Quelles mathématiques pour la formation des maîtres ?

Daniel PERRIN

À Michèle, pour près d'un demi-siècle de connivence mathématique.

Introduction

La commande initiale des organisateurs du colloque était de répondre, de mon point de vue de mathématicien, à deux questions : *Quelles mathématiques pour l'enseignement secondaire ? Quelles mathématiques pour la formation des maîtres ?*

J'ai choisi de ne répondre ici qu'à la deuxième question, même si elle est évidemment liée à la première. Il y a plusieurs raisons à cela. D'abord, le sujet était bien trop vaste et l'est encore avec le seul second point [1]. Ensuite, dans l'état actuel des choses, le premier point est pour moi trop polémique et m'aurait amené à dire du mal de trop de gens. Enfin, même si ces sujets sont liés, il me semble maintenant, surtout à la suite des dernières réformes de programmes, qu'il faut les séparer. Je pense en effet qu'il est nécessaire de donner du recul aux futurs professeurs par rapport aux évolutions des contenus de l'enseignement secondaire, les informaticiens parleraient d'une formation *robuste*.

La formation des maîtres a occupé la plus grande partie de ma vie professionnelle, voire de ma vie tout court. En effet, il y a 36 ans que je travaille dans ce domaine, puisque je me suis occupé de préparation à l'agrégation, d'abord à l'ENSJF [2] pendant 10 ans, puis à l'ENS de la rue d'Ulm pendant 5 ans, et que je m'occupe depuis 21 ans de la préparation au CAPES d'Orsay. J'ai d'ailleurs, du temps de la commission Kahane, animé un groupe dont Michèle faisait partie, et qui a écrit un magnifique rapport [3] [KahaneFdM]

1. Je me limiterai ici à ce que je connais vraiment : la formation des professeurs de mathématiques du second degré.

2. Il s'agit de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles, qui a été intégrée à l'ENS de la rue d'Ulm en 1986.

3. Le plus simple pour le trouver est sans doute d'aller sur ma page web : `http://www.math.u-psud.fr/ perrin/Debats.html`

sur la formation des maîtres en mathématiques, rapport dont la trajectoire vers les tiroirs du ministère a été fulgurante. Il n'empêche que je reprendrai ici certains des thèmes évoqués dans ce rapport, puisque la masterisation [4] m'a permis de mettre en œuvre dans les masters d'Orsay certaines des idées que j'y défendais.

Dans cet exposé, j'aborderai une certain nombre de thèmes, tous concernant le contenu mathématique de la formation des maîtres :

- Ma philosophie de la formation des maîtres en mathématiques.
- Le poids des institutions (programmes, masterisation, concours).
- Le lien avec l'histoire et l'épistémologie.
- Les rapports avec les autres disciplines.
- L'usage des nouvelles technologies.
- Les aspects didactiques.
- Les perspectives.

Comme le temps qui m'est imparti est court, je vais me contenter d'effleurer ces thèmes. Le lecteur trouvera des détails dans de nombreuses rubriques de ma page web :

`http://www.math.u-psud.fr/ perrin/`

J'ajoute que j'ai été engagé ici en tant que mathématicien et donc, même si je parle de choses assez générales, je ne pourrai pas m'empêcher de faire des mathématiques et particulièrement de la géométrie.

1 Une philosophie pour les mathématiques, donc pour la formation des maîtres

L'idée que je me fais de la formation des maîtres est sous-tendue par ma vision des mathématiques. Cette philosophie s'est construite lentement et elle a subi de nombreuses influences. Si je devais la résumer en une phrase, je dirais : *Faire des mathématiques, c'est poser et, si possible, résoudre des problèmes.* Je voudrais aussi mettre en avant ici trois aspects essentiels de ma pratique :

- Je défends une approche **"expérimentale"** des mathématiques, principalement dans les phases de recherche, ce qui implique en particulier l'importance des exemples. Je me suis expliqué sur ce point dans plusieurs textes,

4. La masterisation est une calamité, mais on arrive toujours à trouver un aspect positif à n'importe quelle catastrophe. Comme disait Brassens : *J'ai quitté la vie sans rancune, J'aurai plus jamais mal aux dents.*

voir [Experimentation] [5], [Cergy].

• En complément dialectique du point précédent, je manifeste un souci permanent de **comprendre** les choses et leurs racines. C'est le sens du travail de longue haleine que j'ai entrepris sur la géométrie pour comprendre notamment son lien avec l'algèbre, voir [Livregéométrie]. Mais c'est aussi le leitmotiv de mon enseignement, en formation des maîtres ou ailleurs.

• J'essaie de ne jamais oublier, surtout dans mes contacts avec le monde extérieur, que les mathématiques sont **utiles**, parce qu'elles ont de multiples applications, mais aussi parce qu'elles contribuent à la formation de tous les citoyens [6].

2 Le poids de l'institution

Ce paragraphe vise à expliquer pourquoi je pense qu'il faut que la formation des maîtres prenne un peu de recul par rapport à l'enseignement secondaire et plus généralement par rapport à l'institution.

2.1 Les programmes

Depuis toutes ces années où je m'occupe de former des maîtres, j'ai vu passer beaucoup de changements de programmes qui souvent se contredisaient les uns les autres. C'est pourquoi je pense maintenant que la formation doit prendre du recul par rapport à l'actualité des injonctions ministérielles. Certes, il faut être capable de discerner des évolutions de la société et d'en accompagner certaines. L'exemple de l'informatique est évident à cet égard. Mais je pense aussi qu'il faut parfois résister aux modes et je dirais évidemment cela à propos de la géométrie.

Cela signifie que, même si telle ou telle notion n'est pas ou n'est plus au programme des classes, ce n'est pas pour autant qu'il faut la jeter aux orties,

5. J'explique en particulier dans ce texte le sens que je donne au mot expérimentation.

6. À l'exception des ministres de l'Éducation Nationale : Luc Ferry a dit qu'il n'était pas convaincu de la nécessité de leur enseignement, Claude Allègre les a vouées aux gémonies : *Les mathématiques sont en train de se dévaluer, de façon quasi inéluctable. Désormais, il y a des machines pour faire les calculs.* Quant à Xavier Darcos, Luc Chatel et Valérie Pécresse, mieux vaut étendre un voile pudique sur leurs capacités mathématiques : les deux premiers ont séché sur des problèmes de règle de trois de niveau CM2 (pour XD : *si* 4 *stylos valent* 2,42 *euros combien valent* 14 *stylos ?*, pour LC : *Dix objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent quinze de ces objets*, réponse de LC : 16,50), la troisième a gaillardement additionné les pourcentages d'augmentation des impôts locaux du département (30%) et de la région (58%) pour obtenir une augmentation totale de 88%. On trouve facilement les videos de leurs exploits sur Internet.

d'abord parce qu'elle peut y surgir ou réapparaître, et aussi, parfois, parce qu'elle contribue à la formation mathématique des étudiants. C'est le "comprendre" évoqué ci-dessus. Attention, il y a une difficulté évidente : ce n'est pas parce qu'on aura traité une question que les étudiants pourront vraiment s'en emparer, surtout si, devenus professeurs, ils n'ont pas à l'enseigner. Il n'empêche, et on l'a vu au moment de l'introduction des probabilités et des statistiques, mieux vaut que les professeurs aient déjà entendu parler des notions qu'ils auront à enseigner.

Un autre point est important : celui de la charge de la preuve. Si l'on regarde les programmes du secondaire, le mot *admis* est l'un des plus fréquents. Certes, il n'est pas question de tout démontrer [7], mais tout de même, nous enseignons les mathématiques, et en mathématiques, on ne se contente pas d'affirmer des choses, on essaye de les prouver. Il est donc nécessaire, dans la formation des maîtres, de viser à une certaine cohérence, modeste, puisque centrée sur les programmes du secondaire, mais réelle. C'est [8] assez facile en analyse, l'arrière-plan nécessaire étant en gros celui des deux premières années d'université. C'est beaucoup plus difficile en géométrie, car les théories qu'on enseigne à la Fac (quand on les enseigne) sont à base d'algèbre linéaire, alors que les professeurs, au moins au collège, devront enseigner la géométrie "à la Euclide". Comme le dit Gilbert Arsac (voir [Arsac]), en ce domaine, la formation universitaire est aussi utile aux futurs professeurs qu'un couteau l'est à une poule. C'est l'un des points sur lequel nous mettons désormais l'accent à Orsay.

2.2 Des exemples

Fidèle aux principes énoncés ci-dessus et ailleurs, je préfère donner quelques exemples plutôt que de discourir dans le vide.

