Aires, intégrales et primitives

dans l'enseignement secondaire, de 1902 à 2019

Daniel PERRIN

Table des matières

1 Introduction

1.1 Pourquoi ce thème ?

De nombreuses raisons m'ont conduit à proposer ce sujet pour le colloque du cinquantenaire des IREM.

• La première raison tient à l'histoire des mathématiques. Je considère que l'invention du calcul infinitésimal (c'est-à-dire des notions de dérivée et d'intégrale) par Newton et Leibniz (vers 1680) est le plus grand progrès accompli par l'humanité en mathématiques [1]. Avec cette invention, les plus grands résultats des mathématiciens de l'Antiquité : le calcul du volume de la pyramide (Euclide), la quadrature de la spirale, celle de la parabole, le calcul du volume de la boule (Archimède), sont maintenant des exercices faciles pour les lycéens.

• C'est un sujet intéressant du point de vue de l'évolution des programmes et notamment des mouvements de balancier exagérés entre des options divergentes pour introduire l'intégrale : les aires, les sommes de Riemann, les primitives ... L'étude de ce cas, où l'on voit de façon éclatante combien la recherche de l'équilibre est difficile, devrait sans doute être méditée par toute personne en charge d'élaborer des programmes.

• On peut suivre en filigrane dans l'évolution des programmes en ce domaine les conceptions idéologiques (et parfois politiques) qui traversent la société (tout un tas de mots en *isme* : positivisme, structuralisme, constructivisme etc.), ainsi que l'influence de certains acteurs, les mathématiciens, les professeurs (via l'APMEP) et ... les IREM.

• Ce thème est l'occasion d'aborder un certain nombre de questions quasiment philosophiques qui tiennent à la pratique des mathématiques (le dilemme entre définitions axiomatiques et constructions) et à leurs applications, notamment aux calculs de grandeurs, ainsi que les questions concernant la modélisation.

• Enfin, c'est un sujet qui me tient personnellement à cœur. En effet, dans le travail effectué au sein de la commission Kahane, j'ai beaucoup réfléchi sur les aires d'un point de vue géométrique. J'ai d'ailleurs enseigné ces questions pendant sept ans en licence pluridisciplinaire, voir [10] ou [11]. Quant à l'intégrale et aux primitives, outre que j'ai enseigné l'intégrale de Lebesgue en licence, c'est l'un des thèmes essentiels de l'oral du CAPES dont je me suis occupé pendant de nombreuses années, voir [14] sur ce point.

1. Mon sentiment est que cette invention n'a pu émerger que grâce à celle des nombres décimaux (Stevin, 1585) qui permet depuis à tous (ou presque) de calculer sans peine.

J'ai d'ailleurs déjà abordé ce sujet dans deux conférences, en 2005 devant la commission Inter-IREM second cycle et en 2006 à l'IREM de Bordeaux, voir sur ma page web :

`https://www.math.u-psud.fr/~perrin/conferences.html`

1.2 Mes sources

Pour les questions historiques, je m'appuie essentiellement sur l'excellente étude de J.-P. Daubelcour de l'IREM de Lille (voir [5], [6]), ainsi que sur nombre de manuels de chacune des époques étudiées. J'ai aussi utilisé le livre de Bruno Belhoste [2]. Pour les questions de fond, une référence dont les positions sont très proches des miennes, est le livre de Marc Rogalski [19].

2 Le programme de 1902

2.1 Les racines

2.1.1 Le contexte politique, social et philosophique de la réforme de 1902

En 1902, la troisième République est bien installée et peut-être à son apogée et la politique de scolarisation primaire de Jules Ferry a été une réussite. En revanche, il faut être conscient qu'à l'époque, les lycéens ne représentent que 2 à 3 % d'une classe d'âge : la démocratisation de l'enseignement se limite au primaire.

Les sciences n'occupent qu'une place limitée dans les programmes avant 1902. Au contraire, la réforme de 1890 a remis en avant les humanités. Voilà ce qu'en dit le ministre Léon Bourgeois : *Les lettres, c'est à dire l'étude des langues et des littératures, avec l'histoire et la philosophie comme complément ou couronnement, garderont naturellement la première place.* Cela signifie que dans l'enseignement secondaire classique, les élèves doivent suivre des études de latin et grec jusqu'en classe de première, même ceux qui choisiront ensuite la classe de mathématiques élémentaires. Il y a bien un enseignement secondaire “moderne” avec des programmes allégés, mais, s'il ouvre la porte des facultés des sciences et de pharmacie, il ne donne pas accès aux facultés des lettres, de droit et de médecine.

Pourtant, l'idéologie philosophique dominante est sans doute le positivisme, doctrine philosophique d'Auguste Comte (1798-1857), qui met en avant la science (et non la métaphysique ou la théologie) comme moteur du progrès de l'humanité, les mathématiques y jouant un grand rôle. Elle influence profondément les fondateurs de la troisième République et notamment Jules Ferry ou Marcellin Berthelot (chimiste et ministre de l'instruction publique en 1886). La refonte générale de l'enseignement de 1902 se place dans le cadre de ce que Bruno Belhoste appelle *le triomphe de l'humaniste scientifique d'inspiration positiviste.*

2.1.2 Le rôle des mathématiciens

De nombreux mathématiciens de l'époque, et non des moindres (Henri Poincaré, Gaston Darboux, Paul Appell, Jules Tannery, Henri Lebesgue) s'intéressent à la réforme de l'enseignement. Par exemple Darboux dirige la publication d'un cours complet de mathématiques élémentaires.

2.1.3 La structure de la réforme

Cette réforme est préparée par le ministre de l'instruction publique Georges Leygues. La structure du lycées comprend quatre sections : A (latin-grec), B (latin-langues vivantes), C (latin-sciences), D (sciences-langues vivantes). Cette structure va (pour l'essentiel) persister jusque dans les années [2] 1960.

2.2 Le point de vue de Louis Liard

La philosophie de la réforme de 1902 me semble parfaitement décrite dans le remarquable texte suivant, extrait d'une conférence (janvier 1904) de Louis Liard (1846-1917), philosophe, directeur des enseignements supérieurs. Il y a d'abord un paragraphe sur la place de l'enseignement des sciences.

Dans l'enseignement secondaire, les études scientifiques doivent, comme les autres, contribuer à la formation de l'homme. Elles sont donc, elles aussi, à leur façon, des "humanités", au sens large du mot, les "humanités scientifiques".

Vient ensuite, une défense d'un enseignement qui ne soit pas fondé sur la seule mémoire :

... l'enseignement des sciences doit surtout faire appel aux facultés actives des esprits, à celles-là mêmes par lesquelles se fait la construction des sciences. La mémoire y joue sans doute un rôle, mais non le principal. Ce qu'il s'agit de former c'est la vision exacte des choses, le discernement du réel et de l'irréel, du vrai et du faux, le sentiment de la certitude et la justesse du raisonnement. ... Rien de plus contraire au véritable enseignement

2. L'auteur de ces lignes peut en témoigner, à ceci près qu'il y avait aussi des sections modernes M, voire M', sections issues des cours complémentaires.

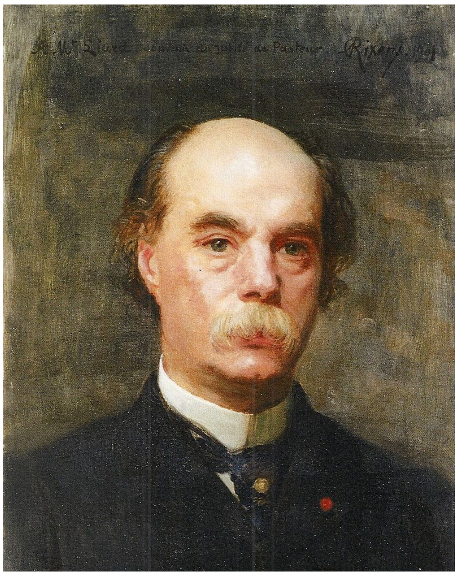


FIGURE 1 – Louis Liard

FIGURE 2 – Henri Poincaré

scientifique que de verser dans des esprits passifs, soit par le livre, soit même par la parole,une masse d'abstractions et de faits à apprendre par cœur. ... Ce qu'il faut, au contraire, c'est susciter la spontanéité de l'élève, mettre en jeu ses activités mentales, provoquer son effort personnel, en un mot le rendre capable d'agir.

La vieille formule du philosophe est toujours vraie, "savoir, c'est faire". ... le vrai profit n'est pas ce que l'élève peut reproduire, mais ce qu'il peut produire.

Liard met ensuite en avant la méthode :

Alors, qui nous empêche, dans ces classes, de tout faire pour amener progressivement l'élève à juger personnellement des choses, à discerner les vérités par lui-même et non sur l'autorité de celui qui les énonce, livre ou professeur ? L'idéal serait que, dirigé par le maître, il trouvât tout ce qu'il doit savoir. Assurément, c'est impossible. Il n'y a pas un Pascal latent en chacun de nos écoliers. Mais sans viser à l'impossible, croyez-vous que la méthode, qui est bien vieille, puisque c'était déjà celle de Socrate, ne puisse, appliquée avec discernement, donner de bons effets ?

Il ajoute, un peu plus loin, prônant la recherche de l'équilibre :

Mais ce qui est à sa place dans l'enseignement supérieur ne l'est pas dans l'enseignement secondaire. Or on m'assure que là, sous l'influence des plus hautes spéculations, il s'est introduit, depuis quelques années, des façons qui *ne seraient pas sans péril. Ne perdons pas de vue que, dans nos classes, il s'agit de former, non des candidats à la section de géométrie de l'Académie des sciences, mais des esprits clairs, voyant juste, raisonnant juste.*

2.3 Poincaré

Dans le même esprit que Louis Liard, voici un extrait d'une conférence d'Henri Poincaré (1904, musée pédagogique).

Pour définir une intégrale, nous prenons toutes sortes de précautions ; nous distinguons les fonctions continues et celles qui sont discontinues, celles qui ont des dérivées et celles qui n'en ont pas. Tout cela est à sa place dans l'enseignement des Facultés ; tout cela serait détestable dans les lycées. L'élève, quelque définition que vous lui donniez, ne saura jamais ce qu'est une intégrale si on ne lui en a d'abord montré. Toutes les subtilités le laisseront indifférent. Il croit savoir ce qu'est une surface et il ne comprendra qu'il ne le sait pas que quand il saura très bien le calcul intégral.

Ce n'est donc pas au moment où il aborde ce calcul qu'il peut y avoir intérêt à le lui dire. Alors ce qui reste à faire est bien simple : définir l'intégrale comme l'aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées[3] *et la courbe, montrer que quand l'une des ordonnées se déplace, la dérivée de cette aire est précisément l'ordonnée elle-même. C'est le raisonnement de Newton, c'est comme cela que le calcul intégral est né, et bon gré mal gré il faut repasser par où nos pères ont passé.*

Le lecteur pourra constater, tout au long de ce texte, que, sur ce point au moins[4], je suis un fidèle disciple d'Henri Poincaré !

2.4 Le programme de 1902

La dérivée est introduite en seconde[5], avec le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction (admis, sans doute). Voici le texte exact du programme :

Notion de la dérivée. Signification géométrique (coefficient angulaire de la tangente) et cinématique (vitesse dans le mouvement rectiligne) de la dérivée ;

3. Ce mot, qui nous semble bizarre, est celui qu'on utilise à l'époque et encore longtemps après, voir le programme de 1962. L'ordonnée désigne ici le segment vertical et pas seulement la coordonnée de son extrémité. Merci à Dominique Tournès de m'avoir expliqué ce point.

