Archimède et la quadrature de la parabole ou les cinq sources du tiers

Daniel PERRIN

Arcanum natura caput non prodidit ulli
Nec licuit populis parvum te, Nile, videre
(La nature a jeté sur ta source, ô Nil, un voile
Qu'elle n'a permis à aucun peuple de lever)
(Lucain)

1 Introduction

Dans ce texte, je vais parler de la quadrature de la parabole, autour de l'œuvre d'Archimède, en examinant ce qu'il a fait, ce qu'il aurait pu (voire dû) faire et ce qu'il ne pouvait nullement imaginer. Mes sources principales sont les œuvres complètes d'Archimède et celles d'Apollonius, dans les traductions de Paul Ver Eecke. Je précise que je ne suis pas historien et que, si la ligne générale de ce que je vais dire est bien celle d'Archimède, je me permettrai d'utiliser des notations et des conceptions modernes afin de simplifier et d'éclairer certaines preuves.

1.1 Repères historiques

Archimède vit entre -287 et -212. Il vient après Euclide $(-325, -265)$ et précède Apollonius $(-262, -190)$. Sur le sujet des coniques, il semble que nombre de leurs propriétés étaient connues d'Euclide (dans un livre avec Aristée ?) mais on n'a pas retrouvé trace de ce travail. En tous cas, Archimède réfère à Euclide pour les premiers résultats qu'il utilise sur la parabole et qu'il admet sans démonstration. Le texte le plus complet sur les coniques est celui d'Apollonius, où l'on trouve les démonstrations [1] des résultats utilisés par Archimède. Pour les Grecs, les coniques sont des sections des cônes, mais ils disposent d'un résultat qui, en langage moderne et dans le cas de la parabole, revient essentiellement à l'équation $y = x^2$ et qui va être le point crucial de

1. J'ai parfois des doutes sur certaines.

toute l'étude. En revanche, il semble que ni Archimède, ni Apollonius ne connaissent les définitions par foyer et directrice[2] qui semblent être dues à Dioclès (vers $-200, -150$). Rappelons que le mot foyer est dû à Kepler (1571-1630) et que c'est Dandelin (1794-1847) qui éclaircit le lien entre l'approche foyer-directrice et la section conique.

1.2 Les mots

C'est un anachronisme de parler de parabole à propos d'Archimède (ce nom, comme ceux d'ellipse et d'hyperbole, est dû à Apollonius). Archimède parle de section de cône rectangle (la parabole) ou acutangle (l'ellipse) ou obtusangle (l'hyperbole). Précisons qu'il ne regarde que des cônes droits à base circulaire et seulement des sections par des plans perpendiculaires aux génératrices. En revanche, Apollonius, pour définir la parabole, considère plus généralement les sections des cônes droits, à base circulaire, et c'est aussi ce que nous ferons ici.

1.3 Le résultat

Je cite ce que dit Archimède :

Aucun de mes prédécesseurs n'a encore, que je sache, cherché la quadrature d'un segment de parabole, délimité par une droite, chose que nous avons trouvée maintenant. Nous démontrons en effet que tout segment de parabole délimité par une droite dépasse d'un tiers le triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole.

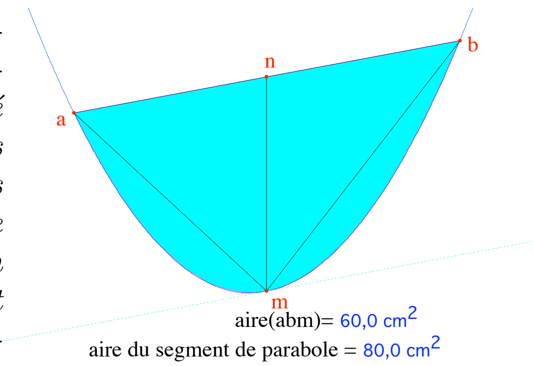

FIGURE 1 – Le résultat d'Archimède

Nous verrons en 3.1 ce que signifie exactement cette assertion. La hauteur du segment S de parabole est la largeur de la plus petite bande limitée par (ab) qui contient S (elle est aussi limitée par la tangente en m). L'un des objectifs de ce texte est de repérer les diverses sources possibles du coefficient $1/3$ qui apparaît ici.

2. Cela peut être un peu troublant pour les plus anciens d'entre nous qui ont été éduqués avec cette approche. Pour les autres, l'ignorance a cela de positif qu'elle exonère de devoir s'affranchir des habitudes.

2 Préliminaires

Ce paragraphe contient plusieurs résultats qui seront essentiels dans la suite et notamment "l'équation" de la parabole 2.11 et le "lemme des tangentes" 2.18. Le cadre, en termes modernes, est l'espace euclidien de dimension 3 ou le plan euclidien. Le lecteur est averti que les démonstrations seront souvent elliptiques[3], voire incomplètes.

2.1 Cônes

Nous rappelons brièvement quelques propriétés des cônes. Ces propriétés figurent dans Apollonius (éventuellement sous une forme légèrement différente) et sont faciles à établir.

2.1 Définition. *Soit* Γ *un cercle situé dans un plan de l'espace,* ω *son centre et* o *un point situé sur la perpendiculaire en* ω *au plan de* Γ*, distinct de* ω*. Le* **cône droit** $\mathcal{C}$ *de sommet* o *et de base* Γ *est la réunion des droites* (om) *avec* $m \in \Gamma$*. Les droites* (om)*,* $m \in \Gamma$*, sont les* **génératrices** *du cône, la droite* $(o\omega)$ *est son* **axe***.*

Il sera commode d'imaginer que le plan de Γ est horizontal, et donc que l'axe du cône est vertical.

2.2 Proposition. *Soit* $\mathcal{C}$ *un cône de sommet* o *et de base* Γ*. La section de* $\mathcal{C}$ *par un plan parallèle à celui de* Γ *et ne passant pas par* o *est un cercle* Γ' *homothétique de* Γ *dans une homothétie de centre* o *et* $\mathcal{C}$ *est aussi le cône de sommet* o *et de base* Γ'*.*

La section de $\mathcal{C}$ *par un plan passant par* o *et coupant* Γ *en les deux points* p, q *est la réunion des deux génératrices* (op) *et* (oq)*.*

2.3 Proposition-Définition. *Soit* $\mathcal{C}$ *un cône de sommet* o *et de base* Γ *et soit* m *un point de* Γ*. Le plan défini par* (om) *et la tangente à* Γ *en* m *coupe* $\mathcal{C}$ *selon l'unique droite* (om)*. C'est le* **plan tangent** *à* $\mathcal{C}$ *en* m*. Soit* a *un point extérieur au cône, non situé dans le plan perpendiculaire à l'axe du cône passant par* o*. Alors, par* a *passent exactement deux plans tangents à* $\mathcal{C}$*.*

Démonstration. Pour la dernière propriété on considère le plan perpendiculaire à l'axe du cône et passant par a. Ce plan ne contient pas o, il coupe $\mathcal{C}$ selon un cercle Γ et a est extérieur à ce cercle. Les deux plans tangents sont ceux qui contiennent o et les tangentes à Γ issues de a.

3. Ce qui est paradoxal, s'agissant de paraboles.

2.4 *Remarque.* La notion de plan tangent à une surface n'est pas très claire à l'époque d'Archimède. Il y a évidemment l'idée de limite des plans sécants passant par le sommet, voire la question de position du cône par rapport au plan, mais évidemment pas les notions infinitésimales.

2.2 Paraboles

Soit $\mathcal{C}$ un cône de sommet o et de base Γ de centre ω et soit Π un plan ne passant pas par o et non parallèle au plan de Γ. On suppose que le plan Π coupe Γ en deux points distincts a et b. Soit $[pq]$ le diamètre de Γ perpendiculaire à la corde $[ab]$ en n (voir figure 3). On considère le plan $\Sigma = (opq)$. Il est perpendiculaire à (ab) (car (ab) est perpendiculaire à (pq) et orthogonale à $(o\omega)$, deux droites du plan Σ). Le plan Σ est donc l'unique plan méridien (i.e. contenant l'axe du cône) perpendiculaire à Π. Sa trace sur $\mathcal{C}$ est la réunion des génératrices (op) et (oq). Soit Δ l'intersection des plans Π et Σ.

2.5 Définition. *Avec les notations précédentes, si la droite Δ est parallèle à l'une des génératrices contenues dans Σ, disons (oq), la section $P = \Pi \cap \mathcal{C}$ est appelée une* **parabole***. La droite Δ est son* **axe** *et l'intersection s de Δ avec (op) (ou avec $\mathcal{C}$, ou avec P) est son* **sommet***.*

2.6 *Remarque.* La droite (ab) étant perpendiculaire au plan Σ est aussi perpendiculaire à Δ en n.

2.3 Tangentes

On conserve les notations du paragraphe précédent et on commence par un lemme :

2.7 Lemme. *Soit P une parabole. Soit D une droite située dans le plan de P et parallèle à l'axe Δ de P. Alors D coupe P en un point et un seul.*

Démonstration. Il suffit de voir que D coupe le cône $\mathcal{C}$ en un point et un seul. Or, la droite D étant parallèle à Δ l'est aussi à (oq). Le plan défini par D et (oq) coupe le cône selon deux génératrices (oq) et (or), avec $r \in D$. Le point r est l'unique point de $D \cap P$.