2.2.1 Les suites récurrentes

Avant 2002, les suites récurrentes étaient une notion essentielle du programme de terminale S, comme en témoignent les sujets de Bac de l'époque. L'outil principal employé alors était l'inégalité des accroissements finis. Cet outil a été jeté à la poubelle en 2002, l'idée étant de rompre avec un enseignement devenu routinier. Après cette date, on peut encore étudier des

7. Il y a de multiples exemples où l'énoncé du résultat est bien plus important que sa preuve : le théorème de D'Alembert, celui de Cauchy-Lipschitz, etc.

8. Je devrais dire *c'était* car la nouvelle donne, avec l'absence d'un programme spécifique du concours, rend les choses plus compliquées. Je reviens sur ce point plus loin.

suites récurrentes, mais seulement avec le théorème des suites croissantes majorées [9]. Il se trouve que c'est un des domaines que j'enseigne depuis longtemps, que je trouve très intéressant [10] et où – à mon avis – on peut apprendre beaucoup d'analyse. Ma vision de ce domaine tourne autour des points fixes et de leur dérivée, (points attractifs ou répulsifs), elle est intimement liée à la rapidité de convergence et à l'utilisation de calculatrices et d'ordinateurs, voir [Suitesrecurrentes] [Logistique], etc. Bref, j'ai toujours considéré que la suppression de l'inégalité des accroissements finis des programmes était stupide (et je me suis souvent accroché avec Claudine ex-Robert là-dessus). Alors, sous prétexte d'être à la remorque des programmes, doit-on se priver en formation d'un outil efficace ? Je réponds non sans hésiter.

Bien entendu, il est nécessaire que les étudiants connaissent les programmes du collège et du lycée et d'ailleurs, même si elles sont stupides, les contraintes peuvent donner lieu à des questions intéressantes (comment adapter telle preuve au programme ? comment contourner celui-ci ?), mais il est essentiel de donner aux futurs professeurs, sur ces thèmes, une vision mathématique qui leur permettra de survivre aux changements de programmes qu'ils ne vont pas manquer de subir.

2.2.2 Exponentielle et logarithme

Parmi les innovations du programme de 2002 figure aussi un renversement de point de vue dans le traitement des fonctions exponentielle et logarithme. Alors qu'auparavant on introduisait le logarithme comme primitive de $1/x$, puis l'exponentielle comme fonction réciproque, l'ordre proposé est maintenant l'inverse : on introduit l'exponentielle comme solution de l'équation différentielle $y' = y$, puis le logarithme comme fonction réciproque. La justification de ce choix est dans le lien avec la physique et l'importance des équations différentielles dans ce domaine. Les groupes techniques de maths et de physique de l'époque avaient d'ailleurs publié un document d'accompagnement commun sur le thème de la radioactivité et ses liens avec l'exponentielle, fort bien fait. Contrairement à l'exemple précédent, je n'étais pas hostile à ce choix, qui me paraissait discutable, mais cohérent. Il n'empêche que, pour la formation, j'impose aux étudiants de CAPES de traiter les deux voies possibles, partant de l'hypothèse que durant leurs quarante ans de carrière ils retrouveront certainement l'autre ordre d'introduction [11].

9. Lequel, par parenthèse, avait disparu des programmes dans la période précédente.

10. Je rejoins là-dessus un certain nombre de collègues comme J.-L. Ovaert qui avaient contribué à introduire ces thèmes dans les programmes.

11. J'y mettrais ma main à couper. On notera que vu mon âge, je ne prends pas un grand risque.

2.2.3 La géométrie et les nouveaux programmes

Les futurs programmes de lycée, dont je ne dirai pas ce que je pense sous peine de devenir grossier, ont pratiquement supprimé la géométrie du lycée (voir [APMEP]). Faut-il pour autant la supprimer de la formation ? Tant que j'aurai un souffle de vie, je m'opposerai à cela. Il y a un exemple très instructif, de ce point de vue. La réforme dite des mathématiques modernes, au début des années 1970, a banni des programmes les cas d'isométrie et de similitude des triangles. Je pense que c'est une erreur, et je l'ai dit mille fois (voir [Kahane], etc.). D'autres que moi ont pensé cela et ces notions sont revenues dans les programmes de seconde de 2000. Outre qu'à mon avis c'est au collège que ces outils auraient leur place, la difficulté qui a surgi alors est que les professeurs formés pendant les 30 ans qui venaient de s'écouler ignoraient jusqu'à l'existence de ces outils et ne voyaient pas l'intérêt qu'ils pouvaient présenter. Le résultat – pour autant que je puisse en juger – est que les cas d'isométrie et de similitude ne se sont pas imposés et que peu de voix se sont fait entendre quand ils ont de nouveau été supprimés en 2009. Sur ce point, je persiste et signe avec toute mon énergie : ce sont des outils indispensables pour faire de la géométrie et donc il est nécessaire de les enseigner en formation des maîtres, ce que je fais.

2.2.4 Les équations différentielles

Le dernier point concerne les équations différentielles. On les a vues portées au pinacle par le programme de 2002 avant d'être jetées à la poubelle [12] par ceux de 2012. Je soupçonne derrière cette disparition un présupposé idéologique qui est loin de faire l'unanimité dans le milieu mathématique : *le continu c'est dépassé, les mathématiques de demain ce sont les probabilités, les mathématiques discrètes, l'algorithmique*, que sais-je encore. Ce genre d'affirmation, qui relève de la propagande, ne doit pas être pris pour argent comptant sans débat, et surtout pas par les gens en charge des programmes [13]. En tout état de cause, il me semble nécessaire de continuer, en formation, à étudier les équations différentielles, même si elles ne sont plus dans les programmes.

12. Mais on continue à introduire l'exponentielle par l'équation $y' = y$, allez comprendre.
13. C'est d'ailleurs pourquoi je souhaiterais une plus grande démocratie dans leur élaboration.

2.3 La masterisation

Là non plus, pour la bonne tenue de ce texte, je ne dirai pas ici ce que je pense de cette réforme, notamment sur le plan de la formation professionnelle, ni des cadeaux supplémentaires et empoisonnés que nous a faits le jury de CAPES à cette occasion. La conséquence la plus visible de tout cela est la fuite éperdue des étudiants vers n'importe quoi d'autre que le métier de professeur. Je parle ici de formation des maîtres, encore faudrait-il que nous en ayons à former [14] ! Si je devais donner un conseil au nouveau gouvernement sur ce point, je dirais d'abord : laissez-nous travailler !

Je le dis d'autant plus fort qu'on voit se profiler un certain nombre de réformes (voir les propositions du rapport Jolion) qui font soi-disant consensus, mais dont les conséquences pourraient être très négatives. Je pense à celle consistant à mettre l'écrit du concours [15] à la fin de l'année de M1. Une telle mesure aurait comme conséquence immédiate, au moins pour les formations que nous avons mises en place à Orsay, de tuer toutes les innovations dont je vais parler ici pour se rabattre sur la nécessaire préparation aux épreuves du concours.

2.4 Le concours

Comme je l'ai dit, il y a 36 ans que je m'occupe de préparation aux concours d'enseignement et je suis convaincu que ces préparations sont un moment important dans la formation des maîtres. Cependant, je trouve que le ministère et l'actuel jury du CAPES ne nous facilitent pas la tâche. En effet, l'absence d'un programme spécifique [16] pour le concours, les choix des

14. Voici quelques chiffres. En 1999 il y avait 7332 candidats présents aux deux épreuves écrites, pour 945 admis. Depuis le nombre de présents a chuté à 4074 en 2005, 3160 en 2010 et 1285 en 2011. Cette année 2011 est *a priori* exceptionnelle puisqu'à cause de la réforme, les étudiants sortant de L3 ne pouvaient pas se présenter au CAPES. Cependant, la remontée en 2012 a été très minime si j'en juge par le nombre d'admissibles : 1047 en 2011 (pour 950 postes et 574 reçus) et 1183 en 2012.

15. Je parle seulement du CAPES, et pas du concours de professeur des écoles, pour lequel je me garderai d'émettre un avis. Pire encore, je ne suis pas sûr du tout que ce qui me semble valable pour le CAPES de mathématiques le soit aussi pour les autres.