4. Le résultat qui affirme que la dérivée de l'aire sous la courbe est égale à la fonction est appelé *Théorème fondamental de l'analyse* par les anglo-saxons, c'est dire son importance.

5. C'est une nouveauté dans l'enseignement classique, mais elle était déjà apparue vers 1890 dans l'enseignement moderne.

le sens de variation d'une fonction est indiqué par le signe de la dérivée. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de $\sin x$*,* $\cos x$*,* $\tan x$*,* $\cot x$*.* Sont évoqués ensuite des exemples d'études de fonctions (notamment $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$).

S'agissant des intégrales le programme (de terminale) est particulièrement succinct :

Dérivée de l'aire d'une courbe regardée comme une fonction de l'abscisse (on admettra la notion d'aire).

2.5 Deux exemples de manuels

Le premier est le *Cours d'algèbre élémentaire* de 1910, dont l'auteur est un religieux, le Frère Georges-Marie, voir §9.

La démonstration du fait que la fonction est la dérivée de l'aire sous la courbe, principale nouveauté de ces programmes selon la requête explicite de Poincaré, est donnée ici. Elle s'appuie sur une connaissance de la notion d'aire et de ses propriétés, notamment la croissance et l'aire du rectangle. De plus, la fonction est implicitement supposée croissante (pour avoir l'inégalité d'aires annoncée) et le cas $h < 0$ n'est pas évoqué. À cela près, la démonstration, même si elle n'est pas exactement dite avec les mots que l'on utiliserait aujourd'hui, est essentiellement correcte. La notation $\int_a^b f(t)dt$ est introduite ensuite.

Le second est l'excellent *Précis d'algèbre* de F. Brachet et J. Dumarqué de 1930. Ce livre est résolument moderne dans sa définition de la limite par rapport à ses contemporains[6] voir §9. Sur les primitives, le théorème fondamental est prouvé dans le cas croissant et il y a quelques applications au calcul d'aires et de volumes (en particulier une amorce de preuve du fait que la dérivée du volume est l'aire des sections, voir §9). Les auteurs donnent aussi la définition du logarithme népérien comme primitive de $1/x$. On notera qu'ici, la notation $\int_a^b f(t)dt$ n'est pas utilisée.

2.6 Conclusion

Indéniablement, le programme de 1902, sur ce sujet de l'intégrale, constitue un progrès important. Cela étant, il est encore assez limité. Si l'on regarde les sujets de Bac de l'époque, les primitives n'y sont que peu présentes. On les trouve soit sous forme de questions de cours, soit, souvent à la fin des problèmes, pour calculer l'aire comprise entre deux courbes, voir §9.

6. Même dans les manuels d'après 1945, par exemple le Lespinard et Pernet, on trouve encore une "définition" de l'expression x tend vers a, voir [6] Chapitre 2 p. 3.

3 La période intermédiaire : 1902-1972

3.1 Les programmes de 1945

Les programmes de 1902 restent essentiellement inchangés jusque 1945. Il y aura bien un projet de réforme du régime de Vichy qui visait à supprimer le calcul intégral mais il restera pratiquement lettre morte (les manuels traitent ce chapitre comme un complément au programme [7]).

Juste après la guerre, il faut mentionner l'importance, au moins dans l'imaginaire collectif, du plan Langevin-Wallon qui visait une démocratisation de l'enseignement. Cependant ce plan n'a jamais été vraiment appliqué (il émanait de personnalités proches du parti communiste et le contexte de la guerre froide l'a bloqué). De plus, il ne s'occupe pas du détail des programmes.

Le programme de 1945 ne change pratiquement pas le contenu [8] du thème des intégrales. Pour s'en rendre compte, on regardera l'extrait du manuel de Lespinard et Pernet de 1947 donné au §9. On notera que la démonstration du "théorème fondamental" prend en compte le cas non monotone (en admettant qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes).

3.2 L'évolution dans les années 1960

Sous l'influence des mathématiciens (notamment Gustave Choquet), l'Université a fait sa révolution culturelle dans les années 1950, avec l'apparition du vocabulaire de la théorie des ensembles, de la topologie, de l'algèbre, etc. Dans cette période, on voit se développer une réflexion intense sur l'enseignement des mathématiques, dans le cadre de l'APMEP, mais aussi, sur le plan international, au sein de la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), autour de Caleb Gattegno notamment. En France, c'est en 1966 que voit le jour la commission Lichnérowicz, chargée de proposer une réforme de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire.

Au lycée, dans les années 1960, outre l'apparition du vocabulaire ensembliste, on note un renforcement de l'analyse (le mot apparaît pour la première fois) : théorème de Rolle (admis), des accroissements finis, appa-

7. Dans le livre d'algèbre de A. Benoît, il dit, à propose de primitives : *Cette notion, bien que ne figurant pas au programme officiel, est utile aux élèves de la classe de Mathématiques.*

8. En revanche il est plus novateur du côté de la géométrie : introduction du produit scalaire, des transformations du plan et de l'espace (y compris l'inversion).

rition des fonctions logarithme (vue comme primitive [9] de $1/x$) et exponentielle (réciproque du logarithme), quelques équations différentielles simples ($y' = ay$, $y'' + \omega^2 y = 0$).

Côté rigueur et formalisation, les définitions des limites avec ϵ, η apparaissent dans certains manuels (voir §9).

Le programme parle de fonctions primitives. Il dit (après avoir précisé qu'aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des notions d'aire et de volume) :

Aire d'un domaine plan limité par un arc de la courbe représentative d'une fonction $f(x)$ continue (on pourra se limiter au cas d'une fonction monotone), positive ou nulle, par l'axe des abscisses, et par deux "ordonnées" [10]*, l'une fixe, l'autre variable (abscisse x) ; cette aire représente une primitive de la fonction donnée.*

Suivent quelques mots sur les conventions de signe et les applications aux calculs d'aires et de volumes.

On trouvera au §9 un exemple de manuel de l'époque (collection Cagnac et Thiberge).

En fait, les programmes et les manuels de cette courte période sont particulièrement bons ! Ils n'ont pas les défauts de ceux de l'époque des maths modernes qui vont tomber dans la surenchère et ils n'en subissent évidemment pas les contre-coups comme ceux qui suivront. Le lecteur regardera par exemple avec envie les manuels de la collection Queysanne-Revuz de cette période.

4 La réforme des mathématiques modernes

4.1 Les contextes de la réforme

Comme pour la réforme de 1902, on ne peut dissocier la réforme des maths modernes de son contexte, ou plutôt de ses divers contextes, philosophique, politique, scientifique, noosphérique ...

4.1.1 Le contexte philosophique : le structuralisme

C'est un courant de pensée important à cette époque, issu de la linguistique, et représenté notamment par Claude Lévi-Strauss. Pour en résumer l'idée en un mot, il donne le pas aux structures sur les objets. Bien entendu

9. À mon avis, c'est un point essentiel car cela renforce beaucoup l'importance du chapitre sur l'intégrale qui était jusque là assez marginal.

10. On notera que le texte du programme utilise encore ce mot, comme Poincaré, mais avec des guillemets.

ce mouvement a un large écho en mathématiques, notamment *via* les théories axiomatiques et il y a de fortes accointances entre Levi-Strauss et le groupe Bourbaki (essentiellement *via* André Weil).

4.1.2 Le contexte scientifique : Bourbaki

Du point de vue proprement mathématique, l'époque voit l'apogée du groupe Bourbaki, à la fois sur le fond (il n'est qu'à regarder les contenus des cours de DEA de l'époque) et en termes de pouvoir (on disait explicitement alors que seul un membre du groupe pouvait être en charge des mathématiques à l'ENS de la rue d'Ulm par exemple). Les relais vers l'enseignement secondaire de cette tendance (pas nécessairement membres du groupe) ont noms Dieudonné, Choquet, Revuz, etc. D'ailleurs les débats sont souvent vifs sur les questions d'enseignement, on se souvient de l'invective : *À bas Euclide, plus de triangles* de Dieudonné ou de sa controverse avec Choquet sur la géométrie.

L'un des objectifs des promoteurs de la réforme des maths modernes était en réaction à une vision trop intuitive des mathématiques qui leur donnait le sentiment qu'elles reposaient sur du sable. L'auteur de ces lignes se souvient d'avoir eu, à la suite de l'écriture du rapport sur la géométrie de la commission Kahane, donc au tout début des années 2000, une longue discussion avec André Revuz (alors âgé de plus de quatre-vingts ans, mais toujours vif et pugnace) où il expliquait ses réticences sur les justifications des cas d'égalité des triangles qu'on lui proposait quand il était élève. La conséquence de cette frustration a été la volonté de fonder toutes les mathématiques sur des bases solides, en gros sur la théorie des ensembles, et de construire tout à partir de ces bases. En particulier on construisait alors $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, voire $\mathbf{R}$ à partir des entiers avec des relations d'équivalence (dès la classe de cinquième pour $\mathbf{Z}$!). Dans le cas de la théorie de l'intégration, il n'était pas question de s'appuyer sur les aires, qui n'avaient pas été bien définies auparavant et le mot d'ordre a donc été : sans les sommes de Riemann, point de salut. Nous reviendrons plus loin sur ce thème.

4.1.3 Le contexte politique : le gaullisme et mai 68

La réforme est soutenue par la partie marchante du gaullisme, les tenants de la nécessaire mise à jour de notre enseignement pour rattraper les grandes puissances de l'époque (USA, URSS). C'est la raison de la création de la commission Lichnérowicz en 1967. On peut raisonnablement penser que la réforme a été accélérée[11] par le mouvement de mai 1968, avec sans doute

11. Comme la création des IREM.

beaucoup d'illusions de tous côtés, mais aussi beaucoup d'enthousiasme.

4.1.4 La noosphère

J'emploie ce terme au sens d'Yves Chevallard, il s'agit de *l'ensemble des acteurs intervenant à l'intersection du système d'enseignement et de la société.* Dans le cas présent, un acteur important de la réforme est l'APMEP, avec des personnalités aussi marquées que P. Vissio, G. Walusinski, A. Revuz, etc. L'association soutient fermement la réforme et la création des IREM et elle est partie prenante de la commission Lichnérowicz,

4.1.5 Démocratisation ?

Nombreux sont ceux, parmi les promoteurs de la réforme, pour qui elle est synonyme de démocratisation. Je cite G. Walusinski (voir Bull. APMEP 353 d'avril 1986) :

Pour certains collègues amants des belles mathématiques, c'est la rénovation des contenus qui primait. Alors que pour d'autres, la recherche didactique s'amorçait et ils y voyaient un moyen de diminuer l'échec scolaire. Pour d'autres avec lesquels je me sentais en accord, la rénovation des programmes paraissait une occasion à saisir pour mettre en cause les méthodes anciennes et développer ce qu'on appelait les méthodes actives.

La suite sera moins glorieuse et la démocratisation espérée ne sera pas vraiment au rendez-vous. Au contraire, avec le recul, on a le sentiment que, si cette réforme convenait bien à ceux des élèves qui avaient déjà un goût pour les maths [12], elle en a dégoûté beaucoup d'autres.

