros
impôt sans l'enfant
impôt avec l'enfant
(moins de 3 enfants à charge)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
42
en milliers d'euros

Dans la vie courante : annuités d'un prêt

Il n'est pas difficile (c'est un exercice classique de Terminale ES) de calculer le montant des annuités a d'un prêt connaissant le capital prêté c, le taux annuel t et le nombre d'années N.
Voici le résultat :

$$a = \frac{ct(1+t)^N}{(1+t)^N - 1}$$

La nécessité des outils

La formule précédente :

$$a = \frac{ct(1+t)^N}{(1+t)^N - 1}$$

ou celle utilisée dans la datation au plomb des Van Meegeren :

$$p(t) = \frac{\mu r}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}\right) + p_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

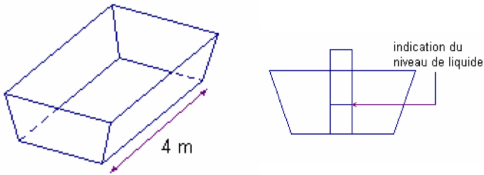
montrent bien que l'utilisation des mathématiques nécessite une certaine maîtrise du calcul algébrique et trigonométrique. C'est une des difficultés incontournables de l'enseignement des mathématiques.

La nécessité des outils ... et aussi du lien entre les outils et le contexte

Un abreuvoir a la forme d'un prisme de longueur $4\,m$ dont les extrémités intérieures sont deux trapèzes isocèles identiques de petite base $60\,cm$, de grande base $80\,cm$ et de hauteur $40\,cm$. Une jauge est placée verticalement contre l'un des trapèzes. On se propose de la graduer, c'est-à-dire de préciser le niveau de liquide correspondant à 100 litres, 200 litres, etc.

La formule de calcul du volume du prisme $B \times h$ est rappelée.

- Polysémie du mot base.
- Expression des grandeurs dans des unités compatibles.



Dans la vie courante : pour gagner aux jeux télévisés

- Il s'agit d'un jeu télévisé américain. Dans ce jeu le candidat a devant lui trois portes. Derrière l'une de ces portes il y a une voiture et derrière chacune des autres, une chèvre.

Dans la vie courante : pour gagner aux jeux télévisés

- Il s'agit d'un jeu télévisé américain. Dans ce jeu le candidat a devant lui trois portes. Derrière l'une de ces portes il y a une voiture et derrière chacune des autres, une chèvre.
- Si le candidat désigne la porte derrière laquelle se trouve la voiture, il la gagne.

Dans la vie courante : pour gagner aux jeux télévisés

- Il s'agit d'un jeu télévisé américain. Dans ce jeu le candidat a devant lui trois portes. Derrière l'une de ces portes il y a une voiture et derrière chacune des autres, une chèvre.
- Si le candidat désigne la porte derrière laquelle se trouve la voiture, il la gagne.
- Le jeu se passe ainsi. Le candidat désigne une porte. Le présentateur (qui sait où se trouve la voiture) n'ouvre pas cette porte, mais en ouvre une autre, derrière laquelle se trouve une chèvre.

Dans la vie courante : pour gagner aux jeux télévisés

- Il s'agit d'un jeu télévisé américain. Dans ce jeu le candidat a devant lui trois portes. Derrière l'une de ces portes il y a une voiture et derrière chacune des autres, une chèvre.
- Si le candidat désigne la porte derrière laquelle se trouve la voiture, il la gagne.
- Le jeu se passe ainsi. Le candidat désigne une porte. Le présentateur (qui sait où se trouve la voiture) n'ouvre pas cette porte, mais en ouvre une autre, derrière laquelle se trouve une chèvre.
- Le candidat a droit à un autre essai dans lequel il peut maintenir son choix initial ou en changer. À votre avis, doit-il le maintenir, en changer, ou est-ce indifférent ?