16. Je vais être brutal. Voilà typiquement ce que j'appelle une connerie, il n'y a pas d'autre mot. Il y avait jusqu'ici un programme du CAPES, qui valait pour l'écrit et partiellement pour l'oral et qui était tout à fait raisonnable. Ce programme a été supprimé et remplacé par le programme des classes de lycée, auquel est adjoint celui des classes préparatoires pour l'écrit et des BTS pour l'oral. Cela ne pose pas de problème pour l'écrit, mais cela en pose de très importants pour l'oral, où faute d'avoir de quoi prendre un peu de recul par rapport aux programmes du secondaire, on ne sait plus sur quel pied danser. Si mes informations sont fiables la racine de cette décision inepte est à chercher

intitulés des leçons, les problèmes de matériel créés par le passage de la calculatrice à l'ordinateur, toutes ces contraintes imposées introduisent des contradictions entre ce que je considère comme une formation des maîtres digne de ce nom et ce que nous sommes obligés de faire pour préparer nos étudiants au concours. Alors, s'il faut évidemment continuer à mener la préparation pour que les étudiants soient reçus, faute de quoi nous n'aurions rien fait [17], il me semble qu'il est nécessaire de ne pas être à la remorque du jury et de ne pas obtempérer à ses oukases avec une absolue docilité.

2.5 Nos propositions

Je détaillerai ci-dessous les propositions du master d'Orsay consacré à la formation des professeurs certifiés, mais ce qui précède montre quel en est le principe : proposer aux étudiants une formation robuste qui leur permette bien sûr d'être reçus le concours, mais aussi de survivre aux changements de programmes, et qui ne soit pas à la remorque des modalités changeantes du concours et des lubies des uns et des autres [18].

3 Le lien avec l'histoire

J'aborde maintenant, avec les trois points suivants (histoire, autres disciplines, nouvelles technologies) trois points particuliers, mais importants, de la formation.

Concernant l'histoire, c'est un point que j'estime très important dans la formation des futurs professeurs et que j'essaie de mettre en pratique. Je ne citerai que deux raisons en faveur d'un enseignement faisant une place à une approche historique.

3.1 Comprendre les évolutions

Cela participe de ma philosophie des mathématiques : elles ne sont pas nées d'hier et il est important de comprendre les difficultés de l'humanité pour les appréhender (car ce seront aussi, sans doute, celles des élèves). Voici plusieurs exemples en ce sens.

---

dans une volonté de mettre fin au caractère encyclopédique des programmes des concours **littéraires**. Comment ai-je appelé cette mesure, déjà ?

17. Sauf de former de futurs vacataires, ce qui est peut-être l'un des buts de la réforme.

18. Le pire en la matière est l'exigence – là je ne trouve pas de qualificatif assez négatif, le lecteur choisira– du CLES (Certificat de compétences en Langues de l'Enseignement Supérieur) pour recruter des professeurs de mathématiques.

3.1.1 Les nombres, la géométrie et l'analyse

Il est important que les futurs professeurs mesurent quelle chance nous avons de disposer des nombres décimaux [19]. La souplesse du maniement des nombres dont nous disposons maintenant a permis à la fois des progrès du côté de la géométrie : le calcul en coordonnées initié par Descartes conduit à la solution des problèmes de construction laissés en suspens par les Grecs, mais surtout à la création de l'analyse, avec le calcul différentiel et intégral.

3.1.2 Calcul des grandeurs

Justement, sur ce sujet, il est très intéressant, pour comprendre la révolution qu'apportent dérivées et intégrales, d'étudier les calculs des anciens (volume de la pyramide par Euclide, quadrature de la spirale et de la parabole, calcul du volume de la boule par Archimède, etc.). Ces points, qui sont des sommets des mathématiques de l'antiquité deviennent des exercices pour lycéens avec le calcul intégral.

3.1.3 Un exemple : le calcul du volume de la boule

Je propose régulièrement en dossier de CAPES le calcul du volume de la boule de rayon R par la méthode des physiciens [20], en essayant de faire le lien avec une approche plus mathématique. La méthode est de calculer le volume d'une tranche infinitésimale de boule, d'épaisseur dz, située à la cote z et assimilée à un cylindre. On trouve $dV = \pi(R^2 - z^2)dz$ et on obtient le volume total en "sommant" (i.e. en intégrant) les volumes infinitésimaux. Ce calcul conduit à une discussion intéressante sur les approximations du physicien (ici un encadrement permet facilement de les justifier) et surtout, sur le lien entre l'intégrale vue comme somme et comme primitive : il suffit en effet d'introduire le volume $V(z)$ de la tranche de boule jusqu'à la cote z et on montre alors, avec toute la rigueur voulue, la formule $V'(z) = \dfrac{dV}{dz}\cdot$ Marc Rogalski parle à ce sujet de procédure intégrale et/ou dérivée-primitive, voir [Rogalski].

3.2 La culture

Un autre aspect important de l'histoire est de donner des indications sur les thèmes marquants des mathématiques. Je pense, en me limitant à la

19. Et qu'ils sachent qu'ils ne datent que de la fin du XVI-ième siècle pour ne pas affirmer qu'Archimède cherchait à calculer les décimales de π.

20. Voir paragraphe suivant.

géométrie, à trois domaines, sur lesquels il me semble que les futurs professeurs doivent avoir au moins une idée, même si elle reste superficielle.

3.2.1 L'axiomatique de la géométrie et l'existence de géométries non euclidiennes

Je reste convaincu de la nécessité de l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée, mais c'est un point sur lequel la formation des maîtres est notoirement insuffisante. En effet, dans la plupart des cursus universitaires, la géométrie est tout simplement absente et lorsque qu'elle est enseignée c'est en général dans le cadre des espaces vectoriels et affines. Or, si cette approche est importante, elle n'est d'aucun secours pour un enseignant de collège (c'est le couteau pour la poule, comme le dit Arsac). Il me semble plus important, pour les professeurs de collège, d'avoir une connaissance (limitée) d'une axiomatique du type de celle d'Euclide-Hilbert. Cela permet en effet de comprendre comment on utilise les cas d'isométrie, mais aussi de faire sentir les difficultés liées aux questions de position, donc aux cas de figure, qui sont source de difficultés pour beaucoup.

Un autre point culturellement important est de donner une ouverture (modeste) vers certaines géométries non euclidiennes (hyperbolique et sphérique), avec une réflexion historique et épistémologique très riche.

3.2.2 Les polyèdres réguliers

C'est un des sommets de la mathématique grecque [21], mais la plupart des étudiants qui préparent le CAPES ignorent jusqu'à leur existence. Il n'est pourtant pas très difficile d'étudier ces objets, y compris en réalisant des maquettes, et il y a nombre de questions intéressantes qui s'y rattachent (polyèdres archimédiens, deltaèdres, etc.).

3.2.3 Aires, intégrales et primitives

Dans leurs cursus universitaires, les étudiants rencontrent l'intégrale de Riemann, voire celle de Lebesgue et c'est une bonne chose. Mais, il est exceptionnel qu'on ait attiré leur attention sur les rapports entre ces notions et le problème de la mesure des aires ou des volumes. Par exemple, un théorème comme celui de Bolyai (qui dit que deux polygones de même

21. Michèle Audin dit à ce propos : *Cet énoncé* (le fait qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers) *fait, à mon avis, partie du patrimoine culturel de l'humanité, au même titre que l'Odyssée, les sonates de Beethoven ou les statues de l'île de Pâques (pour ne pas parler des pyramides) et il m'est difficile d'imaginer qu'un citoyen, a fortiori un professeur de mathématiques, l'ignore.*

aire sont équivalents par puzzle [22]) est rarement enseigné, bien qu'il constitue la justification théorique des pratiques de découpage et recollement que l'on utilise à l'école et au collège. De même, les étudiants sauront sans doute calculer l'aire du disque et la longueur du cercle par les méthodes du calcul intégral, mais ignoreront la méthode d'Archimède *via* les polygones réguliers, pourtant plus pertinente pour l'enseignement au collège et au lycée. Enfin, la réflexion sur les liens entre intégrales et primitives est souvent un peu courte, alors qu'avec les actuels programmes de terminale qui introduisent l'intégrale à partir de l'aire, elle est indispensable.

3.3 Les propositions du master d'Orsay

Pour aborder les points ci-dessus, nous avons mis en place un système de projets de géométrie dont une partie au moins est centrée sur ces thèmes historiques. Par exemple en 2010 il y avait des projets tournant autour du Livre I d'Euclide, ou encore de son calcul du volume de la pyramide, de la quadrature de la spirale d'Archimède ou des géométries non euclidiennes, etc. En 2011 on a abordé les thèmes de la construction des polygones réguliers (en partant d'Euclide), de la quadrature de la parabole, du théorème de Pascal, des deltaèdres, etc. Ce module comporte aussi une partie de cours et d'exercices, ainsi que des exposés qui permettent d'aborder certains des thèmes évoqués ci-dessus (par exemple, les constructions à la règle et au compas, le théorème de Bolyai, la formule de Girard sur les polygones sphériques, l'utilisation des aires en géométrie, les polyèdres réguliers et archimédiens, etc.)