4.2 Le contenu des programmes, côté analyse

Les modifications des programmes de 1970 sont considérables, en analyse (et plus encore en géométrie). Voici quelques exemples :

4.2.1 Les réels

Dans les programmes ils sont définis axiomatiquement (c'est bien) à l'aide de la borne supérieure (c'est très discutable, voir sur ce sujet le chapitre IV de Daubelcour ([6]), il eut été sans doute plus raisonnable d'utiliser les suites adjacentes comme axiome de continuité). Dans les classes, il n'était pas rare qu'on donne une construction de $\mathbf{R}$, souvent par les suites de Cauchy [13].

12. Par exemple ceux qui sont devenus mathématiciens ...

13. Je suis très hostile à cette option et, si l'on veut à tout prix construire les réels, ce qui ne me semble pas indispensable, je préfère une approche plus intuitive à l'aide des

4.2.2 L'intégrale

Je recopie le programme :

Définition des sommes de Riemann d'une fonction numérique d'une variable réelle sur un intervalle fermé borné. Existence de l'intégrale pour une fonction monotone ; notation $\int_a^b f(t)dt$ *; premières propriétés. On admettra que ces propriétés s'étendent à des fonctions continues, ou monotones par morceaux.*

Moyenne d'une telle fonction sur un intervalle fermé borné. Lien avec la dérivation en des points où la fonction est continue.

Primitives, ensembles des primitives ; égalité $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, f *étant continue sur* $[a, b]$ *et admettant* F *pour primitive. Calcul des primitives ; intégration par parties.*

Viennent ensuite des applications au calcul de l'aire de l'hypographe d'une fonction, puis à des applications aux volumes, masses, moments d'inertie, etc.

Daubelcour donne comme exemple le livre de Terminale C de la collection Queysanne-Revuz (écrit par Marc Gourion) qui introduit l'intégrale au moyen des fonctions en escalier, voir §9 ci-dessous.

Dans ce livre, on commence par définir les fonctions en escalier et leur intégrale, puis on définit une fonction Riemann-intégrable en l'encadrant par des fonctions en escalier et en demandant que la borne supérieure des intégrales minorantes soit égale à la borne inférieure de intégrales majorantes. L'intégrabilité des fonctions monotones est prouvée, celle des fonctions continues admise. On définit ensuite les primitives et on en montre l'existence pour une fonction continue. L'aire n'arrive qu'ensuite [14]. L'intégration par parties est au programme. On donne d'autres applications du calcul intégral, notamment pour les calculs de volumes et de nombreuses grandeurs physiques.

Dans les exercices du Queysanne-Revuz, outre les applications évoquées ci-dessus, on trouve les intégrales de Wallis, quelques intégrales impropres, et de nombreux calculs de primitives mettant en jeu les fonctions exponentielle et logarithme.

---

développements décimaux illimités, voir [10].

14. Dans les 27 premières pages de ce chapitre, le mot *aire* n'apparaît nulle part. L'aire sous la courbe est **définie** alors comme l'intégrale. On donne ensuite les propriétés des parties quarrables et de la mesure (de façon un peu formelle, mais assez conforme à ce que je préconise.)

4.2.3 Discussion

Il est clair qu'à l'époque de la réforme des maths modernes, on n'avait peur de rien ! Le niveau du cours d'analyse ressemble plus à celui du début de l'université qu'à celui d'une classe terminale de lycée et d'ailleurs, c'est le sentiment de beaucoup de professeurs, je cite Daubelcour :

... le choix des sommes de Riemann associées à la propriété de la borne supérieure pour définir l'intégrale au Lycée est pour moi une erreur. ... Il y a d'autres approches, plus en adéquation avec l'enseignement en terminale.

... La pratique de ce programme en classe m'a appris que le plus souvent les heures passées en cours à ces développements difficiles n'ont pas conduit l'élève à donner une certaine épaisseur sémantique au terme "intégrale d'une fonction continue" : l'acquisition du sens est très souvent un échec.

Sur le fond, du point de vue mathématique, mon impression c'est que, dans ce programme, on parle le moins possible de Newton et Leibniz, c'est-à-dire de primitives, et le plus possible de sommes de Riemann, ce qui constitue un retour aux méthodes d'Eudoxe et d'Archimède [15], voir ci-dessous la discussion du §8.

En revanche, il faut reconnaître que ce programme est le premier où l'analyse prend une place aussi conséquente (sans doute au détriment de la géométrie). Même si l'on est – comme moi – un ardent partisan de celle-ci, au vu de la place de ces domaines dans les mathématiques de l'époque et dans les programmes, on doit bien reconnaître qu'il y avait là une certaine nécessité.

5 La contre-réforme des années 1980

5.1 Les raisons de la colère

Il est aujourd'hui admis par tout le monde ou presque que la réforme des mathématiques moderne a été un échec, plus encore sans doute sur la partie géométrie que sur la partie analyse. Pour résumer de nombreuses critiques, cette réforme a donné l'impression d'une formalisation à la fois pédante et creuse qui mettait trop l'accent sur les structures et pas assez sur leurs conte-

15. Il est intéressant de voir comment on procède dans [QR] pour le "calcul" du volume de la pyramide ou celui de la boule : cela ressemble très fort à Euclide, on utilise la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire les sommes de Riemann ou Darboux, ou les fonctions en escalier et pas du tout la méthode qui consiste à voir l'aire comme dérivée du volume. De plus, et c'est vraiment absurde, faute d'accepter une définition axiomatique du volume, la formule avec l'intégrale est donnée comme **définition** du volume !

nus [16]. Il y a eu aussi de vives protestations des utilisateurs de mathématiques qui n'y retrouvaient pas les notions qui leur étaient indispensables et ont été, de ce fait, contraints (et contents ?) de traiter eux-mêmes les mathématiques qui leur étaient nécessaires.

Par ailleurs, dans la réforme, la place du cours magistral était sans doute devenue trop importante. En réaction, la période des années 1980 voit l'apogée d'une nouvelle position idéologique issue du constructivisme (inspirée notamment par les travaux de Piaget) et dont la traduction scolaire peut se résumer en une formule dont le succès a été considérable : *l'élève au centre du système éducatif.*

Enfin, par rapport à l'inspiration bourbachique de la réforme, qui mettait souvent en avant des théorèmes formels sans développer leur aspect calculatoire [17] l'apparition d'outils de calcul performants, et notamment des calculatrices, conduira à un changement dans la perception des mathématiques et en particulier de l'analyse [18].

Tous ces aspects sont relayés par une implication forte des IREM (nouveaux à l'époque) dans la réforme des programmes (on peut citer notamment Jean-Louis Ovaert, Daniel Lazet, Michèle Artigue, etc.) avec un recentrage de l'analyse sur ses fondements : majorer, minorer, encadrer. Un texte essentiel sur ces points est le bulletin Inter-IREM [8].

5.2 Le cadre de l'analyse dans le programme 1982

On bat en retraite sur l'usage des définitions en ϵ, η pour préférer une approche par les "fonctions de référence", voir [8]. Un exemple significatif d'application de la doctrine *majorer, minorer, encadrer* est l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis, avec un exercice incontournable, notamment au Bac : l'étude des suites récurrentes [19] en encadrant la distance au point fixe par l'inégalité des accroissements finis.

16. Je cite une phrase de l'introduction de [8] : *L'étude des structures n'est pas une fin en soi, elle doit être au service d'une maîtrise plus efficace de problèmes compliqués.*

17. On examinera de ce point de vue le cours de calcul différentiel d'Henri Cartan.

18. Dès qu'on utilise une calculatrice on se pose forcément la question, à côté de la convergence d'une suite, de la rapidité de celle-ci.

19. La présence presque obligée des suites récurrentes dans les épreuves de Bac a été à l'origine de la suppression de ce point dans les programmes suivants. Pour avoir enseigné ce thème pendant plus de vingt ans au CAPES, je ne peux que le regretter car cette étude est un excellent moyen d'entrer dans les problématiques de l'analyse.

5.3 L'intégrale

Sur ce sujet, le retour de balancier est particulièrement brutal [20]. On abandonne les sommes de Riemann, mais aussi l'introduction plus intuitive par l'aire, et l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ d'une fonction continue [21] est définie comme la différence des valeurs $F(b) - F(a)$ d'une primitive F de f, l'existence des primitives étant admise sans justification. Cette définition a le mérite de permettre de prouver rapidement les principales propriétés de l'intégrale (positivité, linéarité, Chasles, inégalité de la moyenne, ...) Deux autres points sont au programme : les changements de variables affines et l'intégration par parties. Le programme évoque ensuite les calculs de valeurs approchées d'intégrales (en 1982, seulement la méthode des rectangles, mais avec majoration du reste, en 1997, sont citées les méthodes des rectangles, trapèzes et point milieu). C'est un point positif qui est très présent dans les manuels de l'époque.

L'utilisation de l'intégrale pour le calcul d'aires, de volumes, etc. est évoquée ensuite, mais là, on se garde bien de dire comment on fait le lien entre l'aire et l'intégrale [22]. La raison de ces choix est partiellement expliquée dans les commentaires des programmes de 1983. Je cite :

Il a toujours été malaisé de présenter en Terminale l'intégration ; en effet, à ce niveau, par souci des techniques de calcul, le concept de primitive prédomine sur celui d'intégrale. Il a donc paru plus efficace et plus court de rattacher la définition de l'intégrale d'une fonction continue aux primitives de cette fonction ; il va de soi que cette définition d'aura rien d'abrupt, elle peut être précédée d'une sensibilisation au moyen de la notion d'aire.

5.4 Commentaire

Je suis en désaccord avec cette façon de définir l'intégrale, essentiellement parce que l'introduction par les primitives est parachutée et déconnectée de la notion d'aire [23]. En contrepartie, il faut reconnaître que, là, on est capable

20. À la lecture du paragraphe consacré à l'intégration dans [8], qui met en avant les approximations et la modélisation, on ne peut pas en attribuer la responsabilité à l'action des IREM.

21. Sur ce point, un stade avancé du ridicule est atteint en 1997 où, le mot continu ayant disparu des programmes, seules les fonctions dérivables ont droit à une primitive !

22. Le programme de 1997 dit : *Dans le cas d'une fonction positive, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire* mais cette interprétation n'est nullement évidente.

23. On voit bien cependant, en lisant les commentaires des programmes, que la notion d'aire est présente dans l'esprit de leurs concepteurs. Pourquoi n'ont-ils pas sauté le pas en revenant à une définition de l'intégrale comme celle de 1902 ? Peut-être qu'on était trop proche de l'époque des maths modernes, où l'aire avait été sévèrement bannie.

de donner des démonstrations simples et correctes de toutes les propriétés.

En fait, si l'on regarde les manuels de l'époque, beaucoup présentent une introduction de l'intégrale et des primitives par les aires, mais avec mauvaise conscience. Dans le Transmath TCE de 1987 on commence par une introduction sur les aires, on propose en travaux pratiques d'approche la preuve du fait que la dérivée de l'aire est égale à la fonction, mais on définit l'intégrale en se conformant au programme, i.e. comme $F(b)-F(a)$ (en admettant l'existence de F) et pour l'aire sous la courbe, on la **définit** comme l'intégrale ! Dans le Hachette TCE de la même année (par ailleurs très riche), on commence par donner les propriétés de l'aire (exactement comme je propose de le faire), mais on passe sous les fourches caudines du programme pour la définition de l'intégrale (même si l'existence de la primitive comme aire est prouvée plus loin). On trouvera au §9 l'exemple du livre de la collection Terracher.