Mathématiques et apprentissage du raisonnement

Ce dernier exemple montre une autre fonction des mathématiques, plus importante encore pour tous les citoyens, qui est de contribuer à l'apprentissage du raisonnement :

Les mathématiques permettent de comprendre la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, elles font le lien entre le général et le particulier, elles conduisent à organiser la pensée, à catégoriser les problèmes.
Elles forcent à expliciter les évidences, à décomposer les difficultés, à enchaîner les résultats, à dénombrer tous les cas possibles : elles sont la logique cartésienne en action.

Jean-Pierre Kahane

La pensée fonctionnelle

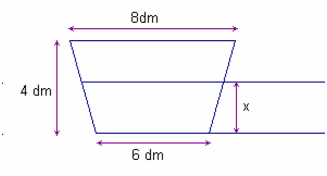
Repérer des variables, leur domaine de variation, les relations entre elles est utile bien au-delà des mathématiques et des sciences. Plus généralement, une caractéristique des mathématiques est de travailler sur des représentations. C'est ce qui en fait à la fois la puissance et la difficulté. Cela demande :

- De pouvoir mettre en relation les différents registres de représentation.
- De pouvoir changer de point de vue, développer différents points de vue et les mettre en relation...
- Dans le cas des fonctions :
  – Le registre algébrique
  – Le registre graphique
  – Le registre du calcul

L'identification des variables et de leurs relations dans le problème de l'abreuvoir

Revenons au problème de l'abreuvoir.

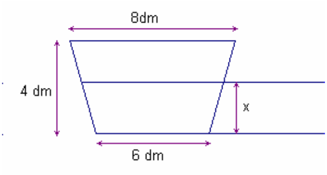
- Volume de liquide en fonction de la hauteur ou hauteur en fonction du volume de liquide ?



L'identification des variables et de leurs relations dans le problème de l'abreuvoir

Revenons au problème de l'abreuvoir.

- Volume de liquide en fonction de la hauteur ou hauteur en fonction du volume de liquide ?



- Plusieurs grandeurs variables à identifier :
  - la hauteur d'eau dans l'abreuvoir x,
  - le volume d'eau dans l'abreuvoir $V(x)$,
  - l'aire du trapèze utile $A(x)$,
  - la grande base de ce trapèze $L(x)$.

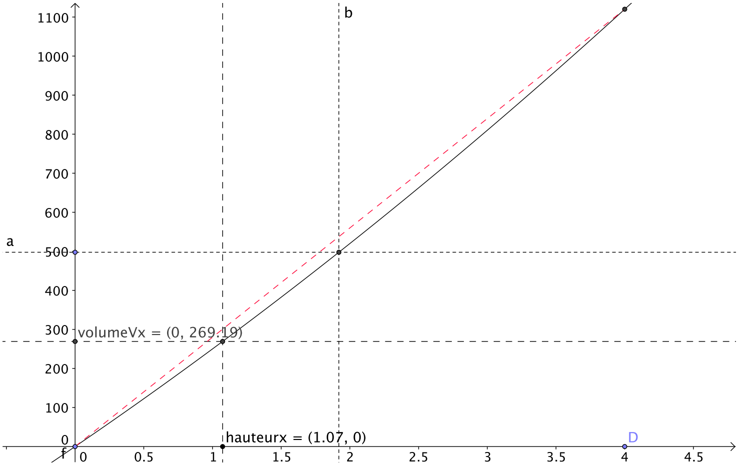
Les registres de traitement du problème de l'abreuvoir

• Les relations : $L(x) = 6 + 0,5x$; $A(x) = 6x + 0,25x^2$; $V(x) = 10x^2 + 240x$; x varie entre 0 et 4 (décimètres).

• Registre algébrique : résoudre 11 équations du second degré $10x^2 + 240x = 100$ etc.

• Registre numérique : faire des essais de hauteur à la calculatrice ; organisation d'un tableau, résolution par approximation.

• Registre graphique : représenter la fonction V ; choisir le bon intervalle et la bonne échelle pour que le graphique soit utilisable et lire le graphique à l'envers : pour V fixé, on trouve x.


1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
a
b
f
D
volumeVx = (0, 269.19)
hauteurx = (1.07, 0)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

• Mise en relation de registres : *Quelle hauteur d'eau pour un volume de* 500 *litres ?*

– Sur le graphique, je lis environ $1{,}9$.