2.8 Proposition-Définition. *Soit a un point de P. La droite intersection du plan Π de la parabole et du plan tangent au cône en a coupe P en a seulement. On l'appelle* **tangente** *en a à P. En particulier, la* **tangente au sommet** *est la droite perpendiculaire au plan Σ en le sommet s et c'est aussi la droite de Π perpendiculaire à Δ en s.*

Démonstration. Soit Q le plan tangent en a et posons $T = \Pi \cap Q$. On a $T \cap P = \Pi \cap Q \cap \mathcal{C} = \Pi \cap (oa) = \{a\}$.

Considérons la perpendiculaire T' à Σ en s. Comme Π et Σ sont perpendiculaires, la direction orthogonale à Σ, qui est la direction de T', est contenue dans (la direction de) Π et comme T' contient s qui est dans Π, T' est contenue dans ce plan et elle y est perpendiculaire à $\Delta = \Pi \cap \Sigma$.

Pour montrer que T' est tangente à P, il suffit de montrer qu'elle est tangente à $\mathcal{C}$. Comme T' est orthogonale à l'axe du cône elle est dans le plan horizontal R_s passant par s. On a donc $T' \cap \mathcal{C} = (T' \cap R_s) \cap \mathcal{C} = T' \cap \Gamma_s$ où Γ_s est le cercle $\mathcal{C} \cap R_s$. Mais, comme Σ contient l'axe du cône, l'intersection $\Sigma \cap R_s$ est un diamètre de Γ_s et, comme T' lui est perpendiculaire, T' est tangente à Γ_s, donc à $\mathcal{C}$ et à P.

2.9 Proposition. *Par un point de* Π *extérieur à* P *passent deux tangentes à* P*.*

Démonstration. Cela résulte de 2.3.

2.10 Proposition. *L'axe de* P *est axe de symétrie orthogonale pour* P*.*

Démonstration. Voir figure 3. Soit a' un point de P. On considère le plan R' parallèle au plan R de Γ passant par a'. Ce plan coupe le cône selon un cercle Γ' centré en $\omega' \in (o\omega)$, il coupe (op) en p', (oq) en q', Δ en n' et la parabole en a' et b'. Il s'agit de montrer que a' et b' sont symétriques par rapport à Δ.

On note déjà que n' est sur Δ par définition, mais aussi sur $(p'q')$ (car n' est dans R' et dans Σ puisque Δ est dans Σ, donc dans $(p'q') = R' \cap \Sigma$) et enfin sur $(a'b') = \Pi \cap R'$. On remarque ensuite que $(a'b')$ est parallèle à (ab) car ces droites sont les intersections de Π avec les plans parallèles R et R'. Il en résulte que $(a'b')$ est perpendiculaire à Δ (car (ab) l'est). Enfin, comme $(a'b')$ est perpendiculaire au diamètre $(p'q')$ de Γ', n' est bien le milieu de a', b'.

2.4 L'"équation" de la parabole

Le théorème suivant est essentiel :

2.11 Théorème. *Soit* P *une parabole de sommet* s *et d'axe* Δ *et soient* a, a' *deux points de* P *et* n, n' *leurs projetés orthogonaux sur l'axe de* P*. On a l'égalité suivante :*

$$\frac{a'n'^2}{an^2} = \frac{sn'}{sn}.$$

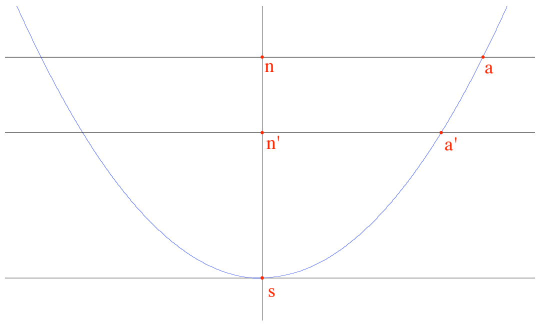

FIGURE 2 – L'“équation” $2\tau y = x^2$

La longueur $\tau = \dfrac{an^2}{2\,sn}$ *est indépendante du choix de* a*. On l'appelle le* **paramètre** *de la parabole.*

2.12 *Remarque.* Dans le système d'axes formé de la tangente au sommet T et de l'axe Δ la relation $an^2 = 2\tau sn$ se traduit par l'équation $2\tau y = x^2$.

Démonstration.

On écrit les puissances des points n et n' par rapport aux cercles Γ et Γ' : $an^2 = bn^2 = np \times nq$ et $a'n'^2 = b'n'^2 = n'p' \times n'q'$. On en déduit $\dfrac{a'n'^2}{an^2} = \dfrac{n'p' \times n'q'}{np \times nq}$. Comme les droites (nn') et (qq') sont parallèles ainsi que (pq) et $(p'q')$, le quadrilatère $nqq'n'$ est un parallélogramme et on a $nq = n'q'$. D'un autre côté, par Thalès appliqué dans le triangle spn, on a $\dfrac{n'p'}{np} = \dfrac{sn'}{sn}$ et le résultat s'ensuit.

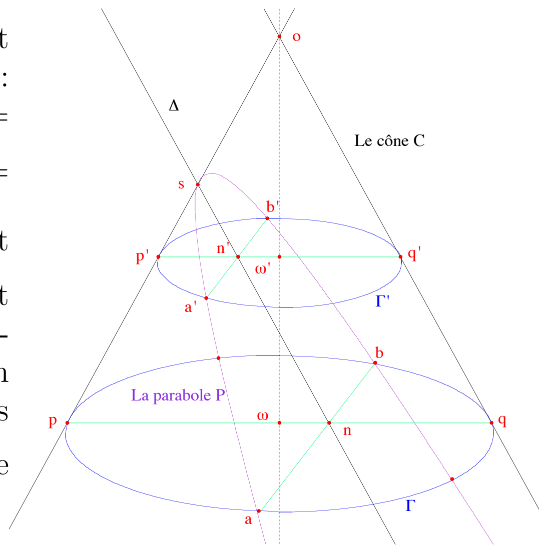

FIGURE 3 – Preuve de l'équation

2.5 Diamètres et lemme des tangentes

La proposition suivante, qui concerne les tangentes, est importante :

2.13 Proposition. *Soit P une parabole d'axe Δ, de sommet s, de tangente au sommet T. Soit a un point de P qui se projette orthogonalement en p sur l'axe, q l'intersection de la tangente en a et de l'axe. Alors, on a $sp = sq$.*

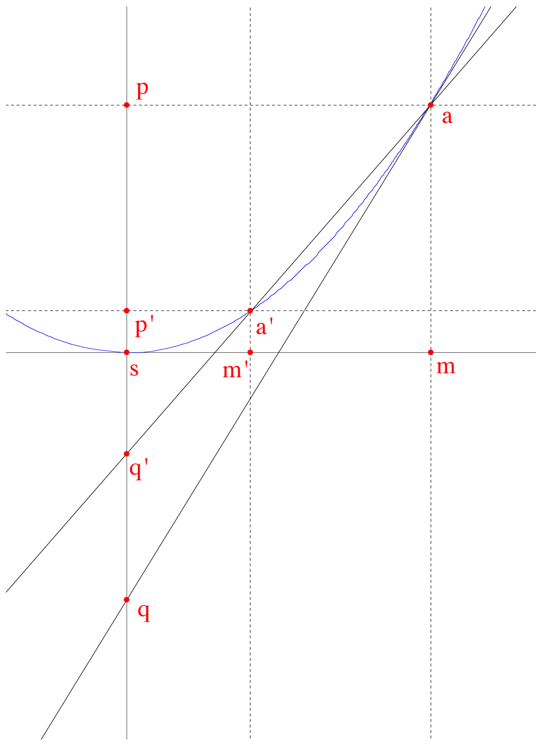

FIGURE 4 – Une propriété des tangentes

Démonstration. On note m le projeté orthogonal de a sur T. Soit q' le point symétrique de p par rapport à s. Il s'agit de montrer que $(q'a)$ est tangente à P en a. Sinon, elle recoupe P en a' distinct de a et on appelle m', p' les projetés de a' sur T et Δ. En vertu de 2.11, on a les deux relations $sm^2 = 2\tau sp$ et $sm'^2 = 2\tau sp'$. Par Thalès, on a aussi $p'q'/a'p' = p'q'/sm' = pq'/ap = pq'/sm$. Mais, par construction, on a $p'q' = sp' + sp$ et $pq' = 2sp$ et en remplaçant sp' et sp par leurs valeurs en fonction de sm' et sm on obtient $\dfrac{sm'^2 + sm^2}{sm'} = 2sm$, soit $sm'^2 + sm^2 - 2sm.sm' = 0$ c'est-à-dire $sm = sm'$. Mais alors a et a' sont égaux, et c'est une contradiction.

On peut maintenant obtenir l'équation de la parabole dans un autre repère :

2.14 Proposition. *Soient P une parabole d'axe Δ, de sommet s, de tangente au sommet T et de paramètre τ. Soit $a \in P$, D la parallèle à Δ passant par a et T' la tangente en a à P. Soit a' un autre point de P. La parallèle à T' par a' coupe D en r et la parallèle à Δ par a' coupe T' en n. On a $ra'^2 = an^2 = \dfrac{2(\tau^2 + ap^2)}{\tau} ar$. Autrement dit, dans le système d'axes T', D, la parabole a une équation de la forme $x^2 = 2\tau' y$.*

Démonstration. On a $ap^2 = 2\tau\, sp$. La pente de T' est égale à pq/ap donc (voir 2.13) à $2sp/ap$, donc à ap/τ. Soit h le point d'intersection des parallèles à T passant par a et à Δ par a'. On calcule an^2 par Pythagore : $an^2 = ah^2 + hn^2 = ah^2(1 + \frac{ap^2}{\tau^2})$. On calcule ensuite ar par différence : $ar = na' = ha' - hn$. On a $hn = ah \times \frac{ap}{\tau} = mm' \times \frac{ap}{\tau}$ et $ha' = m'a' - hm' = m'a' - ma = \frac{sm'^2}{2\tau} - \frac{sm^2}{2\tau}$. On en déduit $ar = \frac{mm'^2}{2\tau}$ et le résultat.