4 Les rapports avec les autres disciplines

Pour plus de détail sur ce sujet, le lecteur pourra consulter le rapport oublié de la commission Kahane sur la formation des maîtres.

4.1 Une préoccupation nécessaire

Le lien avec les autres disciplines est un point très important. D'abord, il est essentiel que les futurs professeurs sachent que les mathématiques sont utiles et qu'elles le sont dans des domaines à la fois nombreux et variés. Cela leur permettra d'apporter des éléments de réponse à la sempiternelle question des élèves, voire du grand public : *Mais Monsieur (resp. Madame), à quoi ça*

22. Pour la culture, on peut évoquer le problème analogue dans l'espace (troisième problème de Hilbert) et sa solution négative par Dehn.

sert ? Ensuite, sur le plan de la science, les relations entre les mathématiques et les autres disciplines sont à la fois anciennes et fécondes [23] et un professeur de mathématiques ne peut ignorer ces liens. Enfin, l'institution les y incite en multipliant les dispositifs pluridisciplinaires (TPE, itinéraires de découverte, MPS, etc.). Souvent, ces dispositifs posent la question de la modélisation, pas toujours de manière satisfaisante, et il n'est pas superflu que les futurs professeurs de mathématiques aient réfléchi à ce sujet. Les commentaires des programmes de 2002 étaient très explicites à ce sujet (voir le remarquable document d'accompagnement sur la radioactivité et l'exponentielle).

4.2 Une tâche difficile

Il nous semble cependant que les jeunes professeurs ne sont pas, à l'heure actuelle, suffisamment préparés à relever tous ces défis. La difficulté rencontrée ici tient d'abord à la formation antérieure des étudiants, qui comporte de moins en moins de physique, notamment. Cela étant, il ne faut pas sous-estimer la difficulté intrinsèque de ce thème, plus complexe qu'il n'y paraît.

Sur ce sujet, plus encore que sur d'autres, il est essentiel que la formation des maîtres ne soit pas à la remorque des programmes et des lubies de leurs concepteurs comme on l'a vu à propos des équations différentielles.

Un autre point est encore plus délicat, il s'agit des différences de méthodes entre mathématiciens et physiciens. Un exemple typique concerne les calculs de grandeurs physiques dont on a vu ci-dessus un exemple avec le volume de la boule. On peut en citer bien d'autres, par exemple le calcul du moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe. Faire le lien entre les pratiques des physiciens et un traitement mathématique, si possible élémentaire, du sujet, me semble un objectif important de la formation des maîtres.

4.3 Nos propositions

À Orsay, nous avons pris largement en compte cet aspect dans la formation dans deux modules de M1 :

• Au premier semestre, un (petit) module intitulé *Mathématiques et autres disciplines* centré sur les fonctions (dont l'optimisation), les calculs de

23. Ce n'est pas le lieu d'entrer dans le détail ici, mais les exemples sont légion et vont dans les deux sens. De nombreux domaines des mathématiques sont issus de la physique ou d'autres disciplines : les équations aux dérivées partielles, l'analyse de Fourier, les distributions, etc. D'autres au contraire ont existé avant leurs applications : l'exemple des coniques et de son lien avec la mécanique céleste est bien connu. Plus récemment, l'arithmétique est devenue science appliquée avec l'invention du code RSA en particulier.

grandeurs (physiques ou autres), et surtout sur les équations différentielles (avec des applications à la fois en physique, en biologie, en médecine, etc.). Enfin, pour varier les plaisirs, ce module contient un chapitre sur le code RSA.

• Un module plus ambitieux intitulé *Projet de modélisation*, avec à la fois un apport théorique (notamment sur les équations différentielles, mais aussi sur les chaînes de Markov et les matrices) et un travail personnel des étudiants (sous forme de projet) sur des thèmes appliqués. Les thèmes abordés en 2010-2011 ont été les suivants : modèle SIR, modèle de Hethcote (pour la blennorragie) en épidémiologie, modèle de Leslie, modèle logistique discret en écologie, modèle de Robertson en cinétique chimique, stabilité du régulateur de Watt en physique.

5 L'usage des nouvelles technologies

Il est clair que l'enseignement des mathématiques et partant, la formation des maîtres, ne peut ignorer les nouvelles technologies. Outre des raisons sociales (elles font intimement partie du monde des élèves et l'enseignement ne peut les ignorer), elles ont aussi apporté une révolution dans la façon de faire des mathématiques. Par exemple, jusque dans les années 1970, il était tout à fait admis de donner un théorème d'existence sans se préoccuper le moins du monde de fournir un algorithme pour expliciter des solutions [24]. Depuis l'irruption des ordinateurs dans notre vie, ce n'est plus envisageable et il faut non seulement proposer un algorithme, mais aussi discuter ses performances et sa robustesse.

Du côté de la formation des maîtres, cela s'est traduit soit par de nouvelles épreuves (comme à l'agrégation), soit par une injonction ferme d'utilisation de ces technologies (avec les calculatrices, puis l'ordinateur [25], comme au CAPES).

Sur ce thème, je vais évoquer trois points que je connais pour les avoir pratiqués : les logiciels de géométrie, l'utilisation des moyens de calcul en analyse et la programmation. Attention, même en ces domaines je suis loin d'être un spécialiste, sans parler d'autres où je suis totalement ignorant. De plus, cette question étant un sujet de conférence à elle seule, je vais me limiter à l'un des aspects, qui renvoie au thème de l'expérimentation en

24. Et c'était même presque mal vu dans l'enseignement supérieur de l'époque.

25. La suppression en 2011 de l'utilisation des calculatrices évoluées au profit de l'ordinateur est l'un des cadeaux empoisonnés du jury de CAPES, dont il n'a sans doute pas mesuré l'impact didactique : les élèves n'utilisent pas de la même manière ces deux outils en classe.

mathématiques.

5.1 Logiciels de géométrie

Il est clair que, de nos jours, la maîtrise d'un logiciel de géométrie dynamique fait partie des compétences indispensables pour un professeur. Au temps de l'image reine, il ne peut être question d'ignorer les méthodes d'illustration efficaces. Pour le plaisir visuel le lecteur trouvera à la fin de ce texte l'exemple d'un pavage du plan hyperbolique, dans la version originale de Klein, puis dans celle que j'ai réalisée avec Cabri grâce aux macros d'Yves Martin (sans doute beaucoup plus vite).

Sur ce sujet, je renvoie pour plus de détails à ma conférence *Cabri et le chemin des huit vertus* (Lille 2010), sur ma page web. J'y répertoriais huit fonctions importantes de ces logiciels : dessiner, illustrer, explorer, conjecturer, éliminer, vérifier, prouver, poser des problèmes. Certaines sont évidentes, et l'intérêt des logiciels pour l'exploration d'une question mal connue et la production de conjectures est évident. D'autres le sont un peu moins. En particulier, l'intérêt des logiciels pour la preuve, avec la dialectique conjecture-vérification-élimination et la possibilité de faire varier les données, me semble essentiel.

De plus, les logiciels modernes comme Geogebra ou Carmetal, permettent aussi (plus encore que ne le faisait Cabri) un dialogue fructueux entre le calcul et la géométrie.

5.2 Le calcul approché

Lorsqu'on enseigne l'analyse, l'apport des moyens de calculs actuels [26] est extraordinaire. Je me souviens avoir appris, comme tous les taupins, à comparer les croissances, les ordres de grandeurs, mais cela n'est devenu vraiment une connaissance profonde que quand j'ai vu ce que signifiait, sur une calculatrice, que converger en $1/n$ ou en $1/2^n$, voire en $1/2^{2^n}$.

Sur ce plan, j'ai l'impression, de temps en temps, que les concepteurs de programmes sont stupides [27]. Ainsi, ils ont fait disparaître deux thèmes qui me semblent pourtant cruciaux pour l'enseignement de l'analyse, mais aussi des nombres réels, de la notion de convergence, d'ordre de grandeur, pour l'utilisation de l'informatique, que sais-je encore : la résolution des équations numériques $f(x) = 0$ et les calculs approchés d'intégrales.