– Vérification par le calcul : $10 \times 1{,}9^2 + 240 \times 1{,}9 = 492{,}1$ ce n'est pas assez, mais $10 \times 2 + 240 \times 2 = 520$, c'est trop.

– Résolution algébrique $10x^2 + 240x = 500$ se ramène à $x^2 + 24x = 50$ qui peut s'écrire $(x + 12)^2 - 144 = 50$ ou encore $(x + 12)^2 = 194$, donc $x + 12 = 13,9$ au dixième près, soit $x = 1,9$, ce qui correspond bien à ce qu'on lit sur le graphique.

Des compétences utiles hors des mathématiques

La notion de fonction : un outil pour organiser et traiter des variations qu'on perçoit dans une situation.

- Lecture de graphique, choix de la bonne échelle
- Organisation des données
- Repérage des grandeurs et de leurs relations . . .

L'aspect cumulatif des mathématiques

On voit sur cet exemple l'utilité du calcul algébrique et des représentations graphiques pratiqués dans les classes antérieures.

Ce n'est pas en abordant des problèmes de cette complexité qu'on peut en même temps travailler le calcul algébrique en soi ; il faut une certaine disponibilité technique.

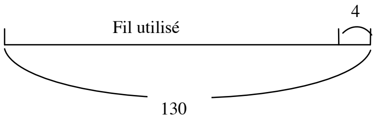
Identifier les grandeurs et leurs relations. Un problème plus élémentaire : le fil électrique

- Monsieur Durand veut faire une installation électrique nouvelle dans trois pièces de sa maison. Il estime qu'il lui faut $130\,m$ de fil électrique, 4 interrupteurs et 9 prises ainsi que des douilles. Il lui reste d'une précédente installation $37\,m$ de fil électrique qu'il va utiliser. Il est donc obligé de racheter du fil. Après avoir terminé son installation, il s'aperçoit qu'il a utilisé $4\,m$ de fil de moins que prévu et qu'il lui en reste $11\,m$. Quelle longueur de fil a-t-il achetée ?

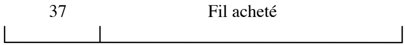
Identifier les grandeurs et leurs relations. Un problème plus élémentaire : le fil électrique

- Monsieur Durand veut faire une installation électrique nouvelle dans trois pièces de sa maison. Il estime qu'il lui faut $130\,m$ de fil électrique, 4 interrupteurs et 9 prises ainsi que des douilles. Il lui reste d'une précédente installation $37\,m$ de fil électrique qu'il va utiliser. Il est donc obligé de racheter du fil. Après avoir terminé son installation, il s'aperçoit qu'il a utilisé $4\,m$ de fil de moins que prévu et qu'il lui en reste $11\,m$. Quelle longueur de fil a-t-il achetée ?
- Ce problème a été posé à 250 professeurs des écoles des cycles 2 et 3 et à des formateurs des autres disciplines : seulement 20% de réponses correctes. Pourquoi ?

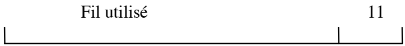
Représentation des grandeurs et de leurs relations



prévisions



Fil disponible avant la pose



Bilan sur l'utilisation du fil disponible après la pose

Des solutions arithmétiques

- Une première solution
  - Longueur de fil utilisée : $130–4 = 126$
  - Longueur de fil disponible avant la pose : $126 + 11 = 137$
  - Longueur achetée : $137–37 = 100$

  On ne suit pas du tout l'ordre du texte ni la chronologie pour trouver la solution : le 37 n'intervient qu'à la fin.