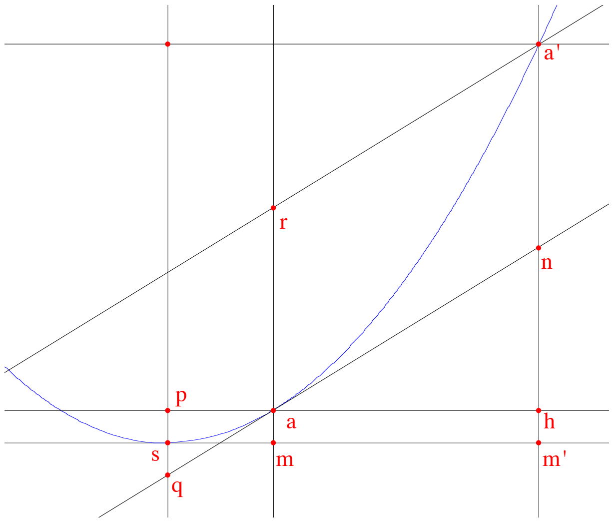

FIGURE 5 – Autre repère, autre équation

2.6 Le lemme des tangentes, forme définitive

Une notion importante est celle de diamètre :

2.15 Définition. *Soit P une parabole. On appelle* **diamètre** *de P un axe de symétrie oblique de P.*

2.16 *Remarque.* Nous avons vu que l'axe est un diamètre. Plus généralement on a :

2.17 Lemme. *Soit P une parabole, m un point de P. La droite D parallèle à l'axe de P passant par m est axe de symétrie de P dans la direction de la tangente T' à P en m. Cela signifie que si une droite parallèle à T' coupe D en n et P en a et b, n est milieu de $[ab]$.*

Démonstration. Cela résulte aussitôt de 2.14.

On peut maintenant prouver le "lemme des tangentes" :

2.18 Théorème. *Soit P une parabole, a, b deux points de P. Les tangentes à P en a et b se coupent en c. La parallèle à l'axe de P passant par c coupe P en m et (ab) en n. On a les propriétés suivantes :*
1) n est le milieu de $[ab]$,
2) m est le milieu de $[cn]$,
3) la tangente à P en m est parallèle à $[ab]$.

Démonstration. On note D la parallèle à l'axe passant par m et T' la tangente à P en m. On considère la parallèle à T' qui passe par a. Elle recoupe P en b'. Par 2.17, on sait que D est axe de symétrie oblique dans la direction de T'. Cette symétrie échange a et b', donc aussi les tangentes en ces points qui se coupent donc sur D, c'est-à-dire en c. On voit que (cb) et (cb') sont toutes deux tangentes à P et, comme il n'y a que deux tangentes à P issues de c en vertu de 2.9, il en résulte $b = b'$. Cela prouve les points 1) et 3). Pour le point 2), maintenant qu'on a l'équation dans le repère tangente-diamètre, il suffit de copier la preuve de 2.13.

2.7 Le lemme des tangentes revisité

Pour un géomètre projectif, voilà comment le lemme des tangentes 2.18 peut se concevoir. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter par exemple [Perrin] (Partie III, prop. 2.3.17), sur ma page web.

Rappelons d'abord que si C est une conique du plan projectif $\mathbf{P}(E)$ et c un point non situé sur C, la polaire de c par rapport à C est une droite D qui est le lieu des points n conjugués de c, c'est-à-dire vérifiant $[\![c, n, m, i]\!] = -1$ où m, i sont les points d'intersection (éventuellement confondus, éventuellement imaginaires) de C et de (cn). La polaire[4] est la droite (ab) qui joint les points de contact a, b (éventuellement imaginaires) de C et de ses tangentes issues de c. Si D est la polaire de c, on dit que c est le pôle de D. Une propriété essentielle est la réciprocité polaire : si la polaire de p passe par q, celle de q passe par p.

4. Ce résultat est dans Apollonius, Livre III, Prop. XXXVII par exemple.

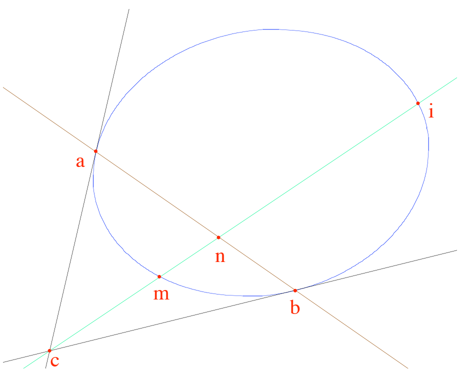

FIGURE 6 – La polaire

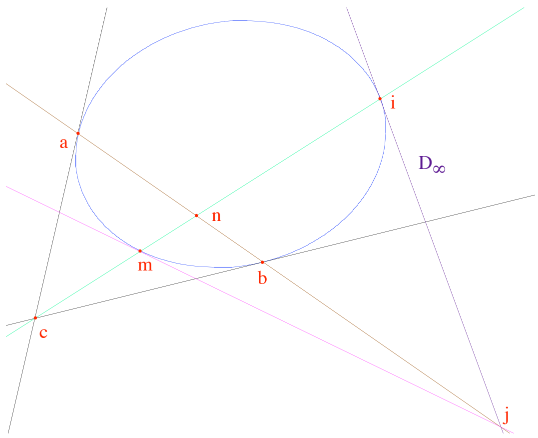

FIGURE 7 – Le lemme des tangentes

Parler de parabole suppose qu'on ait choisi une droite à l'infini D_∞ de $\mathbf{P}(E)$. Une parabole P est alors une conique tangente à la droite de l'infini en un point i, qui est la direction de son axe. Si l'on reprend les notations de 2.18, la droite (ab) est la polaire de c par rapport à P. La parallèle à l'axe de P passant par c est la droite (ci) et on a une division harmonique $[c, n, m, i] = -1$. Comme i est à l'infini, cela signifie que m est milieu de $[cn]$, d'où le point 2) de 2.18.

Soit j l'intersection de D_∞ et de (ab). Comme la polaire de c passe par j, celle de j passe par c et aussi par i, c'est donc (ci) et on a $[a, b, n, j] = -1$, donc n est milieu de $[ab]$ et le point 1).

Enfin, comme j est le pôle de (im), c'est l'intersection des tangentes à P en i et m, donc la tangente en m coupe (ab) à l'infini, donc lui est parallèle.

3 Le résultat d'Archimède : premières approches

3.1 Les énoncés

Il y a trois variantes de l'énoncé. Dans tous les cas, il s'agit de calculer l'aire du secteur de parabole S limité par une corde $[ab]$.

3.1 Théorème. *Soient P une parabole, a, b deux points de P et S le secteur de parabole limité par la droite (ab). Les tangentes en a et b à P se coupent en c. La parallèle à l'axe Δ de P passant par c coupe P en m et (ab) en n. La parallèle à Δ passant par a coupe la tangente en b en d. On a les formules suivantes :*

$$\mathcal{A}(S) = \frac{4}{3}\mathcal{A}(abm) = \frac{2}{3}\mathcal{A}(abc) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(abd).$$

Que ces variantes soient équivalentes est une conséquence du lemme des tangentes. En effet, on a $mn = \frac{1}{2}nc = \frac{1}{4}ad$ (voir figure ci-dessous).

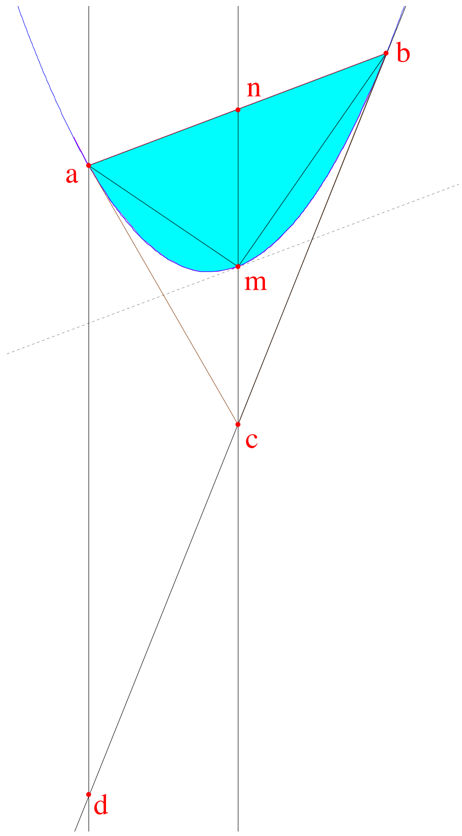

Figure 8 – Les variantes du résultat d'Archimède

3.2 Se ramener à un cas particulier

Contrairement à Archimède, qui traite soigneusement plusieurs cas de figure, nous allons ne traiter que l'un d'eux. En effet, pour montrer le théorème ci-dessus, je dis qu'on peut supposer :

• que la parabole est d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé, son sommet étant alors le point $s = (0, 0)$,

• que les points a, b sont symétriques par rapport à l'axe et même que ce sont les points de coordonnées $(-1, 1)$ et $(1, 1)$. Le point m est alors le sommet de P.