26. Bien sûr, Euler faisait les calculs à la main, mais on a un peu perdu de sa dextérité de nos jours.

27. Désolé, ça m'a échappé.

5.3 La programmation

Indépendamment du fait que l'algorithmique fasse maintenant partie des programmes du lycée, c'est un domaine que tous les professeurs doivent connaître. Je ne suis pas un expert de la programmation, mais le peu que je sais faire m'est bien utile, toujours dans la perspective d'une approche expérimentale des mathématiques. J'ai beaucoup utilisé en recherche, il y a quelques années, un logiciel d'algèbre commutative appelé Macaulay, qui permettait une dialectique conjecture-vérification très fructueuse, voir par exemple l'article [Koszul]. C'est maintenant pour moi un réflexe, quand j'ai une idée de conjecture (voir mon discours là-dessus dans [Experimentation]) de la tester si possible avec une machine, en écrivant si besoin est quelques lignes de programme.

5.4 Nos propositions

Les masters de formation des maîtres d'Orsay comportent des modules spécifiques (intitulés TICE 1,2,3) qui visent à l'apprentissage des outils (Geogebra, xcas, WIMS, etc.). De plus l'usage des TICE est obligatoire dans les projets (écrits en Latex, présentés avec Beamer, etc.) et dans les leçons d'oral.

6 Les aspects didactiques

C'est un point essentiel et je ne fais pas partie des mathématiciens qui pensent que connaître sa discipline est suffisant pour l'enseigner. Cela étant, il faut s'entendre sur le sens du mot didactique. Pour être depuis longtemps un compagnon de route des didacticiens, je ne les suis pas sur tous les points et notamment, s'agissant de formation des maîtres, sur l'excès de théorisation. Comme je l'ai dit plus haut, je suis, même en mathématiques, une espèce de physicien manqué et je pense que des exemples bien choisis sont plus efficaces qu'un long discours sur les praxéologies. C'est ce que je vais faire maintenant sur trois thèmes.

6.1 Changer de posture

La première difficulté, pour les étudiants, est de quitter leur habit d'étudiant pour celui de professeur [28]. Mon expérience c'est que c'est difficile et que la préparation au CAPES (ou le master) y suffisent à peine. Cela signifie

28. Je parle uniquement ici du plan mathématique et didactique, pas des relations avec des vrais élèves.

une chose très simple, mais non évidente : face à un exercice, il ne suffit plus de savoir le résoudre, plus ou moins bien, par une méthode plus ou moins efficace, en vue d'avoir les points [29] qui y sont attribués à l'examen, mais d'envisager d'autres possibilités de l'aborder. La justification de cette analyse est de permettre de comprendre les procédures des élèves, leurs idées peut-être inabouties, leurs intuitions, justes ou non. En vérité, je suis conscient ici de mettre en avant un présupposé idéologique – largement partagé, il est vrai – sur l'enseignement des mathématiques. Je pense qu'on n'a rien fait tant que les savoirs ne sont pas passés par la tête des élèves [30]. Pour cela, il est important d'essayer de se raccrocher aux idées qu'ils ont déjà en tête (ou de les corriger) et cela nécessite de comprendre ces idées, même confuses. J'ajoute, que cela ne peut que diminuer la perception négative du public sur le côté dogmatique des mathématiques.

Pratiquement, qu'est-ce que cela signifie ? Que, face à un exercice on commence par se poser la question : d'où sort-il ? Comment peut-on le fabriquer, comment en produire d'autres du même type ? Un exemple simple de ce point de vue est l'exercice classique de terminale où, pour étudier une suite récurrente homographique, on opère un changement de suite pour se ramener au cas géométrique. L'exercice n'est pas difficile ainsi, mais il a un défaut rédhibitoire pour moi : on ne comprend pas d'où il vient [31], la suite auxiliaire est parachutée.

Ensuite, on se pose la question de comment aborder un exercice. Tout dépend évidemment du problème, mais il y a des constantes : l'expérimentation, quand elle est possible, l'aspect visuel s'il existe, l'énumération des outils possibles. C'est la phase de recherche, la plus passionnante de toutes, celle pour laquelle nous, professeurs, avons choisi de faire des mathématiques et où il est possible de transmettre une partie de notre expérience à nos élèves, à condition de le faire avec honnêteté. Il y a d'ailleurs ici un grand champ de recherches pas encore très exploré sur la transmission de ces savoir-faire, voir par exemple [Castela], j'y reviens plus loin.

C'est ce que nous essayons de faire à travers l'épreuve sur dossier du CAPES : l'analyse d'un exercice doit préciser son objectif, la ou les méthodes employées et les outils utilisés et tenter d'anticiper les difficultés que pourraient rencontrer des élèves.

29. Voire la moitié de ceux-ci, ce qui semble suffisant à beaucoup.

30. L'exemple de l'inculture de trois de nos récents ministres – d'accord, ils sont nuls, mais ils ont tout de même été à l'école et cela doit nous interroger – sur la règle de trois ou les pourcentages montre que cela n'est pas automatique.

31. Bien entendu, on peut le comprendre avec une petite réflexion supplémentaire sur la conjugaison.

6.2 Le temps d'avance

Le principe est le suivant. L'objectif est le même que ci-dessus : ne pas rejeter une tentative d'un élève sans argument. Pour cela, la culture est un atout en ce qu'elle donne au professeur un *temps d'avance* sur l'élève, qui lui permet, face à un exercice, de trouver rapidement le résultat et de comprendre quelles méthodes sont possibles. J'ai développé ce point dans le rapport [KahaneFdM]. Je donne seulement trois exemples ici, alors qu'il y en a des dizaines, mais je les ai choisis assez ambitieux, pour montrer comment on peut utiliser une culture mathématique.

6.2.1 Géométrie et algèbre linéaire

Le premier exemple est maintenant hors programme, mais j'ai dit plus haut que je refusais de passer sous les fourches caudines des programmes.

Dans le programme de terminale S (spécialité) d'il y a quelques années, on étudiait les composées des transformations du plan. Un outil très précieux pour cela, que l'on voit en préparation au CAPES, est la connaissance des applications affines et de leurs applications linéaires associées. Par exemple, s'il s'agit de composer deux rotations de centres distincts, le passage en vectoriel permet aussitôt d'affirmer que la composée est (en vectoriel) une rotation d'angle la somme des angles, et, comme elle n'a pas la valeur propre 1 (sauf si la somme des angles est nulle), on en déduit que la composée affine est aussi une rotation. Cet outil, qui n'est pas du tout à la disposition des élèves, est cependant utile au professeur car il lui donne un temps d'avance sur eux et la connaissance immédiate du résultat. Bien entendu, il reste à faire le travail de transposition et d'imaginer une autre preuve, accessible celle-là aux élèves. En l'occurrence la décomposition des rotations en produit de symétries axiales est l'outil efficace à ce niveau.

6.2.2 Erlangen

Dans cet exemple [32], le décalage est encore plus grand puisqu'il s'agit d'un exercice de collège ou de seconde [33] que l'on peut résoudre en utilisant l'esprit du programme d'Erlangen.

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ?

Le professeur qui a une idée claire du programme d'Erlangen de F. Klein notera d'abord que le problème est affine et qu'on peut donc le transformer

32. J'utilise très souvent cet exemple, voir par exemple [DPR] ou [Maubeuge] ou l'introduction de mon livre de géométrie projective.

33. Il était évoqué dans le document d'accompagnement de 2000.

sans risque en supposant que $ABCD$ est un carré. Il verra alors aussitôt en comparant les hauteurs des triangles que M doit être sur la bissectrice de l'angle ABC. Comme les notions de hauteurs et de bissectrice ne sont pas affines, il devra traduire cette condition dans le cas général en disant que M doit être sur la diagonale $[BD]$. Comme dans les exemples précédents, le maître aura donc ici un temps d'avance sur les élèves puisqu'il aura immédiatement trouvé le résultat grâce à sa culture (par parenthèse, en mathématiques, découvrir quel est le résultat à prouver est bien souvent la tâche à la fois la plus intéressante, mais aussi la plus difficile ; dans le cas présent, les élèves devront faire quelques expériences, par exemple avec un logiciel de géométrie, pour formuler une conjecture). Il devra ensuite imaginer une preuve accessible à des élèves de collège. Ce n'est pas difficile pourvu qu'on dispose des outils adaptés (les "lemmes du collège" au sens de [ME], lemme du demi-parallélogramme et de la médiane donnent facilement le résultat).

Ce type de réflexion est l'un des objectifs assignés au module *Projet de géométrie* du master d'Orsay.