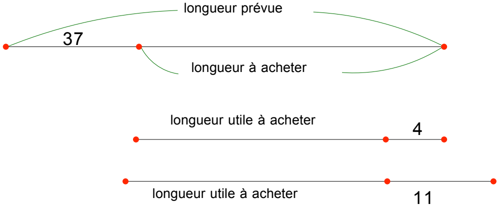
Des solutions arithmétiques

- Une première solution
  - Longueur de fil utilisée : $130–4 = 126$
  - Longueur de fil disponible avant la pose : $126 + 11 = 137$
  - Longueur achetée : $137–37 = 100$

  On ne suit pas du tout l'ordre du texte ni la chronologie pour trouver la solution : le 37 n'intervient qu'à la fin.
- Une deuxième solution qui suit davantage l'ordre du texte :
  - Fil à acheter selon la prévision : $130–37 = 93$
  - Mais il avait trop prévu ; il aurait dû acheter $93–4 = 89$
  - Il lui reste 11 donc il a acheté $89 + 11 = 100$

  Mais il faut raisonner finement sur les hypothèses.

Des solutions arithmétiques



- Dans la vie courante, si on a $37\,m$ et qu'on en prévoit $130\,m$, on achète $100\,m$ pour en avoir un peu plus et un compte rond. C'est d'ailleurs la solution finalement !

Analyse du problème

• Dans les solutions arithmétiques, c'est le langage et le repérage des grandeurs qui soutient la résolution.

- On peut identifier trois moments
  - Avant d'acheter le fil, après l'achat, après la pose

Analyse du problème

• Dans les solutions arithmétiques, c'est le langage et le repérage des grandeurs qui soutient la résolution.

- On peut identifier trois moments
  – Avant d'acheter le fil, après l'achat, après la pose
- et sept grandeurs (voire plus) dont quatre sont connues :
  – Avant : la longueur de fil dont on dispose au début, longueur de fil prévue
  – Après l'achat : longueur de fil achetée, longueur de fil dont on dispose pour la pose
  – Après la pose : longueur de fil posé, écart à la prévision, longueur de fil qui reste après la pose.

Solution algébrique

- $x =$ longueur de fil achetée
  - Fil disponible avant la pose : $x + 37$
  - Fil utilisé : $x + 37–11 = 130 - 4$

Solution algébrique

- $x =$ longueur de fil achetée
  • Fil disponible avant la pose : $x + 37$
  • Fil utilisé : $x + 37 – 11 = 130 - 4$
- Il faut aussi identifier certaines des grandeurs en jeu et leurs relations.
  • Mais, si on se permet de calculer avec des grandeurs inconnues, on peut réaliser une économie dans les grandeurs qu'on identifie explicitement.
  • Pour poser une équation il faut identifier une quantité qu'on peut exprimer de deux façons.

Discussion

• Le raisonnement arithmétique est essentiellement oral (dans la langue). S'il y a plusieurs étapes, on peut perdre le fil.
• Les mathématiques donnent d'autres outils de représentation et de traitement des problèmes.

• Pourquoi les représentations du problème par des graphiques ou par l'algèbre ne sont-elles pas utilisées par des gens qui ont fait des études supérieures et donc fréquenté les mathématiques au moins jusqu'en seconde ?

Les mathématiques sont-elles accessibles ?

Et d'abord, que veut dire accessibles ?

Disons : est-ce que la plus grande partie de la population peut maîtriser les connaissances mathématiques de seconde de façon :
• à pouvoir s'en servir dans les situations de la vie quotidienne où cela peut être pertinent,
• à soutenir son raisonnement, par exemple pour distinguer ce qui est établi de manière sûre de ce qui n'est qu'une hypothèse ou une opinion ?

Deux ministres et la proportionnalité

Pour prendre conscience des difficultés rencontrées par certains avec les mathématiques, voici des questions posées à deux (ex)-ministres :

Sachant que 4 *stylos valent* $2,42$ *euros combien valent* 14 *stylos ?* (Pas de réponse)

Dix objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent quinze de ces objets ? (Réponse : 16,50 euros !)

Des difficultés inhérentes aux mathématiques. L'exemple de la multiplication.

• On l'introduit dans les entiers au CE1 par addition répétée. La commutativité n'est pas évidente :

– Pourquoi a-t-on la même quantité de cerises dans 8 assiettes contenant chacune 13 cerises que dans 13 assiettes contenant chacune 8 cerises ?