C'est tout le charme du programme d'Erlangen de Klein qui opère ici. On note d'abord que les propriétés considérées, qui ne mettent en jeu que des rapports d'aires et des paraboles, sont des propriétés affines. On peut donc faire agir le groupe affine, c'est-à-dire le sous-groupe du groupe des homographies qui laissent stable la droite de l'infini. On sait (voir [Perrin] Partie III, 2.2.26), que toutes les coniques propres non vides sont équivalentes sous l'action des homographies. Comme les paraboles sont les coniques tangentes à D_∞, il en résulte qu'elles sont équivalentes sous l'action du groupe affine (voir *loc. cit.* exercice 2.4.2). Cela prouve qu'on peut supposer que l'équation de P est $y = x^2$. De plus, si P est une parabole, le groupe $G(P)$ des homographies qui conservent P est triplement transitif sur P (*loc. cit.* 3.2.4). En particulier, il existe une homographie qui fixe le point à l'infini de P (donc qui laisse stable la tangente D_∞ et qui, de ce fait, est une application affine) et qui envoie les points a, b sur deux points prescrits.

3.3 Une démonstration qu'Archimède ne pouvait vraiment pas faire

Comme on l'a dit, on peut supposer que P est d'équation $y = x^2$ et que o, a, b sont les points de coordonnées $(0,0)$, $(-1,1)$ et $(1,1)$. De nos jours, la démonstration la plus simple, celle que savent faire les lycéens, consiste à calculer l'aire sous la courbe à l'aide de l'intégrale. Par symétrie, il suffit de faire le calcul pour la partie droite du domaine et l'aire est alors $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$. On trouve $1/3$ et on en déduit que l'aire du segment de parabole S vaut $2 \times (1 - 1/3) = 4/3$. Comme le triangle oab est d'aire 1 on a bien $\mathcal{A}(S) = (4/3)\mathcal{A}(oab)$.

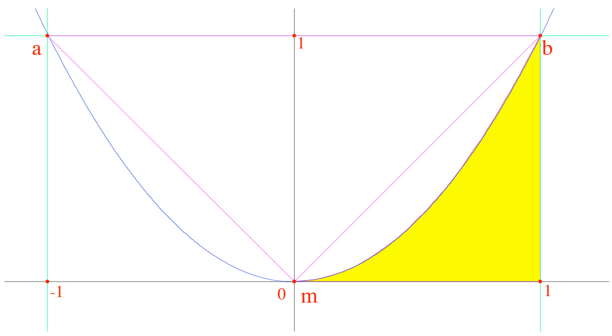

FIGURE 9 – La preuve par le calcul intégral

Cette démonstration est incontestablement la plus éloignée des possibilités d'Archimède : il ne dispose ni des fonctions, ni de leurs dérivées et de leurs primitives, moins encore du lien de l'aire avec l'intégrale. C'est sur cette preuve qu'on mesure l'immense progrès que constitue le calcul infinitésimal.

Dans cette preuve, le tiers apparaît au travers de la primitive de x^2.

3.4 Une démonstration qu'il aurait pu faire

On peut la voir comme la variante de la précédente qui consiste à encadrer l'aire $\mathcal{A}$ sous la parabole par des rectangles de largeur $1/n$. Le calcul, avec les notations actuelles est facile, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2},$$

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

et, quand n tend vers l'infini, les deux termes extrêmes ont la même limite $1/3$.

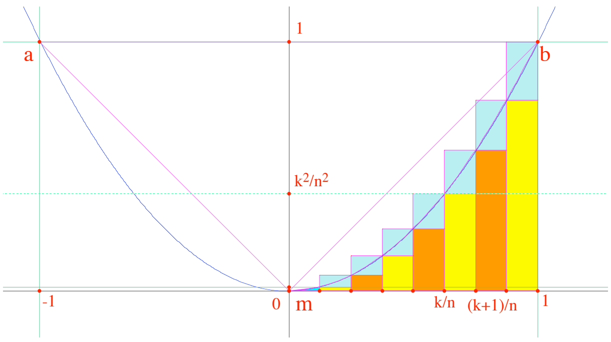

FIGURE 10 – La méthode des rectangles

Dans cette preuve, le coefficient $1/3$ *apparaît au travers de l'équivalent :*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \sim \frac{n^3}{3}.$$

Pourquoi dis-je qu'Archimède aurait pu trouver cette preuve ? Parce qu'il fait exactement la même dans le cas de la spirale (dite d'Archimède), d'équation polaire $r = a\theta$. Il montre que l'aire de la spirale est le tiers de l'aire du disque (donc $\dfrac{4\pi^3 a^2}{3}$).

Pour cela, il encadre l'aire de la spirale par les aires des secteurs circulaires intérieurs et extérieurs. En notations actuelles, le k-ième secteur intérieur est d'aire $\dfrac{4k^2\pi^3 a^2}{n^3}$, donc la somme des secteurs intérieurs vaut :

$$\frac{4\pi^3 a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

et le résultat s'ensuit.

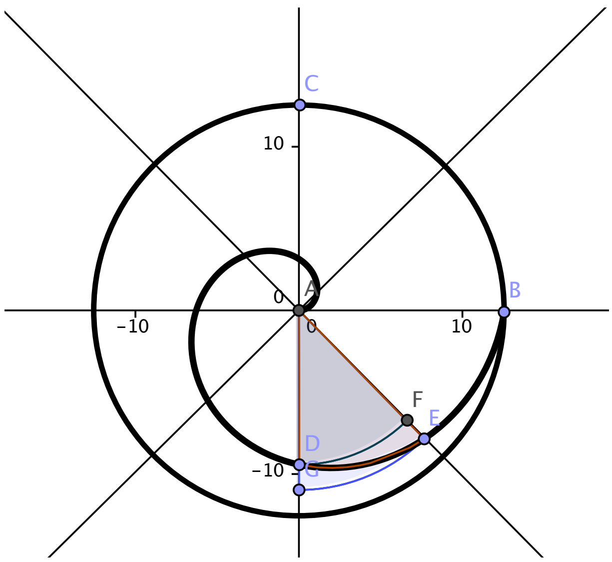

Figure 11 – La quadrature de la spirale

Bien entendu – et c'est une différence essentielle qui fait le génie d'Archimède – il ne dispose pas des notations pour calculer la somme des carrés des n premiers entiers. Voilà ce qu'il dit à ce propos :

Si des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, sont disposées les unes à la suite des autres, l'excédent étant d'ailleurs égal à la plus petite ; et si on dispose un même nombre d'autres lignes, dont chacune est aussi grande que la plus grande des premières, les carrés des lignes égales à la plus grande, ajoutés au carré de la plus grande ainsi qu'au *rectangle délimité sous la plus petite et sous une ligne égale à la somme de celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, valent le triple des carrés de toutes les lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur.*

Même racontée en termes modernes [5], la preuve d'Archimède reste originale et astucieuse. Pour calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ il part de l'identité $n^2 = (n-k)^2 + k^2 + 2k(n-k)$, qu'il écrit pour $k = 0, 1, \ldots, n$, et dont il déduit par addition $(n+1)n^2 = 2S_n + 2U_n$, avec $U_n = \sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)$.

Il considère ensuite la somme des premiers entiers $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$ et obtient la formule :

$$2U_n + T_n = \sum_{k=0}^{n} 2k(n-k) + \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k).$$

L'étape suivante, essentielle, est de montrer l'égalité $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k) = S_n$ à partir de l'expression de la somme des premiers entiers [6] :

$$2(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = n(n-1) = n^2 - n.$$

Archimède écrit toutes ces égalités de 1 à n :

$n^2 = n + 2(1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1))$

$(n-1)^2 = (n-1) + 2(1 + 2 + \cdots + (n-2))$

$(n-2)^2 = (n-2) + 2(1 + 2 + \cdots + (n-3))$

....

$2^2 = 2 + 2 \times 1$

$1^2 = 1$

et il ajoute le tout en comptant les occurrences de chaque terme, il y a une fois n, trois fois $n-1$, cinq fois $n-2$, ..., $2n-1$ fois 1, ce qui donne bien :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k).$$

Il n'y a plus qu'à mettre les choses ensemble. On est parti de l'écriture

$$(n+1)n^2 = 2S_n + 2U_n.$$

5. Avec les mots d'Archimède c'est tout simplement extraordinaire.

6. Si Gauss savait faire ça à 6 ans, nul doute qu'Archimède était capable de le faire.

En introduisant $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ on a obtenu, par le calcul précédent, $2U_n + T_n = S_n$, d'où $(n+1)n^2 = 3S_n - T_n$ et donc

$$3S_n = (n+1)n^2 + T_n = (n+1)n^2 + n(n+1)/2,$$

$$\text{soit encore} \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1}{6}\cdot$$

3.2 *Remarque.* J'ignore pourquoi Archimède n'a pas utilisé cette méthode pour la parabole. Ce qui est vraiment troublant c'est que, si j'en crois l'ordre adopté par Ver Eecke dans sa traduction des œuvres d'Archimède, la quadrature de la parabole est postérieure à celle de la spirale. En se laissant aller à récrire l'histoire, on peut trouver que c'est bien dommage, car cette méthode est sans doute celle qui aurait permis de faire le plus vite la transition avec le calcul infinitésimal. En effet, la démonstration mécanique, que nous allons voir maintenant, a été un peu oubliée, et la preuve géométrique, que nous verrons ensuite, se prête moins bien à cette généralisation.