6.2.3 Wallis

Le dernier exemple concerne l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Il s'agit d'un exercice classique en terminale S et une question naturelle est de savoir quelle est la limite de cette intégrale. Avec les connaissances de licence, on voit que la suite de fonctions à intégrer converge simplement vers 0 presque partout et qu'elle est bornée par 1 et le théorème de convergence dominée donne alors la réponse : la limite est nulle. Cet exemple est assez typique : le professeur, avec ses connaissances du niveau supérieur a immédiatement la réponse à la question (et il a donc encore une fois un temps d'avance sur ses élèves), mais, la preuve qu'il obtient ainsi ne peut être donnée aux élèves. Il faut donc encore un travail de transposition, ici relativement facile, pour trouver une preuve (ou au moins une justification) au niveau des élèves. L'idée (simple mais fondamentale) est qu'une intégrale a deux façons d'être petite : soit parce que la fonction est petite sur un intervalle borné, soit parce que la fonction est bornée sur un intervalle d'intégration petit, soit, et c'est le cas ici, un mélange des deux.

6.3 La rigueur

J'aborde maintenant l'épineux le problème de la rigueur. Pour beaucoup de collègues mathématiciens, la rigueur est le *nec plus ultra* de leur discipline, qu'ils essaient absolument de transmettre dans leur enseignement. Je suis plus réservé sur ce sujet, surtout en formation des maîtres. En effet, je pense que, parfois, l'exigence de rigueur que nous manifestons avec nos étudiants, et qu'ils auront tendance à reproduire quand ils seront devenus professeurs, peut être totalement contre-productive. La formation des maîtres, de ce point de vue, a une tâche très difficile et je voudrais rappeler deux principes.

1) La raison d'être de la rigueur, en mathématiques, est simple : si elle n'est pas présente, on court le risque de dire n'importe quoi. Il y a de nombreux exemples de ce fait, notamment historiques. Si l'on veut que les élèves adhèrent à l'exigence de rigueur, il faut donc avoir quelques exemples de chausse-trapes dans lesquelles on peut tomber si l'on n'est pas assez soigneux. J'en présente une dans l'annexe 1. Mais il faut aussi apprendre aux élèves à ne pas se fier aveuglément aux démonstrations (surtout les leurs). J'énonce souvent une maxime à ce propos : *Deux expériences valent mieux qu'une démonstration fausse.*

2) Dans tout enseignement, si l'on veut traiter autre chose que des trivialités et ne pas admettre tous les résultats, il est nécessaire parfois de faire quelques entorses à la rigueur. C'est là qu'il faut avoir les reins solides pour mesurer si les raisonnements sont essentiellement corrects et savoir comment on pourrait les améliorer. Je donne ci-dessous quelques exemples.

6.3.1 Les cas de figure

La formation des professeurs est parfois paradoxale. Il arrive que le but essentiel des éléments qu'elle apporte soit de ne pas les utiliser. L'exemple type en ce sens est celui des problèmes liés aux cas de figure et à la convexité. La question des cas de figure est épineuse en géométrie et il y a parfois pléthore de cas à considérer, comme dans l'exemple évoqué dans l'annexe 2 ci-dessous. De plus, l'une des difficultés des élèves dans l'apprentissage de la géométrie est la question de la figure : pourquoi démontrer des propriétés qui sont bien évidentes sur la figure [34]. Cette difficulté est encore renforcée par le fait que certaines des propriétés sont effectivement lues sur la figure, principalement les questions de position. Il en devient d'autant plus difficile pour les professeurs de faire comprendre aux élèves quelles sont les propriétés

34. Parfois, effectivement ça se discute, comme le montre l'exemple des deltaèdres, polyèdres convexes dont les faces sont des triangles équilatéraux. On voit aussitôt en regardant les angles qu'en un sommet d'un deltaèdre aboutissent 3, 4 ou 5 triangles (on parle de sommets d'ordre $3, 4, 5$) et un résultat crucial est de montrer qu'un sommet d'ordre 3 ne peut être voisin d'un sommet d'ordre 5. C'est un point qui saute aux yeux quand on manipule une maquette : on constate en effet que si l'on a deux tels sommets voisins, soit le polyèdre n'est pas convexe, soit deux faces sont coplanaires donnant ainsi une face losange. Bien entendu, on peut établir mathématiquement cette propriété, mais cette preuve (fort laborieuse) est-elle vraiment plus convaincante que la manipulation ?

qu'ils sont en droit d'admettre et quelles sont celles qu'ils doivent démontrer. À mon avis, une formation des maîtres cohérente sur ce point doit mettre l'accent sur trois éléments.

1) La différence entre deux types d'assertions, des assertions fermées (disons des égalités d'angles, de longueurs, des propriétés de concours, d'alignement, etc.) qui doivent être en principe prouvées et des assertions ouvertes (position d'un point par rapport à une droite, à un secteur, etc.) qui peuvent, en général, être admises par lecture sur la figure.

2) Le fait qu'on peut **démontrer** les assertions de position, à partir d'axiomes. Bien entendu, cf. [Arsac], ces axiomes doivent être les plus proches possibles de la pratique et ceux de Hilbert (éventuellement adaptés) conviennent assez bien. C'est un véritable travail, difficile et parfois aride, mais nécessaire. J'ai trop vu des professeurs refuser d'utiliser un résultat commode sous prétexte qu'il requérait un argument de convexité (l'exemple type est celui du théorème que j'appelle le mal-aimé, voir [Thalès] : *si un quadrilatère* **convexe** *a deux côtés parallèles et égaux, c'est un parallélogramme*).

3) Le garde-fou d'un discours précisant l'objectif, qui n'est pas d'asséner aux élèves ce type d'arguments, mais, au contraire, d'être rassuré quant aux assertions admises sur les figures : on peut toujours convoquer les mathématiques si l'on veut absolument les prouver. Cela permet de ne pas hésiter à le faire si cela apporte une simplification.

Un exemple très simple qui utilise le fameux théorème mal-aimé est le suivant : *Soit $ABCD$ un parallélogramme, M, N les milieux des côtés $[AB]$, $[CD]$. Alors $AMCN$ est un parallélogramme.*

Dans ce cas, la formation donne la caution des mathématiques et libère l'initiative des professeurs. Comme aurait dit quelqu'un qui n'est pourtant pas de ma chapelle : *n'ayez pas peur* !

6.3.2 La limite de $\sin x/x$ en 0

Un autre exemple du travail nécessaire en formation pour que l'exigence de rigueur ne paralyse pas les professeurs, concerne les fonctions trigonométriques, et notamment la limite de $\sin x/x$, point de départ de la dérivation de ces fonctions.

Il est très rare que soient abordées les notions d'aires et de longueurs de courbes qui permettraient de traiter rigoureusement cette question (les liens entre angle et longueur d'arc, entre longueur d'arc et aire de secteur, etc.), et surtout avec des outils de même nature que ceux du collège et du lycée. La seule justification qui apparaît parfois dans les cours de licence sur les fonctions trigonométriques est le traitement via l'exponentielle complexe, totalement inutile pour le futur professeur dans sa pratique de classe : encore un couteau pour les malheureuses volailles. Conséquence de cette carence : les jeunes professeurs ne sont pas convaincus qu'il existe une façon rigoureuse de traiter ces questions par une approche voisine de celle qu'ils utiliseront dans le second degré. Le résultat est qu'ils s'empressent d'admettre tout sur le sujet, faute de pouvoir en apporter une justification dont eux-mêmes soient convaincus, et que ces notions demeurent obscures pour nombre d'élèves. Ils sont d'ailleurs confortés dans cette attitude par les manuels qui sont, pour la plupart, très discrets sur le sujet [35].

6.3.3 D'autres exemples

Il y a beaucoup d'autres exemples de ce type. J'en citerai deux, à deux extrémités du parcours.

1) À l'école primaire ou au collège, on introduit généralement la notion d'aire à partir de procédures de découpage et recollement. Une des garanties de la méthode est dans le théorème de Bolyai qui assure qu'on peut toujours passer par un puzzle d'un polygone à un polygone de même aire. C'est important pour le professeur d'avoir connaissance du résultat, même s'il ne l'utilisera pas directement dans sa pratique.

2) En BTS, on utilise des outils assez sophistiqués (transformée de Laplace, mesure de Dirac, etc.) de manière très pragmatique, en admettant que leurs propriétés sont bien telles qu'on les affirme. Là encore, seul le professeur est garant de la cohérence et de la justesse de la théorie. Encore faut-il qu'il en ait vu les rudiments.

6.4 Faire flèche de tout bois

Je veux dire par là qu'il y a beaucoup de choses que nous devons transmettre à nos élèves dans leur éducation de mathématiciens, et qui ne rentrent pas dans une quelconque théorie. Il s'agit des aspects professionnels du métier de mathématicien et de la transmission de notre expérience pratique de ce métier.