6 Le programme de 2002 ou le cul entre deux chaises

6.1 Les changements du programme d'analyse

On peut signaler deux points importants en ce domaine : la disparition de l'inégalité des accroissements finis (et donc des exercices sur les suites récurrentes) et l'introduction de l'exponentielle *via* l'équation différentielle. Plus généralement, l'accent est mis sur les équations différentielles [24] avec un remarquable document d'accompagnement rédigé par les GTD (Groupes Techniques Disciplinaires) de maths, de physique et de SVT.

6.2 Sur l'intégrale

6.2.1 Le programme

Pour une analyse détaillée de ce programme, je renvoie à mon texte :
`https://www.math.u-psud.fr/~perrin/conferences.html`

La critique principale des programmes de 1982 c'est que l'entrée par les primitives perd tout l'aspect géométrique lié à la notion d'aire. Prenant acte de ce fait, le programme 2002 commence par la définition de $\int_a^b f(t)dt$, pour une fonction continue positive, comme l'aire sous la courbe.

24. Elles seront supprimées dans les programmes de 2011, encore un bel exemple d'oscillation excessive !

Mais cette introduction est tout de suite tempérée par une sorte de remords et l'on voit réapparaître les sommes de Darboux de l'époque des maths modernes :

On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.

Ce paragraphe est bien peu clair ! Il y a dans la première phrase quelque chose d'ambigu : qu'a-t-on en tête exactement ? Une définition de la notion d'aire pour toutes les parties du plan ? C'est ce qu'indiquerait le mot quadrillage, car pour l'aire sous une courbe il suffit de prendre des rectangles. L'exemple de la parabole, au contraire, semble aller dans le sens des rectangles donc des sommes de Darboux. On trouve plus loin :

Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions : tout développement théorique est exclu.

Ici on aperçoit un objectif plus ou moins avoué du programme : donner un aperçu de la *définition* de l'aire (et dans l'esprit des auteurs, il n'y a de définition qu'en construisant l'aire à l'aide de sommes de Riemann ou autres). Il est clair que cela ne peut que semer le trouble chez les enseignants, comme le montre l'article [7] que nous évoquerons plus loin. De plus, la mention du calcul d'aire par cette méthode est pour le moins discutable. Nous revenons sur tous ces points au §8.

Outre cet aspect, l'autre critique essentielle de ce programme c'est l'arrivée beaucoup trop tardive du lien entre intégrale et primitive. En effet, ce point n'apparaît qu'au quatrième paragraphe, alors qu'entre temps, après quelques contorsions pour définir l'intégrale dans le cas d'une fonction de signe quelconque, on énonce toutes les propriétés de l'intégrale : *linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles, inégalité de la moyenne*, et ces propriétés sont **toutes** admises (c'est dit explicitement), alors que la formule avec la primitive permet de les démontrer sans peine.

On notera aussi qu'il n'y a pratiquement plus d'allusion aux méthodes de calcul approché. Cela semble doublement incohérent, d'abord avec l'accent mis sur l'utilisation de la calculatrice dans le préambule du programme, et ensuite, avec les multiples allusions aux sommes de Riemann.

6.2.2 Discussion

Le programme 2002 a eu le mérite essentiel de remettre la notion d'aire au cœur de la notion d'intégrale. Mais il avait cependant deux défauts majeurs, que l'on peut tous deux interpréter en termes des mouvements de balancier des programmes.

D'abord, on a vraiment l'impression en lisant ce programme, que les auteurs sont en permanence le cul entre deux chaises, partagés qu'ils sont entre des soucis contradictoires :

• l'idée, qui relève de la nostalgie des mathématiques modernes, que sans les "sommes de Riemann" il n'est pas de théorie rigoureuse de l'intégrale (voir [7] sur ce point),

• la crainte (justifiée) que cette théorie soit trop difficile pour des élèves de terminale.

Nous reviendrons sur cette question au paragraphe 8.

Ensuite, ce programme a voulu se démarquer du programme précédent qui définissait l'intégrale comme différence de deux valeurs d'une primitive et c'était justifié. Mais comme c'est souvent le cas, la réaction a été trop brutale et la notion de primitive a été indûment rejetée à la fin, ce qui oblige à admettre pratiquement toutes les propriétés de l'intégrale et notamment la linéarité.

Cette façon d'admettre **toutes** les propriétés essentielles d'une notion est très discutable. Les auteurs du programme ont l'air d'oublier qu'ils font des mathématiques. Or, en mathématiques on est censé justifier ses affirmations, c'est même le propre de cette discipline, ce principe pouvant être tempéré si les résultats à admettre sont trop difficiles et/ou si l'on peut s'en convaincre intuitivement.

Mais ici, ces deux points sont battus en brèche. D'abord, il n'est pas vrai que les choses soient claires intuitivement. Le lecteur se convaincra que la linéarité, en particulier, n'est pas du tout évidente, même pour les fonctions positives, sauf à revenir aux indivisibles de Cavalieri.

Ensuite, au contraire, si l'on a établi que l'aire est une primitive de f, le résultat devient évident et c'est l'un des multiples aspects qui fait que la primitive est un progrès !

Le résultat est un programme mal fichu, où l'on ne démontre rien, où le lien primitive-intégrale arrive trop tard et où l'aspect numérique est absent. Mais il est facile de remédier à ces inconvénients [25], avec des modifications somme toute mineures et c'est ce que fera le programme suivant.

25. Il y avait tout ce qu'il fallait pour cela dans le livre de Marc Rogalski ([19]) paru en 2001.

7 Le programme 2011 : alleluia !

Sur l'intégrale, le programme 2011 reprend [26] pour l'essentiel les remarques précédentes. Comme en 2002, l'intégrale est introduite par les aires dans le cas des fonctions positives (et on évoque les axiomes d'additivité et d'invariance par déplacement des aires), mais on fait aussitôt après le lien avec les primitives comme le suggérait Poincaré en montrant que la dérivée de l'aire sous la courbe est égale à la fonction. Cela permet de définir l'intégrale d'une fonction de signe quelconque et de prouver les propriétés de linéarité, etc.

Les seuls points négatifs de ce programme sont la disparition de l'intégration par parties, outil essentiel s'il en est, mais aussi le peu de place que tiennent les calculs approchés et la pauvreté des exemples d'applications, notamment en physique. Mais, à mon sens, c'est tout de même le meilleur programme sur ce thème, depuis longtemps. Comme aurait dit Boris Vian :

C'qui prouve qu'en protestant, quand il est encore temps,
On peut finir par obtenir des ménagements !

8 Annexe : Les sommes de Riemann ou de Darboux

Je discute [27] dans ce paragraphe le rôle mathématique des sommes de Riemann, englobant sous ce nom aussi bien les vraies sommes de Riemann que celles de Darboux [28] voire une approche équivalente par les fonctions en escalier. On a vu que, depuis l'époque des maths modernes, les auteurs de programmes sont tiraillés entre leur envie d'introduire ces notions en terminale, parce qu'elles seraient les seules à en assurer la rigueur, et le sentiment frustrant que ces questions sont trop difficiles pour les lycéens.

Pour avoir enseigné l'intégrale de Riemann à l'université, je partage en tous cas l'idée que cette théorie n'est pas évidente, surtout à ce niveau, notamment en raison de difficultés techniques (on a besoin de la notion de

26. J'ai eu un écho de ce programme, quand il n'était encore qu'en projet, dans le cadre des consultations alibis qui précédèrent sa mise en place (j'étais présent au titre du comité scientifique des IREM). Les auteurs du programme me dirent d'ailleurs explicitement à cette occasion qu'ils s'étaient inspirés de mon texte. Ma vanité en fut évidemment flattée, et tout à la joie d'être entendu (*À ces mots le corbeau ne se sent plus de joie ...*), je laissai passer alors sans réagir l'introduction de la loi normale en terminale S. Depuis, j'ai réagi vivement sur ce thème, voir [15]. Mais le mal était fait ...

27. Ce paragraphe est essentiellement issu du texte que j'avais écrit en réaction aux programmes de 2002. J'y exprime mon opinion, que le lecteur n'est pas tenu de partager.

28. En vérité, si l'on avait deux sous de reconnaissance, ces sommes devraient s'appeler sommes d'Eudoxe ou d'Archimède.

borne supérieure, il y a des difficultés liées aux subdivisions [29], pour montrer l'intégrabilité d'une fonction continue on a besoin de l'uniforme continuité, etc.). Ce que je veux contester ici c'est l'idée que cette théorie doit, sinon être enseignée au niveau du lycée, du moins être sous-jacente dans les programmes, sous peine de lèse-mathématique. Pour résumer mon opinion, je reprendrai la phrase de Poincaré évoquée ci-dessus :

Tout cela a sa place dans l'enseignement des facultés, tout cela serait détestable dans les lycées.

8.1 À quoi ça sert ?

Au travers de leurs apparitions dans la littérature, on peut attribuer aux sommes de Riemann quatre fonctions essentielles :

- Elles permettent de **définir** l'intégrale et l'aire (?) et de montrer leur existence.
- Elles permettent de les **calculer**.
- Elles permettent de les **approcher**.
- Elles permettent de **modéliser** des situations physiques.

À mon avis, en terminale, les deux premiers points sont inutiles, voire nocifs. Le troisième est important (mais il ne nécessite pas vraiment l'introduction des sommes de Riemann et il a malheureusement presque disparu dans les programmes actuels). Enfin le quatrième est essentiel aussi mais mérite à tout le moins une discussion approfondie.

8.2 Montrer l'existence de l'aire ?

Entendons-nous bien. Je suis fondamentalement d'accord avec mes collègues sur la nécessité de donner des définitions précises des objets dont on s'occupe. Mais, lorsqu'il s'agit, comme ici avec les aires, de notions complètement intuitives, avec lesquelles les élèves travaillent à l'école primaire et au collège, la nécessité d'une **construction** ne me semble pas essentielle, une définition **axiomatique** me semblant suffisante.

Ainsi, ce que je conteste dans le programme 2002, c'est qu'après avoir introduit l'intégrale par les aires, il jette aussitôt une sorte de suspicion sur cette notion dans la phrase : *Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions.* J'ai été conforté dans la crainte que j'avais que cette lecture du programme n'induise une dérive par la lecture

29. À cause de Chasles, on ne peut pas se limiter aux subdivisions régulières.

de l'article de Sophie Dupuy-Touzet et Pierre Lopez [7] paru en 2006 dans le bulletin de l'APM. En effet, les auteurs, soucieux de se conformer au programme, répercutent dans cet article cette nécessité de la définition de l'aire *via* l'intégrale. Je cite, en vrac :

Or (est-il besoin de le rappeler), le calcul intégral ... montre (et on pourrait rajouter "surtout") que l'on peut définir l'aire de ces surfaces.

Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aire parce que sans le calcul intégral, les aires n'existent pas.

C'est le calcul intégral qui va permettre de parler de la notion d'aire.

Le calcul intégral devient *un calcul d'aire car on dira que "l'aire sous la courbe" est définie par l'intégrale de la fonction ...*

En lisant cet article, écrit par des gens de bonne foi, j'ai été catastrophé, car je suis en désaccord total avec tout cela. Je m'explique.