4 La preuve avec les leviers

Nous abordons maintenant la première preuve que donne Archimède de la quadrature de la parabole (le résultat 3.1 version *abd*). Cette preuve, lue avec nos yeux d'aujourd'hui, est finalement assez proche de la précédente, en ce sens qu'elle utilise un encadrement du segment de parabole par des trapèzes au lieu des rectangles. Mais elle en diffère par l'emploi d'un argument mécanique (Archimède parle de leviers [7], je parlerai plutôt de balances et de moments).

Comme il a été dit plus haut, on se limitera, pour montrer le résultat d'Archimède, au cas où le segment de parabole est limité par une droite perpendiculaire à l'axe.

7. Archimède est célèbre pour avoir développé la théorie des leviers (on connaît la boutade : *Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde*).

4.1 La balance d'Archimède

Soit P une parabole d'axe Δ, soient a, b deux points de P, d le point d'intersection de la tangente en b et de la parallèle à l'axe passant par a et b' le symétrique de b par rapport à a. Il s'agit de montrer que l'aire du segment de parabole S limité par a, b est le tiers de celle du triangle abd. Pour cela, on imagine que le triangle et le segment de parabole sont des objets pesants homogènes, de sorte que leurs masses sont directement proportionnelles à leurs aires, et on considère une balance dont le fléau est le segment horizontal $[bb']$ et dont le point de suspension est situé à la verticale de a et on va montrer qu'il y a équilibre entre le triangle suspendu par son côté $[ab]$ et le segment de parabole suspendu par un fil au point b', voir figure ci-dessous.

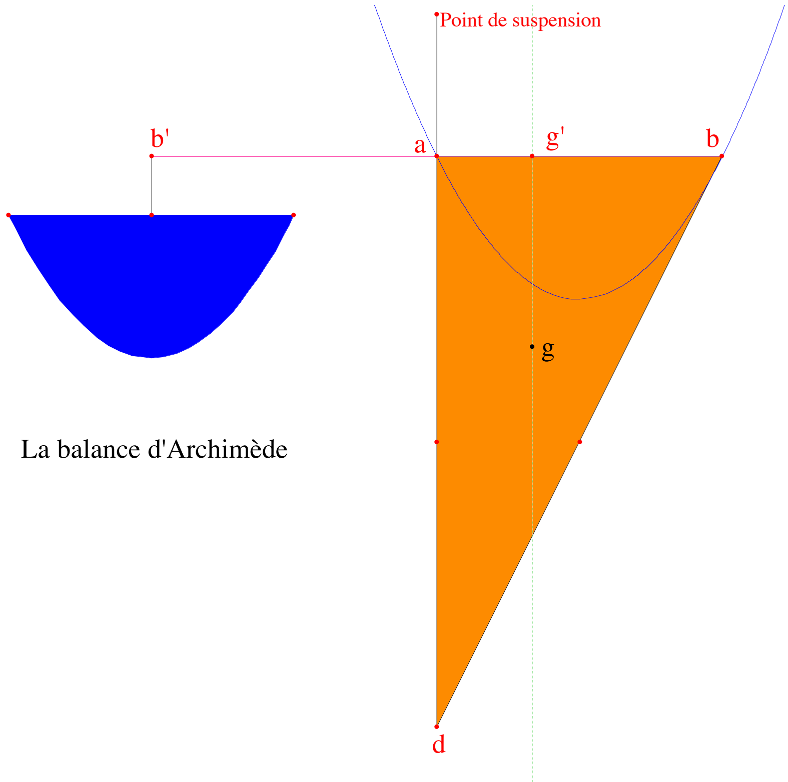

Figure 12 – La balance d'Archimède

4.2 Le principe des leviers

Si l'on admet qu'on a l'équilibre ci-dessus, le résultat en découle en vertu du lemme suivant, que je donne d'abord dans la version d'Archimède (aux notations près qui sont celles de la figure précédente) :

Imaginons que le plan qui se présente au regard soit perpendiculaire à l'horizon ; figurons nous comme étant au-dessous ce qui est situé du côté d'une droite ab, où se trouve le point d, et comme au-dessus ce qui est situé de l'autre côté. Soit un triangle rectangle adb suspendu par son côté [ab] ; qu'une autre aire Z soit suspendue en b′ et que cette aire fasse équilibre au triangle. Je dis que l'aire Z est la troisième partie du triangle adb.

En termes modernes, le lemme provient du suivant :

4.1 Lemme. *Si deux corps de masses m_1, m_2, accrochés au fléau d'une balance, elle-même suspendue en un point a, sont en équilibre et si g_1, g_2 sont les projetés de leurs centres de gravité sur le fléau de la balance, on a l'égalité des "moments" : $ag_1 \times m_1 = ag_2 \times m_2$.*

Le théorème en résulte car le projeté g' du centre de gravité du triangle est au tiers de $[ab]$ du côté de a (pour s'en convaincre, on trace la médiane $[bm]$, on a $mg = \frac{1}{3}\, mb$ et on applique Thalès). On a donc $\mathcal{A}(S) \times ab = \mathcal{A}(abd) \times \left(\frac{1}{3}ab\right)$ d'où $\mathcal{A}(S) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(abd)$.

Dans cette preuve, le tiers est celui qui intervient dans la position du centre de gravité du triangle !

4.3 Le lemme crucial

Pour établir l'équilibre de la balance, il faut découper la parabole et encadrer les morceaux entre des trapèzes. Le résultat (non trivial) qui fonde la méthode d'Archimède est le suivant :

4.2 Lemme. *Soit P une parabole d'axe[8] Δ et soient a, b deux points de P, symétriques par rapport à Δ. Une droite D, parallèle à Δ, passant par un point $h \in [ab]$, coupe P en q et la tangente à P en b en p. On a la relation :*

$$\frac{ah}{ab} = \frac{hq}{hp} \quad \text{ou encore} \quad \frac{hp}{ab} = \frac{hq}{ah}.$$

Démonstration.

8. Avec la variante de l'équation vue en 2.14, le résultat est encore vrai si Δ est un diamètre, pourvu que (ab) soit parallèle à la tangente en l'intersection de P et Δ.

Appelons m le sommet de P, n le point d'intersection de l'axe avec la droite (ab), r celui de D avec la tangente en m et c celle de l'axe et de la tangente en b. On cherche d'abord à calculer hq. L'"équation" de la parabole, c'est-à-dire le théorème 2.11, donne l'égalité $\dfrac{hn^2}{an^2} = \dfrac{qr}{mn} = \dfrac{mn - hq}{mn} = 1 - \dfrac{hq}{mn}\cdot$ Renversant cette égalité, on a $\dfrac{hq}{mn} = \dfrac{an^2 - hn^2}{an^2} = \dfrac{ah.bh}{an.bn}\cdot$ On fait alors apparaître l'un des rapports souhaités : $\dfrac{hq}{ah} = \dfrac{mn.bh}{an.bn}\cdot$ Mais on a $2an = ab$ et $2mn = nc$ en vertu de 2.18. Il reste $\dfrac{hq}{ah} = \dfrac{nc}{ab}\dfrac{bh}{bn}\cdot$ Mais, comme, par l'homothétie de rapport bh/bn, on passe de nc à hp, on a le résultat.

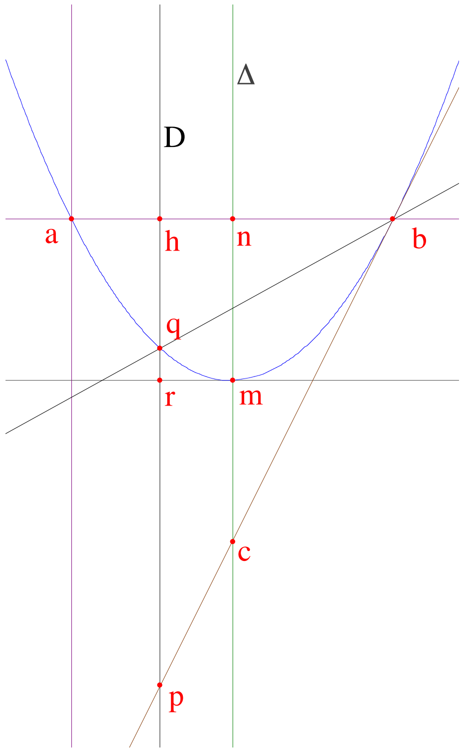

FIGURE 13 – Le lemme crucial

4.4 Un corollaire : le lemme des trapèzes

4.3 Corollaire. *Soit P une parabole d'axe Δ et soient a, b deux points de P, symétriques par rapport à Δ. Soient D, D' deux droites parallèles à Δ, passant respectivement par $h, h' \in [ab]$, qui coupent respectivement P en q, q' et la tangente à P en b en p, p'. La droite (bq) (resp. (bq')) coupe D' en r' (resp. D en r). On a les relations :*

$$\frac{ah}{ab} = \frac{hq}{hp} = \frac{\mathcal{A}(hh'r'q)}{\mathcal{A}(hh'p'p)} \quad \text{et} \quad \frac{ah'}{ab} = \frac{h'q'}{h'p'} = \frac{\mathcal{A}(hh'q'r)}{\mathcal{A}(hh'p'p)}\cdot$$

On a donc $ah \times \mathcal{A}(hh'p'p) = ab \times \mathcal{A}(hh'r'q)$ et $ah' \times \mathcal{A}(hh'p'p) = ab \times \mathcal{A}(hh'q'r)$. Dans une situation analogue à celle-ci, on parlera des trapèzes intérieur et extérieur de la parabole ($hh'q'r$ et $hh'r'q$) et du trapèze du triangle ($hh'p'p$).