Comme pour le reste, je préfère donner quelques exemples pour illustrer ce point. On pourra penser qu'il s'agit là de recettes voire de trucs, peu m'importe ! Ces idées viennent de près de cinquante ans de pratique des mathématiques et certaines ont pour origine mon expérience de chercheur. Pour une fois que cette expérience peut rejaillir sur l'enseignement, il serait dommage de s'en priver.

• L'un des points que l'on apprend au contact de la recherche mathématique, et que nous devons transmettre à nos étudiants, parce qu'il est constitutif

35. On comparera avec l'effort de rigueur des manuels des années 1960.

de notre discipline, c'est : comment chercher ? Ainsi, j'ai parfois l'impression qu'on ne leur a jamais dit que, très souvent, il faut partir du résultat à prouver pour trouver son chemin. C'est la question : *qu'est-ce qu'on cherche ?*, suivie rapidement de *qu'est-ce qu'on sait ?*. Je pense que dans les cours de l'enseignement supérieur, on ne pratique pas assez cette méthode.

• Une autre chose est la nécessité, face à un problème difficile, d'avoir des procédures d'investigation. J'ai parlé ci-dessus d'une méthode “expérimentale”, mais, plus généralement, il s'agit déjà d'avoir une attitude active, d'essayer des choses, même s'il n'est pas sûr qu'elles aboutissent. On dirait parfois que nos étudiants répugnent à écrire quoi que ce soit avant d'être sûr de détenir une solution parfaite. Je suis convaincu que nous avons une grande responsabilité dans cette attitude d'auto-censure. Ce qui est grave c'est que ces futurs professeurs ne manqueront pas de reproduire ce travers dans leurs classes.

• Cela m'amène à un point crucial, à la fois pour la recherche et l'enseignement, c'est le rôle de l'erreur. Trop souvent, l'erreur est ostracisée. Pourtant, elle joue un rôle essentiel. En recherche, et j'en ai fait l'expérience (cf. par exemple [Cergy]), elle conduit parfois à changer la vision que l'on avait d'un domaine. Comme le dit Grothendieck *La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.* Dans l'enseignement aussi, elle est importante. Je dis toujours à mes étudiants que je suis content quand ils se trompent, non pas pour pouvoir les accabler, mais parce que leurs camarades vont percevoir une difficulté qui leur aurait peut-être échappé sinon.

• Un point qui pourra paraître anecdotique est l'importance du sémiotique et je vise simplement par ce mot savant l'usage rationnel des notations. Par exemple, savoir que quand on travaille avec un triangle ABC, il est important de respecter les permutations circulaires est une chose qui n'est pas claire pour nos étudiants et qui, en plus de la figure, est un garde-fou précieux. C'est un élément dont l'importance n'apparaît qu'avec une certaine pratique [36].

• Pour rester dans les pratiques élémentaires, il me semble que pour atteindre notre objectif de faire comprendre et retenir un certain nombre de notions, il ne faut s'interdire aucun moyen. Avec l'âge, je n'ai plus de retenue là-dessus et j'utilise sans hésiter des comptines (*pour majorer une fraction on majore le numérateur ou on minore le dénominateur*, ou encore la comptine du *pgcd*), des principes heuristiques (par exemple le principe de conjugaison, ou, pour étudier une limite, ce que j'appelle la question d'Obélix : *qui*

36. Je suis toujours agacé par les manuels qui notent les objets de manière humoristique, genre le triangle POU et le quadrilatère $PUCE$. Avec ce type de notations on perd totalement le garde-fou évoqué ci-dessus.

est gros ?), voire des blagues (*on raccroche la casserole et on est ramené au problème précédent*, ou encore : *quel temps fait-il ? je dérive*).

• Enfin, il y a un outil que, comme géomètre, je me garderais d'oublier : il faut utiliser les figures, les dessins, les schémas. C'était, il y a bien longtemps, la chanson des étudiants de CAPES d'Orsay : *Avec le p'tit père Perrin Il faut toujours faire des dessins* et je ne la renie pas.

7 Perspectives

À l'heure où j'écris, nul ne sait ce qu'il adviendra de la formation des maîtres dans un avenir proche. Nous avons subi la réforme de la masterisation, désastreuse de deux points de vue au moins : la formation professionnelle quasiment réduite à néant et le flux de recrutement largement tari. Comme l'a fait remarquer Luc Chatel, avec un certain cynisme, même si l'on voulait recruter plus d'enseignants, disons, au hasard, 60000, on n'y parviendrait pas car il n'y a plus de candidats (voir la note du paragraphe 2.3) : belle réussite ! Cela étant, on peut espérer qu'il y aura un changement politique en 2012, mais il convient de le regarder avec circonspection. En effet, plusieurs écueils sont à éviter ;

1) La suppression des concours. C'est un serpent de mer qui revient souvent avec toujours les mêmes arguments, dont l'harmonisation européenne, notamment à droite [37], mais pas seulement.

2) La transformation du concours dans un sens exclusivement professionnel, avec l'argument : ce sont les diplômes universitaires qui attestent des connaissances disciplinaires des candidats [38].

3) Le changement de la date de l'écrit du concours à la fin du M1. Ce serait la fin de ce que nous avons essayé de faire à Orsay, supprimant l'espace de liberté du premier semestre de M1.

Alors, que faire ? Pour ma part, je ne vois que deux solutions.

1) Le retour à l'état antérieur, mais outre que personne n'est prêt à faire cela, il pose le même problème par rapport au point 3) ci-dessus.

2) Le maintien en l'état du système, mais avec une vraie année de formation après le concours, donc un mi-temps d'enseignement au maximum. C'est la position que je défendrai, au moins en ce qui concerne le CAPES (de mathématiques). Le problème est qu'en ces temps où l'on est prompt à mettre en avant la crise pour diminuer les crédits affectés à l'éducation (entre autres), je ne suis pas sûr que cette position soit une priorité de nos (futurs) gouvernants.

37. Voir le rapport Grosperrin (qui est gros ?).
38. Il faut n'avoir jamais fait passer d'examens à l'université pour dire pareille ânerie.

Il reste un problème que Pierre Arnoux évoque chaque fois qu'il en a l'occasion [39] : l'allongement de la durée des études et ses conséquences pour les étudiants de milieu modeste. La seule solution, sauf le retour en arrière, est un système de prérecrutement, mais là encore, en ces temps de crise, qui y songe vraiment ?

8 Références

[APMEP] PERRIN Daniel, *La géométrie : un domaine hors programme ?* Bull. APMEP 496 (2011).

[Arsac] ARSAC Gilbert, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, IREM de Lyon, 1998.

[Castela] CASTELA Corine, *Note de synthèse en vue de l'habilitation à diriger des recherches*, Université Paris 7, 2011.

[Cergy] PERRIN Daniel, *Conférence sur la recherche*, Cergy, 1999, page web, rubrique Débats et controverses.

[DPR] DUPERRET Jean-Claude, PERRIN Daniel, RICHETON Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435 (2001).

[Expérimentation] PERRIN Daniel, *L'expérimentation en mathématiques*, Petit x, 73, (2007).

[Kahane] KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob (2002).

[KahaneFdM] *Rapport de la commission Kahane sur la formation des maîtres en mathématiques*, sur ma page web à la rubrique Débats et controverses.

[Koszul] PERRIN Daniel, *Un pas vers la connexité du schéma de Hilbert : les courbes de Koszul sont dans la composante des extrémales*, Collect. Math. 52 (2001).

[Livregéométrie] PERRIN Daniel, *Géométrie projective et applications aux géométries non euclidiennes et euclidienne*, Parties I à IV disponibles sur ma page web.

[Logistique] PERRIN Daniel, *La suite logistique*, Conférence IREM Paris 7, 2008, sur ma page web à la rubrique Conférences.

[Maubeuge] PERRIN Daniel, *Géométrie : deux ou trois choses que je sais d'elle*, Conférence à la Cité des géométries de Maubeuge, 2008, sur ma page web à la rubrique Conférences.

39. C'est son *Carthago delenda est* à lui.

[ME] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005), nouvelle édition 2011.

[Rogalski] ROGALSKI Marc *et. al.*, *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie*, Ellipses, 2001.

[Suitesrecurrentes] PERRIN Daniel, *Suites récurrentes*, Polycopié pour le CAPES, page web, rubrique Préparation au CAPES.

[Thalès] PERRIN Daniel, *Le théorème de Thalès*, Conférence IREM Paris 7, 2006, disponible sur le site de l'IREM ou sur ma page web à la rubrique Conférences.