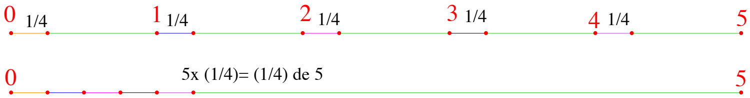
– Pourquoi $13+13+13+13+13+13+13+13+13 = 8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8$?

– On peut s'en tirer en rangeant en rectangle : 8 rangées de 13 en ligne donne 13 colonnes de 8.

L'exemple de la multiplication (suite)

• Mais quand on passe aux fractions et décimaux, 5 fois $\frac{3}{4}$ ou 12 fois $0{,}3$ peut se comprendre comme une addition répétée, mais alors que signifie $\frac{3}{4}$ fois 5 ou $0{,}3$ fois 12 ?

• Pourquoi prendre les $\frac{3}{4}$ de 5 ce serait la même chose que 5 fois $\frac{3}{4}$ au sens de $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$?



Multiplier par un décimal ou une fraction

Trouver le prix d'un rôti de porc de $1{,}35kg$ *à* $46\ F$ *le kg*

• Une élève de 6ème ne comprenait pas pourquoi il fallait multiplier comme elle l'avait vu à la correction.

• Elle savait que c'était entre 46 et 92, elle pouvait trouver le prix de $500g$, $100g$ en l'organisant dans un tableau :

$$1{,}35 \times 46 = 1 \times 46 + 0{,}3 \times 46 + 0{,}05 \times 46$$

$$0,3 \times 46 = 3 \times 4,6$$

$$3 \times 4,6 = (0,1 \times 3) \times (4,6 \times 10)$$

$$0,1 \times 3 = 3 \times 0,1$$

$$2,30 = 0,5 \times 4,60 = 0,05 \times 46$$

poids	prix
1 kg	46 F
500 g	23 F
100 g	4, 60 F
300 g	13,20 F
50 g	2,30 F

Multiplier par un nombre plus petit que 1 vient contredire l'intuition qu'on s'est forgée sur les entiers.

Prégnance du modèle additif (suite)

- Les pourcentages

– Les prix ont augmenté 3 fois de 10% dans l'année. À la fin de l'année, ils n'ont pas augmenté de 30% mais de $33{,}1\%$:
100 donne 110, puis 121, puis $133{,}1$ car augmenter de 10% c'est multiplier par $1{,}1$ et $1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}331$.

– Promotion : 25% de produit en plus, c'est une réduction du prix du produit au kilo de 20% et non de 25%.

Le sens de la multiplication évolue et s'enrichit au fil de la scolarité

- Addition répétée : c'est en fait un opérateur externe sur une grandeur et cela n'a de sens qu'avec un opérateur entier.
- Produit de mesures : exemple aires de rectangles.
- Application linéaire, coefficient de proportionnalité, exemples : agrandissement, prendre les $\frac{3}{4}$ de quelque chose, appliquer un pourcentage, prendre les 15% c'est multiplier par 15 et diviser par 100, donc multiplier par $0{,}15$
- Composition d'applications linéaires, exemple faire deux réductions successives de 20% : $0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$.

Des difficultés inhérentes aux mathématiques. Algèbre et fonctions

• Une difficulté est d'accepter de ne pas coller pas à pas à la réalité.
Histoire vécue : *Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble* $110g$*. La bouteille pèse* $100g$ *de plus que le bouchon. Combien pèsent la bouteille et le bouchon ?*

Réponse spontanée : $100g$ et $10g$.

Mise en équation : si x est la masse du bouchon, la masse de la bouteille est $100+x$, d'où $100+x+x=110$.
Pourquoi deux x *? Il n'y a qu'un bouchon.*

• Non congruence avec la langue :
Il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs : $6E=P$ ou $E=6P$?

Des difficultés inhérentes aux mathématiques. Algèbre et fonctions (suite)

• Les fonctions ont non seulement une expression algébrique mais aussi un domaine, y compris les pourcentages : il faut savoir à quoi on les applique.