Démonstration. Cela résulte aussitôt du lemme précédent et de la formule de l'aire du trapèze car, pour deux trapèzes fixés, les rapports des grandes et des petites bases sont les mêmes.

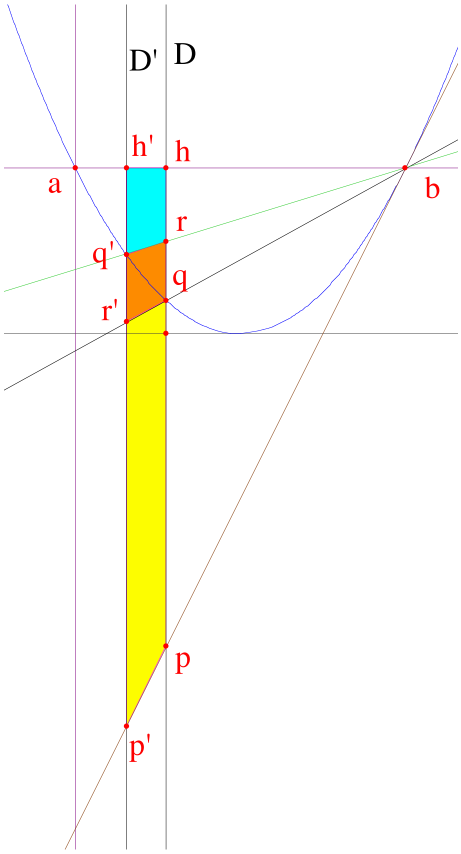

FIGURE 14 – Le lemme des trapèzes

4.5 Les moments

Archimède interprète les égalités précédentes en termes mécaniques, avec la même balance que ci-dessus, toujours suspendue en un point situé à la verticale de a. Le trapèze $hh'p'p$ (le trapèze du triangle) est accroché à la droite (ab) par son côté $[hh']$ et on l'équilibre par une aire Z suspendue en b'.

Alors, on a $\mathcal{A}(hh'q'r) < Z < \mathcal{A}(hh'r'q)$ (l'aire Z est comprise entre celles des trapèzes intérieur et extérieur de la parabole). En effet, le moment du trapèze du triangle est compris entre $ah' \times \mathcal{A}(hh'p'p)$ et $ah \times \mathcal{A}(hh'p'p)$ (car son centre de gravité se projette entre h' et h) tandis que celui de la masse est $ab \times Z$. Comme on a $ah \times \mathcal{A}(hh'p'p) = ab \times \mathcal{A}(hh'r'q)$ et $ah' \times \mathcal{A}(hh'p'p) = ab \times \mathcal{A}(hh'q'r)$, on en déduit le résutat.

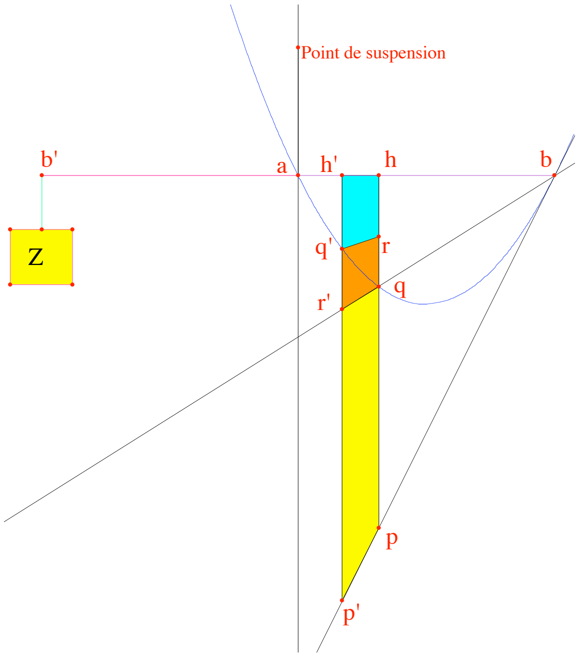

FIGURE 15 – Le premier équilibre

4.6 La fin de la preuve de 3.1

On découpe le segment $[ab]$ en n parties[9] par des points $a = a_0$, $a_1, \ldots$, $a_n = b$ (dans le texte d'Archimède, comme sur la figure ci-dessous, n est égal à 5). On mène les parallèles D_i à l'axe passant par les a_i. Elles coupent la parabole en des points $q_0 = a$, q_1, ..., $q_n = b$ et la tangente (bd) en $p_0, \ldots, p_n$. La droite (bq_i) coupe D_{i+1} en r_{i+1} et D_{i-1} en r'_{i-1}. On considère les n trapèzes intérieurs de la parabole : $T_i = a_ia_{i+1}r_{i+1}q_i$, les n trapèzes extérieurs $T'_i = a_ia_{i+1}q_{i+1}r'_i$ et les n trapèzes du triangle abd : $W_i = a_ia_{i+1}p_{i+1}p_i$.

On équilibre chaque trapèze W_i du triangle par une aire Z_i accrochée en b' (symétrique de b par rapport à a). On a les encadrements $\mathcal{A}(T_i) \leq \mathcal{A}(W_i) \leq \mathcal{A}(T'_i)$. On équilibre ainsi le triangle abd par la somme Z des Z_i. Si l'on note $\mathcal{T}_n$ (resp. $\mathcal{T}'_n$) la réunion des trapèzes intérieurs (resp. extérieurs) de la parabole on obtient l'encadrement : $\mathcal{A}(\mathcal{T}_n) \leq Z \leq \mathcal{A}(\mathcal{T}'_n)$, soit, par le lemme des moments,

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}_n) \leq \frac{1}{3}\mathcal{A}(abd) \leq \mathcal{A}(\mathcal{T}'_n).$$

9. Archimède dit, dans la proposition XIV, que ces parties sont égales. Il vaut mieux ne pas faire cette hypothèse.

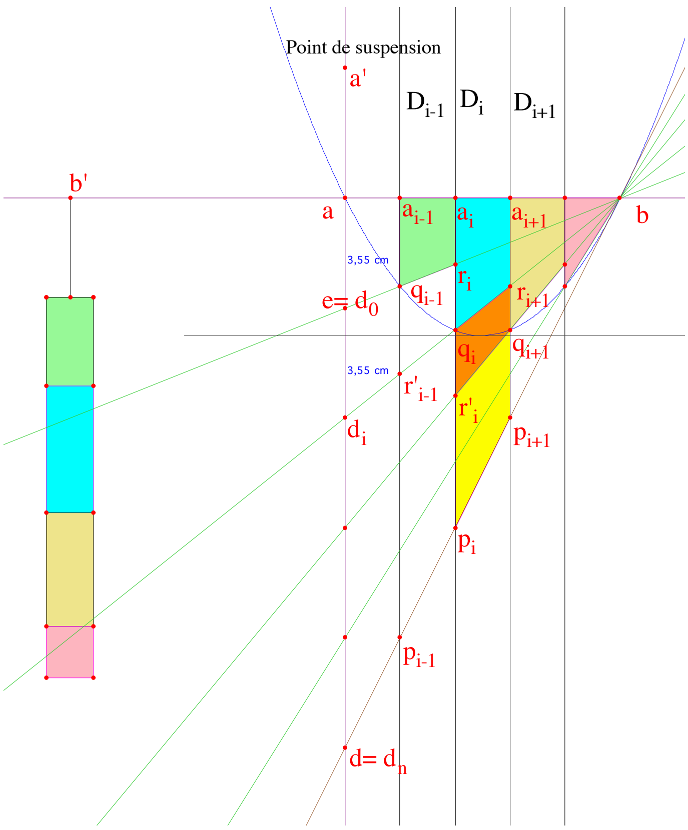

FIGURE 16 – La preuve par les leviers

Il s'agit maintenant d'en déduire que l'aire du segment de parabole $\mathcal{A}(S)$ est égale à $\frac{1}{3}\mathcal{A}(abd)$. En langage moderne, il suffit de montrer que les aires de $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}'_n$ convergent toutes deux vers l'aire de S, ou encore que l'erreur commise en assimilant la parabole à la réunion des trapèzes intérieurs ou extérieurs, qui est majorée par la somme des aires des petits trapèzes $q_i r'_i q_{i+1} r_{i+1}$, peut être rendue arbitrairement petite. Archimède démontre cela de manière parfaitement rigoureuse en utilisant ce qu'on appelle traditionnellement la méthode d'exhaustion et qui est un raisonnement par l'absurde essentiellement équivalent à la formulation moderne en termes de limites.

Voilà ce qu'il dit (on pose, comme Archimède, $Z = \frac{1}{3}\mathcal{A}(abd)$) :

Si l'aire de S n'est pas égale à Z elle est soit plus petite soit plus grande. Qu'elle soit d'abord plus grande, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont $\mathcal{A}(S)$ dépasse Z, ajouté à lui-même, sera plus grand que le triangle abd.

Ce dernier point est le fameux axiome d'Archimède : si $\epsilon = \mathcal{A}(S) - Z$ est > 0, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n\epsilon > \mathcal{A}(abd)$. On choisit un tel n et on considère le point $e \in [ad]$ tel que $ae = \frac{1}{n}ad$. On a donc $\mathcal{A}(abe) = \frac{1}{n}\mathcal{A}(abd) < \epsilon$. On divise alors le segment $[ad]$ en n parties égales par des points $d_0 = a$, $d_1 = e$, ..., $d_n = d$. La droite (bd_i) coupe la parabole en q_i et la parallèle D_i à l'axe passant par q_i coupe $[ab]$ en a_i. On est ainsi ramené à la situation précédente[10].