8.2.1 Un premier argument : l'histoire

Les anciens ne se posaient pas la question de l'existence des aires planes, considérée comme allant de soi et l'on a fait des mathématiques jusqu'au XIX-ème siècle sans s'en inquiéter et sans rencontrer de difficulté essentielle. Comme le niveau des classes de lycée ne dépasse guère le début du XIX-ème siècle, on doit pouvoir aussi y admettre cette existence. C'est, je pense, ce que Poincaré avait en tête, et je partage son point de vue. C'est d'autant plus vrai que cette notion est familière aux élèves qui la manipulent depuis l'école primaire [30]. Ce qui est important, en revanche, c'est **d'expliciter** les propriétés de l'aire : additivité, invariance par isométrie, éventuellement homogénéité, voir par exemple [10]. Je signale que cela n'a rien de bien nouveau : les deux premiers axiomes sont énoncés dans Euclide !

8.2.2 Un second argument : les mathématiques

En vérité, ce n'est que lorsqu'on a commencé à manipuler des fonctions un peu bizarres qu'est apparue la nécessité d'une formalisation. Là encore, Poincaré le dit : *Pour définir une intégrale, nous prenons toutes sortes de précautions ; nous distinguons les fonctions continues et celles qui sont discontinues, celles qui ont des dérivées et celles qui n'en ont pas.* C'est dans cette perspective que le travail de Riemann et celui de Lebesgue s'inscrivent. N'oublions pas que l'exemple le plus simple de partie non quarrable du plan

30. C'est le même argument qui a mené, pour justifier les bases de la géométrie élémentaire, à introduire les espaces vectoriels et affines des maths modernes avec le succès que l'on sait, voir §4.1.2 ci-dessus.

est l'ensemble des points à coordonnées rationnelles du carré : ce n'est pas du tout une question qui se pose pour des élèves de lycée.

J'ajoute qu'il y a une **arnaque manifeste** à prétendre que les sommes de Riemann définissent les aires. Ce qu'elles montrent, c'est seulement l'existence de l'aire de l'hypographe d'une fonction. Si l'on veut être complet, il reste à voir l'existence de l'aire des parties du plan qui ne sont pas de ce type. C'est essentiel du point de vue géométrique. Déjà, il n'est pas évident avec cette définition de dire ce qu'est l'aire d'un rectangle de côtés non parallèles aux axes, et pourquoi elle est égale au produit de ses dimensions. En particulier, on a besoin pour cela de l'additivité de l'aire, nullement évidente. De même, pour calculer l'aire d'un segment de parabole quelconque, on effectue un changement d'axes, qui n'est justifié que si l'on admet l'invariance de l'aire par isométrie. Or ce point n'est pas abordé dans le point de vue fonctionnel (sauf pour les translations horizontales et verticales).

Ce qui précède montre que, si l'on veut vraiment définir les aires planes, on ne peut pas faire l'économie d'une approche du type de celle que proposait Lebesgue aux professeurs de lycée de l'entre deux guerres, voir [9]. Cette définition, quand on a compris les propriétés de l'aire fournies par les axiomes, est tout à fait naturelle. On choisit un repère, qui donne un quadrillage du plan, que l'on raffine ensuite en divisant en 10, 100, 10^n, etc. On sait déjà mesurer les aires délimitées par le quadrillage. Pour les autres on compte les carreaux qui sont à l'intérieur d'une partie et ceux qui la rencontrent et on a une mesure intérieure et une mesure extérieure, qui doivent encadrer la mesure cherchée (à cause des axiomes). La définition s'impose alors : il suffit de prendre la limite commune quand n tend vers l'infini (si elle existe). Ce qui est moins évident c'est de montrer que la construction ainsi produite vérifie bien les axiomes voulus, mais Lebesgue le fait, voir [9].

8.2.3 Un troisième argument : la logique

Le programme de 2002 a été écrit par des mathématiciens éminents, mais qui, me semble-t-il, continuent à entretenir des illusions sur les mathématiques. Il reste en filigrane dans leur démarche un peu du "programme de Hilbert" de fonder rigoureusement les mathématiques. Pour eux, donner une définition de la notion d'aire ne signifie pas seulement en donner une définition axiomatique (c'est ce que je propose, avec l'appui de l'intuition), mais nécessite de la construire. Ce souci de construction est d'ailleurs partagé par nombre de collègues de l'enseignement supérieur, qui ont l'impression qu'ils ont manqué à leur devoir s'ils ont donné aux étudiants une définition axiomatique des réels, mais pas une construction de $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$. Je pense, au contraire, qu'on n'a pas mieux compris les réels quand on en a vu une construction par les coupures de Dedekind ou les suites de Cauchy. De plus, je prétends que cela ne peut être, en dernier ressort, qu'une illusion. Bien sûr on peut fonder les aires sur les réels (via les fonctions ou les espaces vectoriels), bien sûr on peut construire les réels sur les rationnels, élaborer ces derniers à partir des entiers, mais là, on doit bien finir par se contenter d'une théorie axiomatique (sauf à faire appel à Dieu, comme Kronecker), soit qu'on s'appuie sur les axiomes de Peano, soit sur la théorie des ensembles [31] de Zermelo-Fraenkel. De plus, on se heurte au théorème d'incomplétude de Gödel : on ne peut prouver la consistance [32] ni de la théorie des ensembles, ni de l'arithmétique de Peano, au moins à l'intérieur de ces théories. Au bout du compte, la quête du Graal d'une construction inattaquable des mathématiques se révèle assez vaine.

Fort de cette constatation, il devient pertinent de proposer, ici comme ailleurs, l'usage **d'axiomes intermédiaires** comme ceux des aires [33].

8.2.4 Ce que je propose

Je propose donc d'adosser le programme à une définition axiomatique de l'aire comme application définie sur certaines parties "raisonnables" du plan et vérifiant additivité, invariance par isométrie et homogénéité. Un mathématicien mauvais coucheur [34] peut évidemment m'objecter qu'il faut encore savoir ce qu'on entend par parties "raisonnables". Je répondrai qu'elles contiennent évidemment les polygones, disques, segments de parabole, etc. et, en fait, toutes les parties qu'un élève de terminale pourra être amené à considérer. Si le mauvais coucheur insiste, je le renverrai sans ménagement à un théorème (non trivial) de Banach qui affirme qu'il existe une mesure simplement additive et invariante par isométrie définie sur **toutes** les parties bornées du plan [35] (et qui coïncide avec l'aire sur les parties quarrables). On

31. Pour une fois que je suis d'accord avec Dieudonné, je ne résiste pas au plaisir de le citer : *Mais il convient ici comme ailleurs de débarrasser l'enseignement de la superstition consistant à vouloir à n'importe quel prix tout rattacher à une source axiomatique unique. Les mathématiciens professionnels ont de bonnes raisons de tenir à ce qu'il en soit ainsi, mais ces raisons ne concernent qu'eux ; ce qui est par contre d'une importance universelle, c'est de savoir faire des déductions logiques correctes à partir de prémisses qui n'ont pas besoin d'être nécessairement sanctifiées par un arbre généalogique remontant à la Théorie des ensembles !*

32. C'est-à-dire montrer qu'il en existe un modèle ou qu'elle est non contradictoire, ce qui revient au même par un autre théorème de Gödel.

33. Cela vaut non seulement pour les aires, mais aussi pour les volumes, les moments d'inertie, etc. et aussi les cas d'égalité des triangles !

34. J'en connais.

35. En revanche c'est faux dans l'espace à cause du paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski.

peut donc sans aucun inconvénient admettre l'existence de l'aire pour les parties usuelles du plan.

Au lycée on se contentera de donner une liste de propriétés naturelles admises dont on déduira les autres. Je propose une telle approche dans [10]. Elle a été essentiellement reprise dans le programme de 2011.

8.3 Les sommes de Riemann comme moyen de calcul ?

Le programme de 2002 suggère : *Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable* et les manuels lui emboîtent le pas avec docilité.

Cette proposition, présentée sans discussion [36], me semble une absurdité épistémologique. Ce que propose le programme, et que pratiquaient aussi les livres de l'époque maths modernes, consiste à revenir à la méthode d'exhaustion d'Eudoxe, Euclide et Archimède, méthode qui a mené à ces sommets des mathématiques de l'antiquité que sont le calcul du volume de la pyramide ou la quadrature de la spirale et du segment de parabole, mais qui a été supplantée depuis par le calcul infinitésimal.

Je m'explique. Si l'on mène le calcul dans le cadre proposé par le programme, disons pour calculer $\int_0^1 x^2dx$, on obtient l'encadrement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} \leq \int_0^1 x^2dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}.$$

Il reste essentiellement à calculer la somme $\sum_{k=1}^n k^2$ qui vaut $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on obtient bien la limite $1/3$ comme prévu. Je dis que c'est exactement ce que fait Archimède, non pas pour la quadrature de la parabole, pour laquelle il a une autre méthode, plus géométrique, voir [10] ou [12] mais pour la quadrature de la spirale (voir intermède ci-dessous ou [19]).

Qu'oublient nos auteurs de programmes ? Qu'entre temps, Newton et Leibniz sont passés par là, avec l'invention du calcul différentiel et intégral et le lien entre primitive et intégrale qui rend trivial ce type de calcul puisqu'il le ramène au calcul de la primitive de x^2. D'ailleurs, ce qui était un sommet des mathématiques de l'antiquité (la quadrature de la parabole) est maintenant un exercice pour élèves de terminale. Le fait essentiel qui explique cela, c'est que le calcul de la primitive d'une fonction continue est bien plus facile que le calcul de la somme finie analogue comme on le voit sur l'exemple précédent.

36. C'est-à-dire sans annoncer qu'on verra une méthode beaucoup plus efficace pour faire ce calcul avec les primitives.

Et ce cas n'est que le plus simple, on pensera au cas de l'intégrale de x^k, de $\sqrt{x}$, de x^α, de $\sin x$, de $\ln(x)$ etc.

Comme je l'ai dit dans l'introduction, je considère que l'invention du calcul infinitésimal est un des progrès essentiels de l'humanité et on aurait grand tort de s'en priver. En un mot : **le continu c'est plus simple que le discret** [37].

Pour revenir au programme de 2002, je trouve que prôner, dès les premières lignes du programme sur le calcul intégral, un calcul comme celui de l'aire de la parabole par les sommes de Darboux, sans au moins un regard critique, est pour le moins maladroit. Je vois effectivement un intérêt à ce calcul, essentiellement historique et épistémologique : c'est justement de servir de **repoussoir** et de montrer combien l'entrée par les primitives est plus efficace.

8.4 Intermède : Archimède et la quadrature de la spirale

8.4.1 La somme des carrés

Pour effectuer la quadrature de la spirale [38] d'équation polaire $\rho = a\theta$ (appelée aujourd'hui spirale d'Archimède), Archimède calcule la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ que nous avons utilisée dans le calcul de l'aire du segment de parabole. Voilà l'énoncé de la proposition X de son livre *Des spirales* (cf. [1]) :

Si des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, sont disposées les unes à la suite des autres, l'excédent étant d'ailleurs égal à la plus petite ; et si on dispose un même nombre d'autres lignes, dont chacune est aussi grande que la plus grande des premières, les carrés des lignes égales à la plus grande, ajoutés au carré de la plus grande ainsi qu'au rectangle délimité sous la plus petite et sous une ligne égale à la somme de celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, valent le triple des carrés de toutes les lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur.