Par exemple, une (ex)-ministre a dit, à propos de ses adversaires politiques :

Ils ont augmenté les impôts de 30% *dans le département, de* 58% *dans la région, soit en tout de* 88% *: c'est la double peine.*

Qu'en pensez-vous ?

Les difficultés des ministres avec les mathématiques (suite)

Les 38% d'augmentation pour le département et 50% pour la région ne portent pas sur les mêmes quantités et aucune des deux augmentations ne s'applique au total des impôts locaux :
si d est l'impôt payé pour le département et r celui pour la région, la somme des deux augmentations c'est $0,38d + 0,50r$ et elle est comprise entre $0,38(d+r)$ et $0,50(d+r)$, donc l'augmentation totale est comprise **entre** 38% et 50%.

Des difficultés inhérentes aux mathématiques : la vitesse moyenne

• Un cycliste monte une côte à la vitesse moyenne de $5\,km/h$ et la descend à $35\,km/h$ de moyenne. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ?

• Réponse fréquente : $20\,km/h$ (la moyenne des vitesses) avec éventuellement l'argument que c'est la même distance à l'aller et au retour.

• Si l'on parcourt la même distance à des vitesses différentes, la vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses.

• Raisonnement arithmétique par proportion

Il parcourt la même distance à la montée et à la descente.
Il met sept fois plus de temps à la montée qu'à la descente.
Au total, il parcourt deux fois la distance de la descente pour un temps 8 fois plus grand, donc sa vitesse est le quart de celle de la descente soit $\frac{35}{4}$ ou $8{,}75$.

• Raisonnement arithmétique avec graphique (pré-algébrique) :

Il met un certain temps t pour la descente et on a $d = vt$.
Donc il parcourt (en km) 35 fois ce temps exprimé en heures.
En tout il parcourt 70 fois ce temps pendant une durée 8 fois plus grande donc la vitesse moyenne en km/h est $70/8$, soit $8{,}75$.

• Le raisonnement précédent avec graphique peut se traduire facilement algébriquement :
Soit t le temps de la descente en heures
– temps de la montée : $7t$
– durée totale : $8t$
– longueur de la descente en km : $35t$
– distance parcourue : $70t$
– vitesse moyenne $\frac{70t}{8t}$: on voit qu'on peut simplifier par t donc que la durée n'intervient pas.

• En prenant d comme variable :
$d = 5t_1 = 35t_2$ donc $t_1 = \frac{d}{5}$ et $t_2 = \frac{d}{35}$ et $t_1 = 7t_2$
$v = \frac{2d}{t_1+t_2} = \frac{2d}{8t_2} = \frac{2d}{\frac{8d}{35}} = \frac{70d}{8d}$
On peut simplifier par d donc la distance n'intervient pas.

• Avec un graphique en deux dimensions.

Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?

• Des savoirs cumulatifs, des incontournables essentiels dès le début.

• Mais des changements de points de vue, des virages à prendre des ruptures nécessaires à négocier, en particulier au moment des transitions : les nouveaux savoirs réorganisent les anciens mais en s'appuyant sur eux et sans les remplacer.

• Alors est-ce impossible de se rattraper si on a raté une marche ?

• Non, heureusement ... mais il faut en général changer d'attitude, penser avec les mathématiques au lieu d'essayer d'apprendre ce qu'il faut faire.

• Enseigner des techniques ou enseigner à produire des techniques ? Quel équilibre ?

Que peut-on faire pour améliorer l'enseignement et l'apprentissage ?

• Des recherches depuis une quarantaine d'années dans les IREM et en didactique des mathématiques qui visent notamment à :

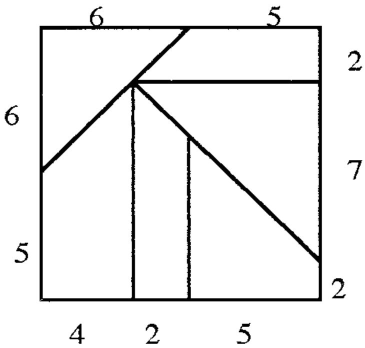
– Identifier les vraies difficultés, celles qui résistent et sont inhérentes aux mathématiques.