On considère les trapèzes intérieurs et extérieurs de la parabole associés aux a_i. La somme de leurs aires est respectivement $\mathcal{A}(\mathcal{T}_n)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{T}'_n)$. Comme les d_i découpent $[ad]$ en parties égales, par Thalès, les droites (bd_i) découpent des segments égaux sur $[a_ip_i]$, en particulier, si on note e_i l'intersection de (be) avec D_i, on a $a_ie_i = q_ir'_i$. Il en résulte que, dans chaque bande limitée par a_i et a_{i+1}, les trapèzes différences entre les extérieurs et les intérieurs ont même aire que ceux qui constituent le triangle abe (ils ont mêmes bases, et même hauteur). On a donc l'égalité $\mathcal{A}(\mathcal{T}'_n) - \mathcal{A}(\mathcal{T}_n) = \mathcal{A}(abe)$. Par ailleurs, on a les deux encadrements : $\mathcal{A}(\mathcal{T}_n) \leq \mathcal{A}(S) \leq \mathcal{A}(\mathcal{T}'_n)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{T}_n) \leq Z \leq \mathcal{A}(\mathcal{T}'_n)$, de sorte que l'erreur $\epsilon = \mathcal{A}(S) - Z$ est inférieure ou égale à $\mathcal{A}(\mathcal{T}'_n) - \mathcal{A}(\mathcal{T}_n) = \mathcal{A}(abe) > \epsilon$ et c'est une contradiction.

L'argument pour éliminer le cas où $\mathcal{A}(S)$ est plus petite que Z est tout à fait analogue.

5 La preuve géométrique

Archimède ne doit pas être totalement satisfait de sa preuve mécanique[11] car il éprouve le besoin d'en donner une autre, purement géométrique celle là. Elle repose très largement sur le lemme des tangentes. On reprend les notations du théorème 3.1.

5.1 Le découpage

On pose $T = \mathcal{A}(amb)$ et $T' = \mathcal{A}(abc)$. Comme $nc = 2\,nm$, on a $T' = 2T$ et l'aire du segment de parabole est comprise entre T et T'. On raffine cette approximation en utilisant les tangentes à P en a, m, b. Les deux premières se coupent en a', les deux dernières en b' et on mène les parallèles à l'axe passant par ces points qui coupent P en q, r, (am) et (bm) en j et l et (ab) en i et k respectivement.

10. On peut montrer que les points a_i divisent le segment $[ab]$ en n parties égales, mais Archimède ne le fait pas. C'est une petite incorrection dans sa preuve car il n'énonce la Proposition XIV qu'avec des a_i réguliers, mais, en fait, il n'y a pas vraiment besoin de cette hypothèse.

11. Il dit : ... *un théorème ... que j'ai trouvé d'abord par la mécanique, puis démontré par la géométrie.*

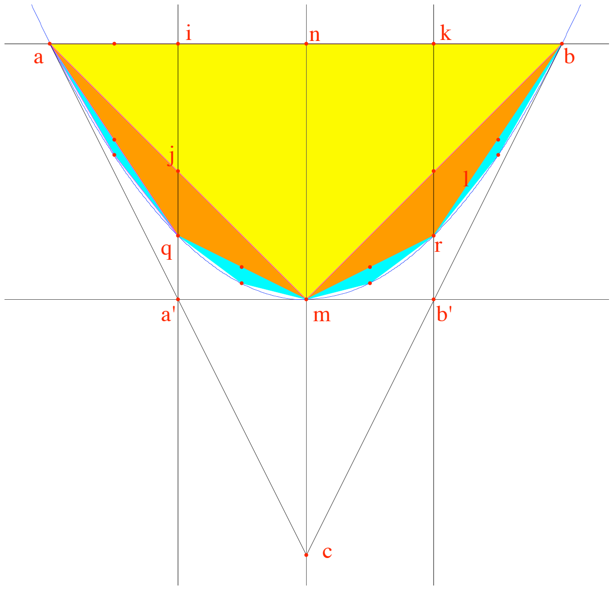

Figure 17 – La preuve géométrique

Alors, par le lemme des tangentes, j est milieu de $[am]$ (donc i de $[an]$) et q de $[a'j]$. On en déduit $ij = 2\,jq$ (par exemple parce que les triangles aij et $ma'j$ sont isométriques) et $\mathcal{A}(aqm) = \dfrac{1}{4}\mathcal{A}(amn) = \dfrac{1}{8}T$. De même, on a $\mathcal{A}(brm) = T/8$ et, comme S contient le pentagone $aqmrb$, on a $\mathcal{A}(S) \geq T + \frac{T}{4}$.

On réitère le procédé en utilisant les tangentes à P en les points a, q, m, r, b et leurs points d'intersection. On obtient les triangles turquoises de la figure et un calcul analogue montre [12] qu'on a $\mathcal{A}(S) \geq T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16}$.

Au n-ième cran on fabrique un polygone P_n inscrit dans P et on a :

$$\mathcal{A}(S) \geq \mathcal{A}(P_n) = T\big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n}\big).$$

5.2 La série géométrique

À ce stade de la démonstration, Archimède doit calculer la somme $s = 1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}\cdot$ Bien entendu, aujourd'hui c'est facile et à la portée d'un lycéen, mais il est intéressant de regarder ce qu'a fait Archimède là-dessus pour mesurer les progrès apportés par l'utilisation de l'algèbre et simplement des notations.

12. On utilise la convexité du segment de parabole, qui résulte de la convexité du cône. Cette propriété est prouvée par Apollonius (Prop. II).

5.1 Lemme. *Pour $n \in \mathbf{N}$, on a la formule :*

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n}.$$

Démonstration. À l'heure actuelle, la preuve la plus classique consiste à calculer : $\dfrac{1}{4}\, s_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{4^n} + \dfrac{1}{4^{n+1}}$ et à noter que cette somme n'est autre que $s_n - 1 + \frac{1}{4^{n+1}}$, ce qui donne $\dfrac{3}{4} s_n = 1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}$ et la valeur attendue $s_n = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3 \times 4^n}$.

Ce n'est pas exactement ce que fait Archimède, d'abord parce qu'il ne dispose pas des notations actuelles. Cela le conduit à ne traiter que le cas $n = 4$ et à induire de là le cas général. Voilà ce qu'il dit :

Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande. Soient A, B, Γ, Δ, E des grandeurs en nombre quelconque, établies en série, dont chacune est quadruple de la suivante, et soit A la plus grande. D'autre part, soit Z le tiers de B, H le tiers de Γ, Θ le tiers de Δ, et I le tiers de E. Dès lors, puisque Z est la troisième partie de B, tandis que B est la quatrième partie de A, l'ensemble de B, Z sera la troisième partie de A ; par conséquent, pour la même raison, l'ensemble de H, Γ, sera la troisième partie de B ; l'ensemble de Θ, Δ, la troisième partie de Γ, et l'ensemble I, E, la troisième partie de Δ. Il en résulte que l'ensemble de $B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I$ sera la troisième partie de l'ensemble de A, B, Γ, Δ. Or, l'ensemble de Z, H, Θ est aussi la troisième partie de l'ensemble de B, Γ, Δ ; par conséquent, l'ensemble de B, Γ, Δ, E, I est aussi la troisième partie du reste A. Dès lors, il est évident que l'ensemble de A, B, Γ, Δ, E augmenté de I, c'est-à-dire augmenté du tiers de E, vaut les quatre tiers de A.

Archimède, contrairement à nous, n'introduit pas exactement $\frac{1}{4} s_n$, mais regarde $s'_n = s_n - 1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$ (par rapport à nous, c'est $\frac{1}{4} s_n - \frac{1}{4^{n+1}}$). Ensuite, ce qu'il note, et qui est la ruse principale, c'est que, pour tout k, on a $\dfrac{1}{4^k} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4^k} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4^{k-1}}$ ce qui, en additionnant, lui donne $s'_n + \dfrac{1}{3} s'_n = \dfrac{1}{3} s_n - \dfrac{1}{3 \times 4^n}$ donc $s_n - 1 + \dfrac{1}{3} s_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} s_n - \dfrac{1}{3 \times 4^n}$ et le résultat.

5.3 La fin de la preuve en termes modernes

Le point crucial est le suivant :

5.2 Lemme. *On reprend les notations de 3.1. La différence entre l'aire de S et celle de amb est plus petite que la moitié de l'aire du triangle.*

Démonstration. On se reportera à la figure ci-dessous. La différence δ est formée de deux parties. Considérons celle située à droite de (mn). Elle est majorée par l'aire du parallélogramme $mdeb$, obtenu en menant la parallèle à (mb) passant par r. Cette aire est double de celle du triangle mrb (c'est le lemme du demi-parallélogramme de [ME]), qui vaut $\mathcal{A}(amb)/8$. Au total, δ est majorée par $4\mathcal{A}(mrb) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(amb) = T/2$.

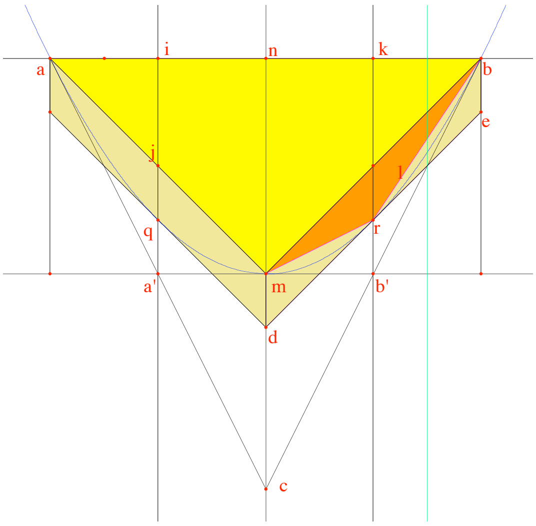

FIGURE 18 – La majoration de l'erreur

Cette majoration est celle du cran zéro. En itérant le procédé, on en déduit que la partie de parabole qui reste quand on enlève le polygone au cran n est plus petite que $\dfrac{T}{2^{n+1}}$.