Il n'est déjà pas si facile de comprendre de quoi il s'agit. Le lecteur se convaincra qu'à partir d'une suite, $1, 2, \dots, n$ il s'agit de montrer :

$$(*) \qquad n \times n^2 + n^2 + (1 + 2 + \cdots + n) = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

ce qui donne la formule bien connue $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

37. Un exemple très convaincant sur ce thème : comparer l'équation différentielle logistique et la suite du même nom.

38. Voir l'excellent mémoire de M1 de Paloma Cabeza-Orcel et Daëna Léauva [4].

La preuve est astucieuse et différente de toutes celles que je connaissais. Bien entendu, Archimède l'exprime uniquement en termes géométriques, et sans formules, mais il est incomparablement plus commode pour nous de la donner sous forme algébrique. Voilà ce que devient l'argument.

On écrit d'abord, pour $k = 0, 1, \ldots, n$: $n = (n-k) + k$ d'où $n^2 = (n-k)^2 + k^2 + 2k(n-k)$. En sommant, on obtient :

$$(n+1)\, n^2 = 2S_n + 2U_n \quad \text{avec} \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k).$$

On ajoute à $2U_n$ la somme $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$:

$$2U_n + T_n = 2\sum_{k=0}^{n} k(n-k) + \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k).$$

Il reste à montrer l'égalité $S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k)$. Pour cela, Archimède prouve la formule $n^2 = n + 2(1 + 2 + \cdots + (n-1))$ que l'on comprendra aussitôt avec la figure ci-dessous.

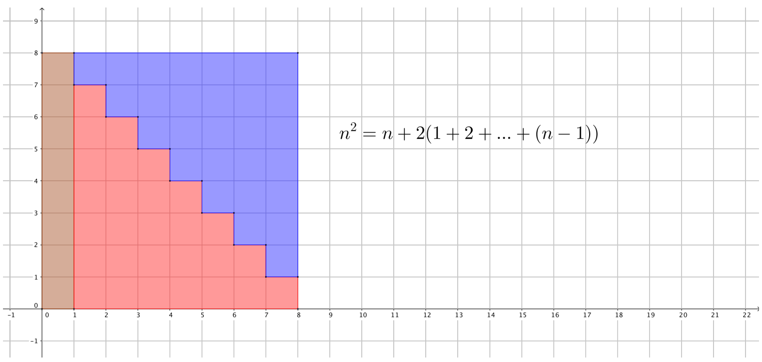


Figure 3 –

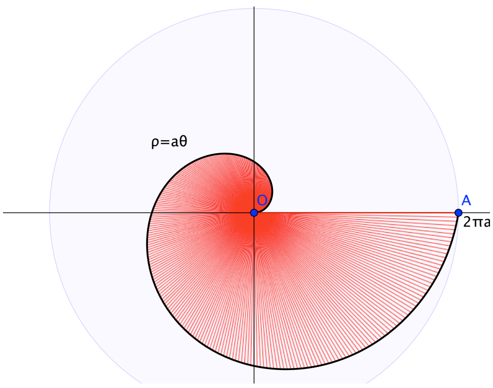
Appliquant cette relation à tous les entiers, il obtient la suite de relations :
$n^2 = n + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1))$
$(n-1)^2 = (n-1) + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-2))$
$(n-2)^2 = (n-2) + 2 \times (1 + 2 + \cdots + (n-3))$
....
$2^2 = 2 + 2 \times (1)$
$1^2 = 1 + 2 \times (0)$

dont il fait la somme en notant qu'il a une fois n, trois fois $n-1$, cinq fois $n-2$, etc. ce qui donne bien $S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k)$.

Archimède déduit de la formule $(*)$ l'encadrement : $n^3 \leq 3S_n \leq (n+1)^3$. (La minoration est claire. Pour la majoration, on écrit $3S_n = 3S_{n+1} - 3(n+1)^2$, on applique la formule $(*)$ à $3S_{n+1}$ et on note que $1 + 2 + \cdots + (n+1)$ est plus petit que $(n+1)^2$.)

8.4.2 La spirale

La spirale d'Archimède est la courbe $\mathcal{S}$ donnée en coordonnées polaires par la formule $\rho = a\theta$, voir figure 4. Archimède montre que l'aire $\mathcal{A}$ (en rouge) limitée par la courbe et par la demi-droite $[OA)$ est le tiers de l'aire du disque de centre O et de rayon la distance du point extrême $(2\pi a)$, soit $\frac{4a^2\pi^3}{3}$.



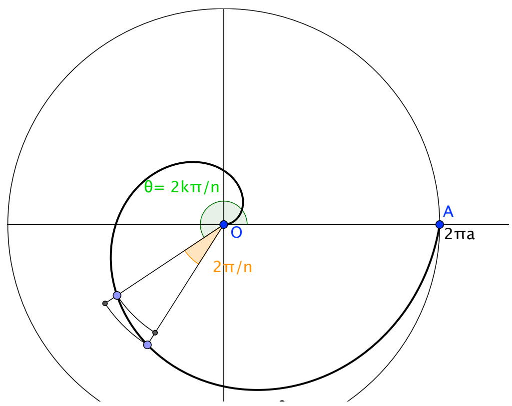


FIGURE 4 – L'aire de la spirale

Pour cela il encadre la spirale par des secteurs d'angles $2\pi/n$. Le k-ème (petit) secteur a pour aire [39] $a^2\big(\frac{2k\pi}{n}\big)^2\ \frac{\pi}{n}\cdot$ La somme des aires de ces secteurs est donc :

$$\frac{4a^2\pi^3}{n^3}\sum_{1}^{n} k^2 = \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et on déduit le résultat, soit directement pour les modernes, soit grâce aux encadrements de S_n vus ci-dessus pour Archimède.

39. Rappelons que l'aire d'un secteur circulaire de rayon R et d'angle α est égale à $\frac{\alpha R^2}{2}\cdot$

Pour une autre méthode, inspirée par celle des physiciens, et plus dans l'optique de Newton et Leibniz, voir ci-dessous §8.6 ou [17].

Pour conclure sur cette incursion dans l'œuvre d'Archimède je citerai Bourbaki ([3]) : *Et ne devons-nous pas conclure que cette œuvre admirable d'où le calcul intégral, de l'aveu de ses créateurs, est tout entier sorti, est en quelque façon à l'opposé du calcul intégral ?*

8.5 Les sommes de Riemann comme moyen d'approximation

Qu'on ne me fasse pas dire ce que je n'ai pas dit. Je ne conteste nullement l'intérêt de l'encadrement d'une intégrale par des rectangles, des trapèzes, etc., bien au contraire. Mais, au niveau du secondaire, **il n'est nul besoin d'avoir défini l'intégrale avec des sommes de Riemann pour en disposer**, il suffit d'avoir la croissance de l'intégrale (donc l'axiome d'additivité de l'aire). En effet la méthode des rectangles (resp. celles des trapèzes et du point médian) fournissent des encadrements de l'intégrale dès que la fonction est monotone (resp. convexe ou concave). De plus, même sans ces hypothèses, un utilisation astucieuse de la dérivation donne aisément des majorations optimales de l'erreur commise dans chacun des cas, voir [17] Ch. 4.

Ce genre de calcul peut avoir deux intérêts majeurs :

• Le calcul approché d'intégrales pour lesquelles on ne connaît pas de primitive. C'est évidemment le cas de $\exp(-x^2)$ que les élèves voient dans le cours de probabilités, mais cela peut valoir aussi, en terminale, pour $1/x$ ou $1/(1+x^2)$. En effet, la fonction logarithme est nouvelle et il est intéressant de montrer comment la calculer, quant à l'Arctangente il est inconnu au lycée.

• L'utilisation d'intégrales pour obtenir des encadrements de suites, je pense à la série harmonique et à la constante d'Euler, aux séries de Riemann, ou à l'utilisation de l'intégrale pour encadrer $\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$, menant à un avatar de la formule de Stirling. Dans tous ces cas, on voit en action ce qu'on a dit plus haut : il est bien plus facile de calculer une primitive que la somme d'une série.

Dans le cas de Stirling, on encadre $S_n = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \ln n!$:

$$\int_1^n \ln t \; dt \leq S_n \leq \int_1^n \ln t \; dt + \ln n$$

Les intégrales se calculent par parties et on obtient :

$$n \ln n - n + 1 \leq S_n \leq n \ln n - n + 1 + \ln n,$$

d'où, en passant à l'exponentielle, l'encadrement $n^n e^{-n} e \leq n! \leq n^n e^{-n} e\ n$, formule qui suffit dans nombre de situations. On obtient facilement un encadrement avec un terme en $\sqrt{n}$ en utilisant les méthodes des trapèzes et du point médian, voir [16].

8.6 Les sommes de Riemann et la modélisation

Je m'inspire ici de l'analyse très intéressante de Marc Rogalski (voir [19]) sur les procédures "intégrale" ou "primitive" et de nombreuses discussions avec des collègues physiciens. Je reviens sur le calcul de l'aire de la spirale, mais les choses sont analogues pour les calculs de volume, de masse, de moment d'inertie, etc., voir mon cours [13].

Pour calculer l'aire de la spirale, cf. §8.4.2, voici un raisonnement "à la physicienne". On découpe la spirale en parts, chacune d'angle $d\theta$ petit, voire infinitésimal, voir figure ci-contre. L'aire $d\mathcal{A}$ peut être assimilée à l'aire du secteur de rayon $a\theta$ et d'angle $d\theta$ soit $\frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$.

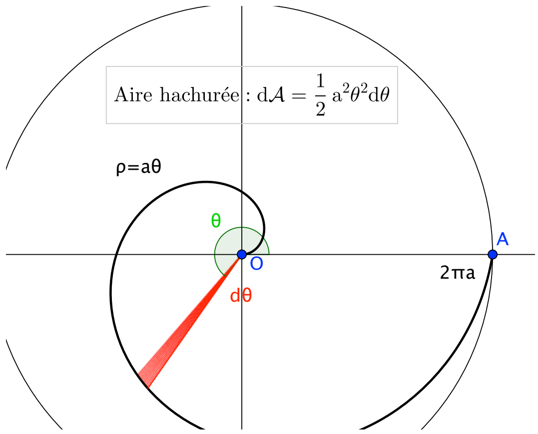


FIGURE 5 – La méthode du physicien

Pour obtenir l'aire totale, il n'y a plus qu'à faire la "somme" des aires infinitésimales c'est-à-dire à calculer l'intégrale $\int d\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} a^2\theta^2 d\theta = \dfrac{4a^2\pi^3}{3}$. On trouve bien que l'aire de la spirale est le tiers de l'aire du disque de centre O et de rayon $2\pi a$.

Comment comprendre cette procédure ? Il est clair que le physicien voit l'intégrale comme une "somme", d'ailleurs le symbole de l'intégrale (en général c'est une intégrale multiple) est une déformation du S de somme. Une question fondamentale est de savoir s'il s'agit d'une somme finie ou d'une somme de quantités infinitésimales à la manière de Cavalieri ou Roberval. Si l'on pousse les physiciens dans leurs retranchements [40], la plupart donneront

40. Si c'est un mathématicien qui leur pose la question, la peur du gendarme fait que les physiciens sont prudents et n'osent pas trop évoquer les infinitésimaux ! Pourtant, c'est

une justification de cette modélisation qui est de faire un découpage, fini, mais avec des morceaux dont le diamètre tend vers 0 (c'est ce que Marc Rogalski appelle dans [19] la procédure "intégrale" : découpage, encadrement, sommation, passage à la limite). Le mathématicien, ravi, reconnaît là le point de vue des sommes de Riemann (pour les intégrales multiples).