– Étudier les moyens de les faire rencontrer aux élèves dans des situations adaptées, les faire transférer dans différentes situations.

Agrandissement d'un puzzle

- Prégnance du modèle additif

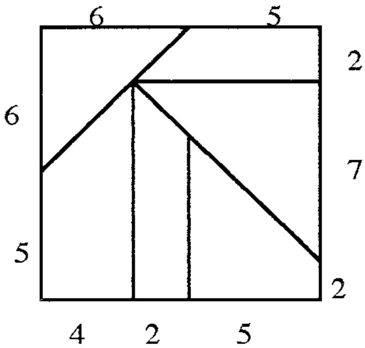
On veut agrandir le puzzle de façon que le côté qui ici mesure $4\,cm$ mesure $7\,cm$ dans le modèle agrandi. Chacun va reproduire une pièce. On les assemblera ensuite.



Il y a des choix de variables importants dans la forme du modèle et dans les valeurs numériques pour que les élèves :

– rencontrent les vraies difficultés,

– avec des moyens pour les surmonter.



BONUS

À quoi servent les statistiques ?

Par exemple pour tout ce qui concerne les tests ADN. Voici un petit morceau la signature ADN de la fameuse bactérie Escherichia-coli :

aaacaaaccgaaagcaacgaaaaagtgggtcgttagctcagggtagagcagttga
cttttaatcaattggtcgcaggttcgaatcacgacccaccaatcgctaaggtggaagc
ggtagtaaaacggataacgttgcatgagcaacggcccgaagggcgagacgagt
catcctgcacgacccaccactaacatagttagttgtagtatgcgtagtatcgggtgatt
agctcagctgggagagcacctcccttaggaggggtcggcggttcgatcccgtcatc
acccaccaccgttagctcagttggtagagcagttgacttttaatcaattggtcgcagaa
tcctgcacgacccaccagttttaacatcgaagacagatgttagtgtaggataacgttg
cgtcagcaacggcccgtagggcgagcgcgagtcatcctggacccaccactaatga
cggtgggttcggtggtttgtagtatccagcgcaggggtgattagctcagctggg ...
a= adénine, g=guanine, t=thymine, c=cytosine

Les sept problèmes du millenium

Chacun d'eux est doté d'un prix d'un million de dollars.

- La conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer (arithmétique)
- La conjecture de Hodge (géométrie algébrique)
- Les équations de Navier-Stokes (analyse)
- Le problème $P = NP$ (algorithmique)
- La conjecture de Poincaré (topologie ; résolue par Perelman)
- L'hypothèse de Riemann (arithmétique et analyse complexe)
- La théorie de Yang-Mills (physique mathématique)

Mathématiques et sens commun

Un bassin de $10000\,l$ est pollué par $10\,kg$ d'un produit toxique. Le bassin est renouvelé en eau potable à raison de $1000\,l$ par heure. Le produit est dangereux pour la faune et la flore s'il reste plus de 6 heures à un taux de plus de $5\,kg$ pour $10000\,l$.

L'expert consulté se veut rassurant :

Il y a $10\,kg$ *dans* $10000\,l$*. Chaque heure, dans les* $1000\,l$ *qui s'évacuent, il part* $1/10$ *du produit, donc* $1\,kg$*. Pas de problème, les* $5\,kg$ *seront largement évacués en* $6\,h$*.*

Qu'en pensez-vous ?

Des difficultés inhérentes aux mathématiques. Rapport discret/continu

• Dans les entiers, chaque élément a un successeur et un prédécesseur (sauf 0). Dans les décimaux, entre deux éléments il y en a toujours un autre...
• Dans les entiers et dans les décimaux, la division ne tombe en général pas juste, on a un quotient et un reste.
• Dans les fractions, on a un quotient exact, la division devient l'opération inverse de la multiplication ; on va s'intéresser au quotient exact et en donner des valeurs approchées. Un nombre n'a pas forcément une écriture décimale avec un nombre fini de chiffres après la virgule, il faut en accepter une infinité.
• Mais pourquoi $0,999\ldots$ est-il égal à 1 et pas un peu plus petit ?