En termes modernes, on a $s_nT \leq \mathcal{A}(S) \leq (s_n + \frac{1}{2^{n+1}})T$ et cela montre que l'aire de la parabole est la limite de s_nT et on a donc $\mathcal{A}(S) = \dfrac{4}{3}T$.

D'où vient le tiers dans cette preuve ? De la formule :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}.$$

5.4 La fin de la preuve : méthode d'exhaustion

Archimède n'utilise pas le langage des limites mais la méthode d'exhaustion que nous rapportons ici (en conservant nos notations). Archimède appelle K les quatre tiers de l'aire de amb et dit :

Il faut démontrer que cette aire est équivalente au segment S. En effet, si elle n'est pas équivalente, elle est plus grande ou plus petite. Que le segment S soit d'abord plus grand que l'aire K, s'il se peut. Dès lors, inscrivons les triangles amq et bmr comme il a été dit et, dans les segments qui restent alentour, inscrivons d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments ; enfin, inscrivons, dans les segments successivement obtenus, deux triangles ayant même base et même hauteur que les segments. Il en résulte[13] *que les segments abandonnés seront plus petits que l'excédent dont le segment S dépasse K ; en sorte que le polygone inscrit sera plus grand que l'aire K ; ce qui est impossible. En effet, puisque certaines aires sont disposées dans une série dont la raison est quatre, que le triangle abm est d'abord quadruple des triangles amq et bmr, qu'ensuite ces derniers sont quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi continuellement, il est évident que l'ensemble de ces aires est plus petit que les quatre tiers de la plus grande, [...] qui est K.*

En termes modernes cela donne :

Supposons $\mathcal{A}(S) > K = \frac{4}{3}\mathcal{A}(amb)$. Il existe un n tel que $\frac{1}{4^n} \times \mathcal{A}(abm)$ soit plus petit que l'erreur $\epsilon = \mathcal{A}(S) - K$ (c'est essentiellement l'axiome d'Archimède). Quand on fait la construction précédente au cran n, on a vu que l'écart entre S et le polygone inscrit P_n est $< \frac{1}{4^n}\mathcal{A}(abm)$ donc que ϵ. Il en résulte que l'aire de P_n est plus grande que K. Mais comme elle est égale à l'aire de abm multipliée par la somme de la série s_n qui est plus petite que $4/3$, c'est impossible.

13. Ici, il réfère sans le dire au corollaire de la proposition XX qui affirme que l'on peut faire la construction de manière à ce que les segments restants soient plus petits que toute aire donnée. Nous dirions que la suite $1/4^n$ tend vers 0.

6 La preuve qu'il aurait dû faire

Comme on l'a vu, Archimède ne semble pas satisfait de sa preuve mécanique et éprouve le besoin de la doubler par une preuve géométrique. Mon impression est que c'est cette dernière que ses successeurs ont retenue en priorité, sans doute parce qu'elle était plus conforme aux canons de la Mathématique. D'une certaine façon, c'est bien dommage, car la preuve mécanique, par l'utilisation de l'encadrement par les trapèzes, contient en germe les méthodes modernes d'intégration à la Riemann, et on peut penser que, si elle avait été plus étudiée, ces méthodes seraient apparues plus tôt. C'est d'autant plus dommage qu'il y avait une méthode entièrement géométrique, qui lui aurait permis de faire la même preuve sans qu'elle soit entachée des arguments physiques. Reprenons la figure 19 qui illustre le lemme des trapèzes.

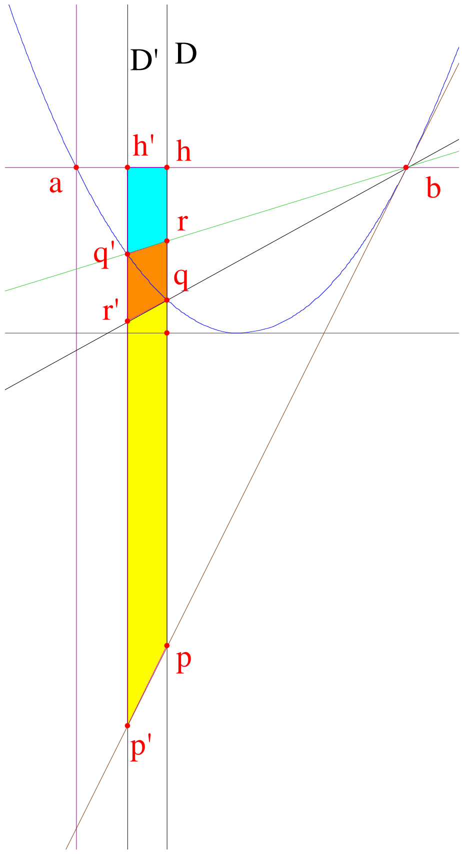

FIGURE 19 – Le lemme des trapèzes

On a vu qu'on a les relations $ah \times \mathcal{A}(hh'p'p) = ab \times \mathcal{A}(hh'r'q)$ et $ah' \times$

$\mathcal{A}(hh'p'p) = ab \times \mathcal{A}(hh'q'r)$. Archimède interprète ces relations en termes de moments, mais il y a une autre manière de faire, c'est de les penser en termes de **volumes** ! En effet, on peut voir la quantité $ah \times \mathcal{A}(hh'p'p)$ comme le volume du prisme de base le trapèze jaune du triangle et de hauteur ah et $ab \times \mathcal{A}(hhq'r)$ comme le volume du prisme de base le trapèze turquoise et de hauteur ab. Le découpage proposé par Archimède permet alors de montrer deux encadrements entre volumes, avec les mêmes extrémités, voir la figure de la page suivante (où seuls figurent les prismes de bases les trapèzes extérieurs) :

• L'encadrement du volume du cylindre C de base le segment de parabole et de hauteur ab entre les prismes de bases les trapèzes intérieurs et extérieurs de la parabole et de hauteur ab.

• L'encadrement du volume de la pyramide Q de base abd et de hauteur ab entre les prismes définis par les trapèzes du triangle abd et les hauteurs ah et ah'.

Le passage à la limite (qu'Archimède aurait formulé sans peine avec la méthode d'exhaustion) montre alors que les volumes $v(C)$ du cylindre et $v(Q)$ de la pyramide sont égaux et les formules du volume du cylindre ($v(C) = ab \times \mathcal{A}(S)$) et de la pyramide ($v(Q) = \frac{1}{3} \times ab \times \mathcal{A}(abd)$), essentiellement connues d'Euclide, montrent que l'aire de S est le tiers de celle de abd.

Dans cette preuve, le tiers provient du volume de la pyramide.

7 Référence

[Perrin] PERRIN Daniel, *Géométrie projective et applications aux géométries non euclidiennes et euclidienne.*

http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/

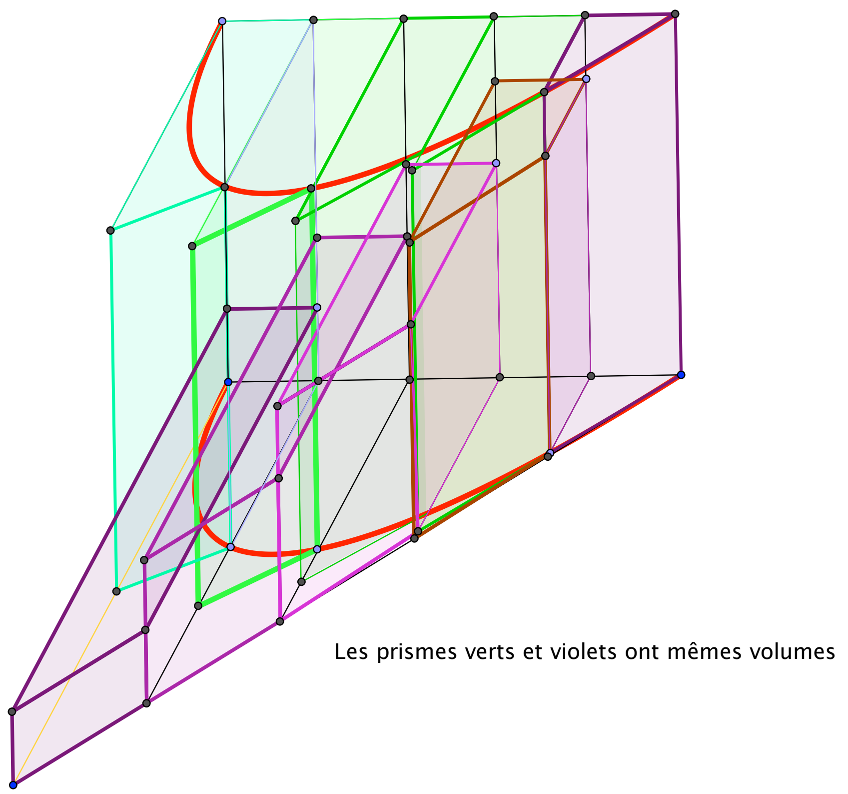

FIGURE 20 – La preuve avec les volumes