En fait, dans de nombreux cas, le physicien s'arrange pour ramener son problème, qui est *a priori* à plusieurs variables (autant que la dimension de l'objet) à un problème en **une seule** variable, le plus souvent grâce à des arguments de symétrie [41]. C'est le cas ici avec la variable θ et il obtient l'aire de la petite part $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$.

Bien. Mais, que fait le physicien pour calculer l'aire totale $\mathcal{A}$? Il calcule une primitive, comme nous autres, mais je suspecte que parfois il a oublié pourquoi [42]. Si on lui demande avec insistance la justification de ce calcul il peut indiquer que l'écriture $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$ montre bien que $\frac{1}{2}a^2\theta^2$ est la dérivée $\dfrac{d\mathcal{A}}{d\theta}$, ce qui justifie qu'on obtienne l'intégrale comme primitive. En général, les physiciens ne vont guère plus loin que ça (en tous cas ceux à qui j'ai eu affaire). En particulier, et c'est le point troublant de cette histoire, ils n'explicitent **jamais** la fonction dont ils calculent la dérivée. Pourtant, ici comme dans la plupart des cas, c'est facile : il suffit d'introduire la fonction $\mathcal{A}(\theta)$ qui représente l'aire comprise entre les angles 0 et θ (dans le cas général, on introduit la "grandeur jusqu'à x" : l'aire jusqu'à x, le volume, la masse, jusqu'à z, etc.), et de montrer que la dérivée $\mathcal{A}'(\theta)$ est bien égale à $\frac{1}{2}a^2\theta^2$. En effet, si cela est vrai, on a $\mathcal{A} = \mathcal{A}(2\pi) - \mathcal{A}(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{A}'(\theta)\, d\theta$ et on retrouve la formule précédente : c'est la procédure primitive au sens de Rogalski.

Pour montrer l'assertion sur la dérivée, revenons à la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement :

$$\mathcal{A}'(\theta) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{A}(\theta+h) - \mathcal{A}(\theta)}{h}\cdot$$

L'accroissement en question est le même que le $d\mathcal{A}$ précédent, mais où l'on remplace l'accroissement infinitésimal $d\theta$ de l'angle par un accroissement fini h, que l'on va faire tendre vers 0. Si on ne fait plus l'approximation du physicien qui assimilait la petite aire jaune à celle d'un secteur circulaire,

sans doute l'analyse non standard qui constituerait le cadre le mieux adapté aux calculs des physiciens, mais discuter de son introduction dans l'enseignement m'entraînerait trop loin et dépasserait d'ailleurs mes compétences.

41. Voir par exemple le calcul du moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe dans [13].

42. Réponse à la question : *ah mais ça, c'est des maths !*

comme le rayon $\rho = a\theta$ croît, on a un encadrement entre deux secteurs, l'un de rayon $a\theta$, l'autre de rayon $a(\theta + h)$. On obtient :

$$\frac{a^2\theta^2 h}{2h} \leq \frac{\mathcal{A}(\theta + h) - \mathcal{A}(\theta)}{h} \leq \frac{a^2(\theta + h)^2 h}{2h}.$$

On voit que les deux termes extrêmes tendent vers $\frac{a^2\theta^2}{2}$ et on a le résultat. En vérité, ce que fait le physicien c'est que dans le terme $(\theta+h)^2 = \theta^2+2\theta h+h^2$, il néglige les termes en h et h^2. C'est justifié par le fait que ces termes tendent vers 0 quand h tend vers 0. On constate, avec un brin d'admiration, que le calcul du physicien est parfaitement légitime (il néglige simplement des infiniment petits d'ordre supérieur).

On trouvera de nombreux autres exemples de cette méthode : calcul du volume de la pyramide, du cône, de la boule, calcul de moments d'inertie, calcul de masses, flux sanguin, etc. dans les références [10], [13], [17], [19].

Il est clair que la procédure "primitive" s'applique dans la plupart des cas de calculs de grandeurs physiques usuelles et que c'est une méthode rapide et particulièrement efficace. Tellement efficace qu'il me semble de notre devoir de mathématiciens d'expliciter ce lien entre nos disciplines.

En fait, et Marc Rogalski le signale très justement, l'utilisation d'une procédure purement intégrale s'impose lorsque le problème à traiter est vraiment de dimension au moins 2 (c'est-à-dire qu'il ne peut se ramener à un problème de dimension 1). Mais il y a assez peu d'exemples [43] simples de cette situation et la procédure primitive est tout à fait suffisante au niveau terminale.

Références

[1] Archimède, *Œuvres complètes*, traduction de P. Ver Eecke, Librairie A. Blanchard, Paris (1960).

[2] Belhoste Bruno, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, 1789-1914*, INRP, 1995.

[3] Bourbaki Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1969.

43. L'exemple le plus convaincant où il y a vraiment besoin d'une procédure intégrale est celui du calcul de l'aire d'une surface courbe – la sphère tout simplement – qui ne se ramène pas facilement à la dimension un. Mais, si l'on a lu Archimède dans le texte, on sait bien que le calcul de l'aire de la sphère est vraiment difficile. C'est l'un des cas où il reste hors de portée d'un élève de terminale.

[4] Cabeza-Orcel Paloma et Léauva Daëna, *Étude de la quadrature de la spirale d'Archimède*, projet de géométrie, Master 1, Orsay, 2011.
https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Daena-Paloma.pdf

[5] Daubelcour Jean-Pierre, *Calcul d'aires et calcul intégral en TS : un essai pédagogique*, Repères IREM 31, 1998.

[6] Daubelcour Jean-Pierre, *Evolution des programmes d'analyse et de géométrie au XX ème siècle en terminale scientifique*,
http://home.nordnet.fr/~rdassonval/textes.html

[7] Dupuy-Touzet Sophie et Lopez Pierre. *Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aires ... mais il doit le devenir*. Bull. APMEP numéro 463, 2006.

[8] Lazet Daniel, Ovaert Jean-Louis, *Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'analyse*, Bulletin inter-IREM N° XX, 1981, p 3-8.

[9] Lebesgue Henri, *La mesure des grandeurs*, Librairie A. Blanchard, 1975.

[10] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2005, 2011.

[11] Perrin Daniel, *Aires et volumes : découpage et recollement*, Conférence du 12 mai 2006 pour les IPR :
http://euler.ac-versailles.fr/

[12] Perrin Daniel, *Archimède et la quadrature de la parabole ou les cinq sources du tiers*, Conférence, IREM de Paris 7, 2012.
https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/ArchimedeIREM.pdf

[13] Perrin Daniel, *Calcul de grandeurs physiques*, Cours M1, Orsay, 2012.
https://www.math.u-psud.fr/~perrin/interdisciplines/Cours2grandeurs.pdf

[14] Perrin Daniel, *Primitives et intégrales*, polycopié CAPES, 2014.
https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES.html

[15] Perrin Daniel, *Remarques sur l'enseignement des probabilités et de la statistique au lycée*, Statistique et enseignement n° 15 (2015).
http://www.publications-sfds.fr/index.php/StatEns/article/view/427

[16] Perrin Daniel, *Une variante de la formule de Stirling*.
https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/Suites/Stirling.pdf

[17] Perrin Daniel, *Compléments d'intégration*, polycopié PCST, M 154, 2009.
https://www.math.u-psud.fr/~perrin/enseignement/integrationpremiercycle.pdf

[18] Queysanne Michel et Revuz André, *Mathématique, Terminales CDE, tome II Analyse*, Nathan, 1971.

[19] Rogalski Marc (et al.) *Carrefours entre Analyse, Algèbre, Géométrie*, Ellipses, 2001.

9 Extraits de manuels

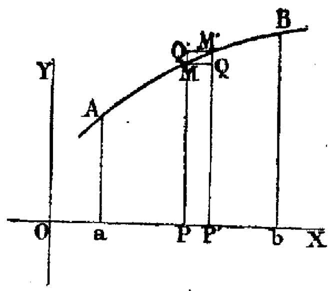
Le manuel du frère Georges Marie

496. Théorème. *Soit* $y = f(x)$ *une fonction de* x *qui reste finie et continue, lorsque* x *varie de* a *à* b ; *il y a toujours une fonction finie et continue de* x *qui admet* $f(x)$ *pour dérivée dans tout le même intervalle* a *à* b.

Soit AMB l'arc de courbe représentant la fonction donnée $f(x)$,

DÉRIVÉE DE L'AIRE D'UNE COURBE 397

lorsque x croît de a à b ; soient $OP = x$ une valeur de x comprise entre $Oa = a$, $Ob = b$ et $PM = y$ la valeur correspondante de la fonction.



L'aire $AaPM = S$ est une fonction de x, car si l'on donne à x l'accroissement $PP' = h$, cette aire varie avec x ; elle s'accroît, par exemple, de l'aire MPP'M'.

L'accroissement de cette aire est compris entre les rectangles MPP'Q et M'P'PQ', c'est-à-dire est compris entre les produits

$$MP.PP' \text{ et } M'P'.PP'.$$

On a donc : $\quad MP.PP' < \text{aire } MPP'M' < M'P'.PP',$

ou
$$MP < \frac{\text{aire } MPP'M'}{PP'} < M'P'.$$

Les côtés MP et M'P' de ces rectangles restent finis par hypothèse, puisque ce sont les ordonnées de la courbe ; si l'on fait tendre h vers zéro, la dimension commune PP' de ces rectangles tend vers zéro ; l'accroissement d'aire tend donc aussi vers zéro avec h.

La limite du rapport $\dfrac{\text{aire } MPP'M'}{PP'}$ est donc égale à MP, c'est-à-dire à $f(x)$; d'ailleurs, la limite de ce rapport est aussi égale à la dérivée de la fonction S par rapport à x ; on a donc pour chaque valeur de x
$$S' = f(x).$$

La surface $AaPM = S$ est donc une fonction de x admettant pour dérivée la fonction $f(x)$.

Extraits du manuel de Brachet et Dumarqué *Précis d'algèbre* (1930)
La notion de limite :

§ 3. — LIMITES D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

145. — Nous allons préciser, par des définitions, les notions déjà acquises dans le cours de Première.

Soit y une fonction de la variable x.

I. La variable tend vers une valeur finie.

1° *Dire qu'une fonction y a pour limite* L *quand x tend vers a,* c'est dire que la différence $|y - \mathrm{L}|$ est inférieure à un nombre donné ε aussi petit que l'on veut, dès que la différence $x - a$ devient suffisamment petite en valeur absolue.

Étant donné ε, on peut trouver un nombre α assez petit pour que l'inégalité $|x - a| < \alpha$ entraîne $|y - \mathrm{L}| < \varepsilon$.

2° *Dire que y croît indéfiniment par valeurs positives* quand x tend vers a, c'est dire que si grand que soit donné un nombre positif **A**, on peut trouver un nombre α assez petit pour que l'inégalité $|x - a| < \alpha$ entraîne $y > \mathrm{A}$.