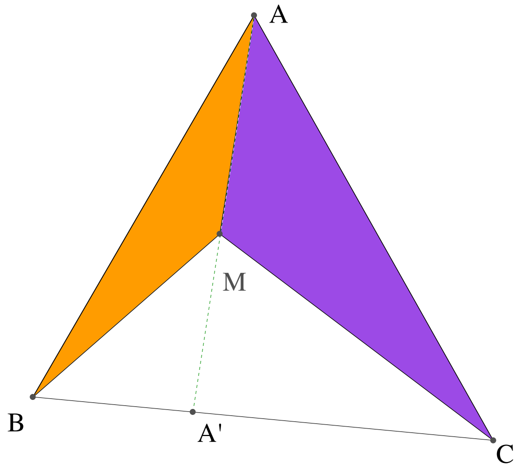
Référence de ma page web : http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/

9 Annexe 1 : un exemple à propos de rigueur

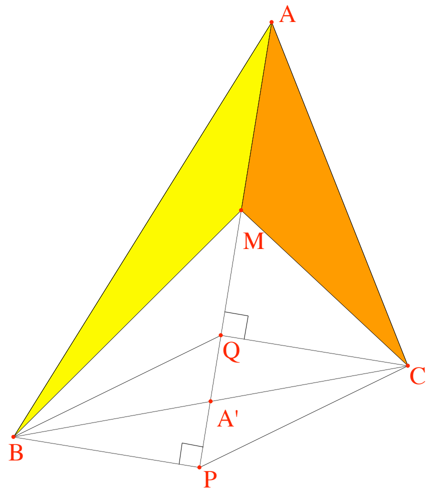
Comme deux précautions valent mieux qu'une, je propose de donner deux démonstrations du résultat suivant :

9.1 Proposition. *Soit ABC un triangle et soit M un point du plan. On a l'égalité d'aires $\mathcal{A}(ABM) = \mathcal{A}(ACM)$ si et seulement si M est sur la médiane issue de A.*

1) Il suffit d'appliquer le lemme du chevron (voir [ME]) : si A' désigne le point d'intersection de (AM) et de (BC), on a l'égalité de rapports : $\dfrac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ACM)} = \dfrac{A'B}{A'C}$.



2) Soient P et Q les projetés orthogonaux de B et C sur (AM). Les droites (BP) et (CQ) sont parallèles et on a $BP = CQ$ comme hauteurs de deux triangles de même aire ayant la même base AM. On en déduit que $BPCQ$ est un parallélogramme. Ses diagonales $[PQ]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu A' donc $(AM) = (PQ)$ passe par A'.

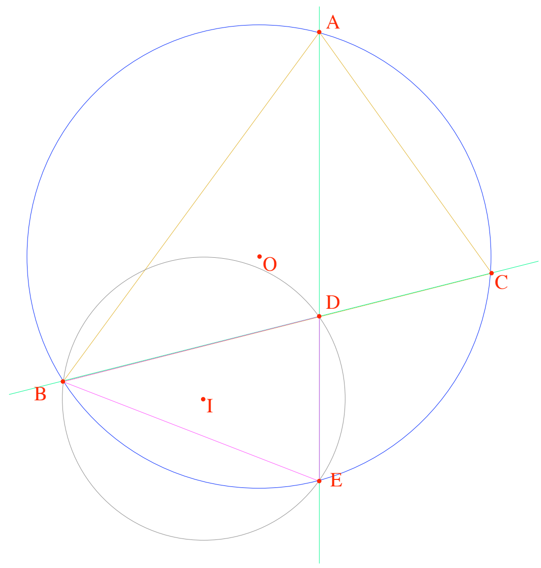


Qu'en pensez-vous ? Une indication : deux expériences valent mieux qu'une démonstration fausse !

10 Annexe 2 : un exemple

Cet exemple illustre le problème des cas de figure.

Soit ABC un triangle, E un point de son cercle circonscrit. La droite (AE) coupe (BC) en D. Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle BDE ?



11 Pavages du plan hyperbolique

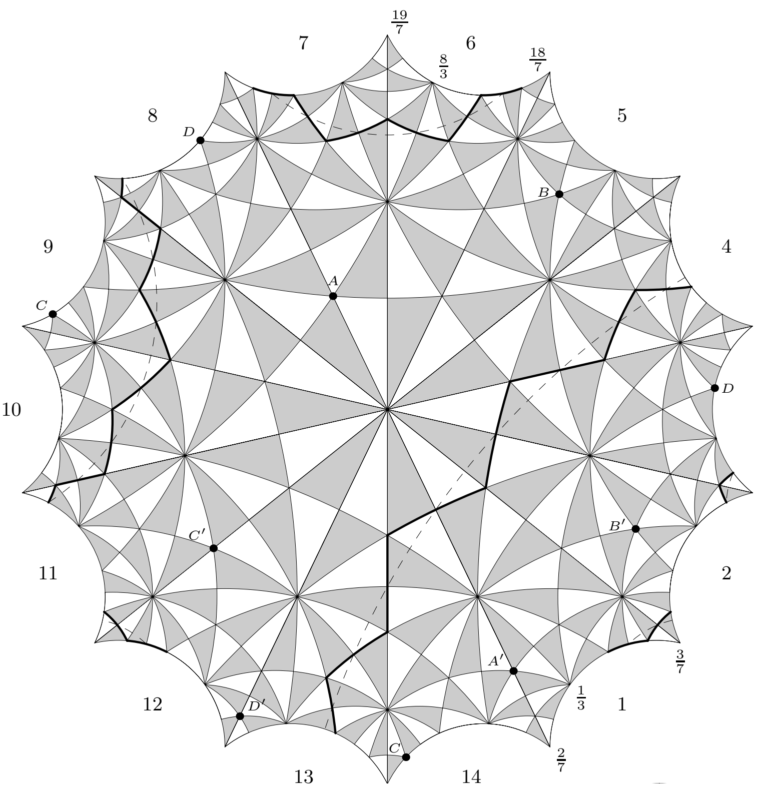


FIGURE 1 – La version de Klein

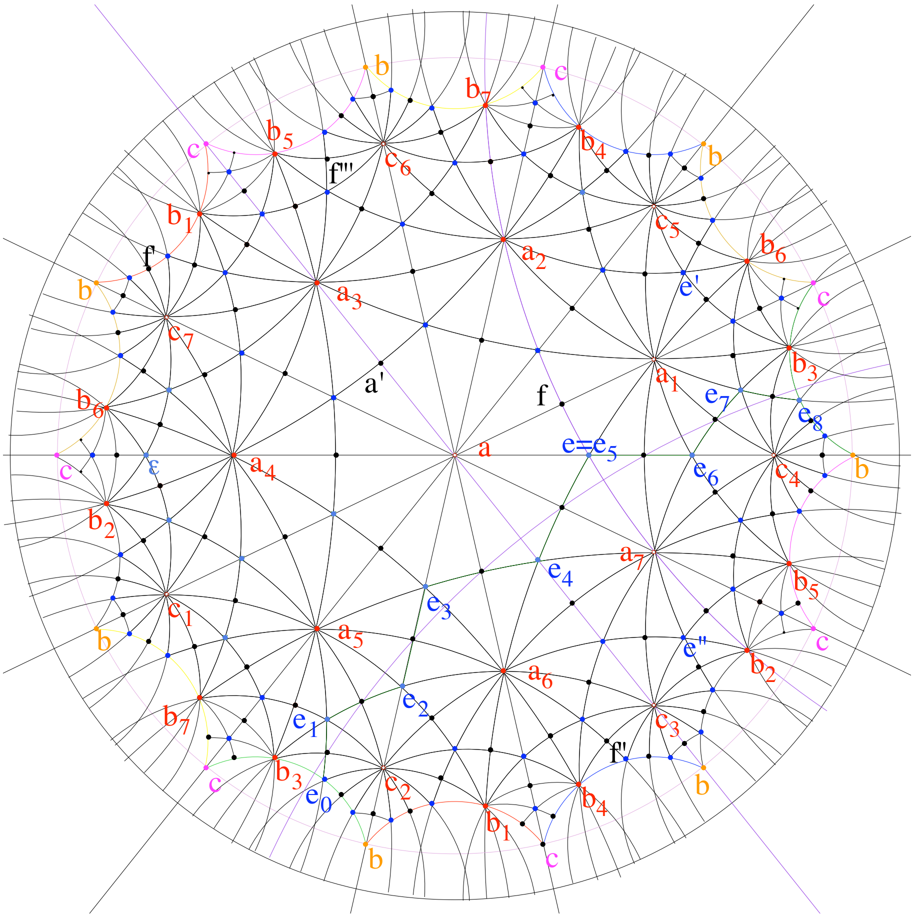


Figure 2 – Avec Cabri