Un exercice de baccalauréat :

429. Les équations de deux paraboles rapportées à deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ sont $y^2 = ax$, $x^2 = by$, où a est l'abscisse et b l'ordonnée d'un point C du plan. On demande :

1° De calculer en fonction de a et b les coordonnées du second point d'intersection D des deux paraboles, le coefficient angulaire de la droite CD et de démontrer que l'angle CDO est droit;

2° D'évaluer en fonction de a et b l'aire de la portion du plan situé à l'intérieur des deux paraboles. Lieu décrit par les points C et D quand a et b varient de telle sorte que cette aire reste constante.

(Bacc. Grenoble.)

Le calcul des volumes :

§ 3. — APPLICATION AU CALCUL DE CERTAINS VOLUMES

479. Considérons un solide et coupons-le par des plans perpendiculaires à un axe Ox. Désignons par $V_a^{x_0}$ le volume compris entre un plan fixe d'abscisse a et le plan d'abscisse x_0; ce volume est une fonction de x_0.

L'aire de la section par le plan d'abscisse x_0 est une fonction de x, que nous supposerons connue et continue.

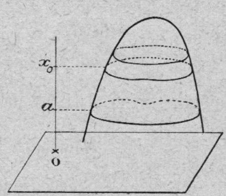


FIG. 72.

Quand on donne à x un accroissement Δx, le volume prend un accroissement ΔV dont la valeur absolue est le volume de la tranche d'épaisseur Δx comprise entre les deux plans d'abscisses x_0 et $x_0 + \Delta x$; soit C_0 et C les sections, d'aires S_0 et $S_0 + \Delta S$, déterminées par ces deux plans. Remarquons que Δx et ΔV sont de même signe; supposons-les positifs pour fixer les idées.

Si la section C se projette tout entière à l'intérieur de la section C_0; le cylindre parallèle à Ox, ayant pour base C et compris entre les deux plans de section, est complètement intérieur au cylindre analogue ayant pour base C_0; par suite, le volume ΔV de la tranche est compris entre les volumes $S_0 \times \Delta x$ et $(S_0 + \Delta S) \times \Delta x$ de ces cylindres :

$$S_0 \times \Delta x < \Delta V < (S_0 + \Delta x) \times \Delta V$$

d'où

$$S_0 < \Delta V < S_0 + \Delta x.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, il en est de même de ΔS (continuité), et $\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$ a pour limite S_0.

En d'autres termes, le volume V_a^x, considéré comme fonction de x, a pour dérivée l'aire $S(x)$ de la section; c'est donc une primitive de la fonction $S(x)$.

En désignant par $F(x)$ une primitive quelconque de $S(x)$, un raisonnement pareil à celui qui a été fait au n° 472 montre que la portion du solide, comprise entre les plans parallèles d'abscisses a et b $(b > a)$ a pour expression

$$V_a^b = F(b) - F(a).$$

§ 3 Calcul intégral 1947

(document 3) Extraits du manuel "Lespinard et Pernet". Les auteurs donnent au § 336, non reproduit ici, une définition classique de la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle E, puis démontrent que si F est une primitive de f alors celle-ci en admet une infinité définie par G(x) = F(x)+C. Puis ensuite le tableau des primitives des fonctions usuelles au §337 est suivi de l'application des primitives au calcul d'aires au § 338. Nous portons notre attention sur ce concept qui sera suivi tout au long du siècle.

Le paragraphe 338 commence ainsi : ***"Soit y = f(x) une fonction définie et continue dans l'intervalle E et dont nous connaissons une primitive continue F(x). Nous désignerons par (C) la courbe représentative de la fonction dans l'intervalle (a,b)".***

sentative en A et B, l'axe Ox en α et β. Proposons-nous de calculer l'aire comprise entre l'arc de courbe, Ox et les deux droites αA, βB.

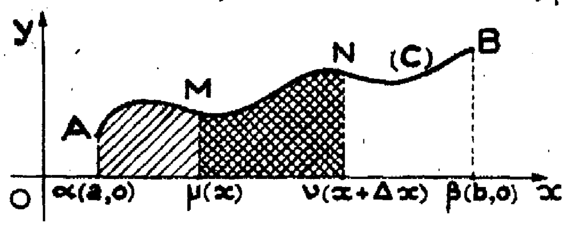


Fig. 112

Soit x une valeur de la variable comprise dans l'intervalle, à laquelle correspond le point M de la courbe, projeté en μ sur Ox. A chaque valeur de x correspond une aire pour le trapèze mixtiligne $\alpha AM\mu$ (nous l'appelons mixtiligne car l'un des côtés du trapèze est remplacé par l'arc de courbe (C) : AM). Cette aire est une fonction croissante de x. Représentons-la par S(x). Cherchons si cette fonction admet une dérivée. Désignons maintenant par x_0 l'abscisse fixe du point M et donnons à x l'accroissement Δx. Soit N le point correspondant sur la courbe, projeté en ν sur l'axe Ox. L'accroissement correspondant de la fonction S(x), représenté par ΔS, a pour " valeur absolue " l'aire du trapèze mixtiligne $\mu MN\nu$ représenté séparément sur la figure 113 (il ne faut pas oublier que Δx étant un nombre algébrique, ΔS est aussi un nombre algébrique).

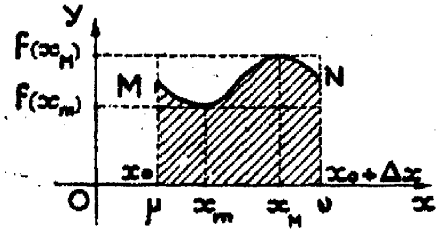


Fig. 113

La fonction étant continue dans l'intervalle (x_0, x_0 + Δx) passe nécessairement par un minimum absolu d'abscisse x_m, d'ordonnée (fx_m) et un maximum absolu d'abscisse , d'ordonnée $f(x_M)$ [x_m et x_M pouvant d'ailleurs être égaux à x_0 x_0 + Δx, comme le montre la figure 114].

Menons, par les points représentatifs du maximum et du minimum, les parallèles à l'axe Ox rencontrant μM et νN et déterminant ainsi deux rectangles d'aires $f(x_m)\ |\Delta x|$ et $f(x_M)\ |\Delta x|$. Il est clair que :

$$f(x_m)\ |\Delta x| < |\Delta S| < f(x_M)\ |\Delta x|$$

En remarquant que $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} > 0$ (puisque $S(x)$ est une fonction croissante) il vient :

$$f(x_m) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x_M)$$

Quand $\Delta x \to 0$, $x_m \to x_0$, $x_M \to x_0$, et, comme $f(x)$ est continue, $f(x_m) \to f(x_0)$, $f(x_M) \to f(x_0)$,

par suite : $$\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x_0).$$

$S(x)$ admet donc, pour $x = x_0$, la dérivée $f(x_0)$ définie quel que soit x_0 dans l'intervalle (a, b), donc $S(x)$ admet $f(x)$ pour fonction dérivée. $S(x)$ est donc une primitive de $f(x)$.

D'où :

THÉORÈME : Si f(x) est une fonction continue et positive représentée par un arc de courbe (C) dans l'intervalle (a, b), l'aire comprise entre l'axe Ox, deux parallèles à Oy d'abscisses a et x, et l'arc de courbe correspondant à l'intervalle (a, x), est une fonction primitive de f(x).

Nous avons appelé $F(x)$ une primitive de $f(x)$ (§ 336). On peut donc écrire (§ 336) :

$$S(x) = F(x) + C \qquad (1)$$

Or, si $x = a$, l'aire est nulle, donc $S(a) = 0$, par suite :

$$0 = F(a) + C$$

qui détermine la valeur particulière de la constante C :

$$C = -F(a)$$

Portons dans (1), il vient :

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

En remplaçant x par b, nous obtenons l'aire du trapèze mixtiligne $AB\beta\alpha$:

$$\boxed{\text{Aire } AB\beta\alpha = F(b) - F(a)} \qquad (2)$$

REMARQUE 3. Là encore, l'évolution par rapport à 1902/1905 va dans le sens d'un **vocabulaire plus précis** et la recherche **d'une plus grande rigueur dans les démonstrations**.

a) Cette fois les qualités de f sur l'intervalle [a,b], continue et positive, sont précisées avec soin.

b) Dans la démonstration du "**Théorème fondamental**" du calcul intégral au § 338, la courbe représentative C_f de f joue un rôle déterminant car la fonction f n'est plus supposée monotone sur [a,b]. En premier lieu elle donne une représentation de l'aire et de ses propriétés, en second lieu elle facilite l'utilisation de la continuité de f qui se traduit par la

III Extraits d'un manuel des années 60.

§1 notion de limite (1962)

Document 1 Extraits de "Analyse, trigonométrie et cinématique" de la collection **Cagnac et Thiberge,** tous deux inspecteurs généraux,. On considère souvent ce manuel, publié en 1963 chez Masson éditeur, comme un ouvrage de référence s'adressant à de bons élèves.

CHAPITRE II

LIMITE D'UNE FONCTION RÉELLE D'UNE VARIABLE RÉELLE

DÉFINITIONS

17. *Limite d'une fonction lorsque x tend vers x_0.* — **1° Définition de l'expression « $f(x)$ a pour limite l lorsque x tend vers x_0.** — Soit f une fonction de la variable x définie sur l'intervalle $[a, b]$, sauf peut-être au point x_0 de cet intervalle. *Grosso modo*, on dit que $f(x)$ a pour limite l lorsque x tend vers x_0 si on peut rendre $f(x)$ aussi voisin que l'on veut de l en donnant à x des valeurs suffisamment rapprochées de x_0.

Cette définition peut paraître claire en elle-même. Sous cette forme cependant elle est inutilisable en Mathématiques. Remarquons d'abord que l'affirmation : «$f(x)$ a pour limite l lorsque x tend vers x_0» nécessite une démonstration. Pour bien comprendre le mécanisme de celle-ci, imaginons deux personnes A et B, A faisant la démonstration sous le contrôle de B. B imposera à A certaines conditions, A dira à B comment il y satisfait, et B vérifiera les résultats obtenus par A sans s'inquiéter de la façon dont ils ont été obtenus. A cet effet, B impose à A un nombre positif ε, et lui demande de choisir x assez voisin de x_0 pour que $|f(x) - l|$ soit inférieur à ε. De façon précise, B demande à A de lui fournir un nombre positif α tel que

(1) $|f(x) - l| < \varepsilon$ soit conséquence de (2) $0 < |x - x_0| < \alpha$.

La démonstration sera faite dès que, A ayant été capable de fournir à B un nombre positif α, quelque petit que soit le nombre positif ε imposé par B, B aura vérifié que le choix de α proposé en retour par A est correct, c'est-à-dire que l'inégalité (2) entraîne l'inégalité (1).

Examinons comment A peut satisfaire aux exigences de B.

a) A peut chercher à résoudre l'inéquation (1), et, ayant déterminé toutes ses solutions, regarder si, parmi elles, il peut en trouver qui constituent tout un intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, x_0 exclu ; (1) sera alors conséquence de (2).

EXEMPLE I. — Montrons que $f(x) = 4x - 3$ a pour limite 5 lorsque x tend vers 2 ; l'inéquation (1) s'écrit $|(4x - 3) - 5| < \varepsilon \iff -\varepsilon < 4(x - 2) < \varepsilon$,

ce qui est encore équivalent à $2 - \frac{\varepsilon}{4} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{4}$;

le nombre $\alpha = \frac{\varepsilon}{4}$ répond à la question posée.

DÉFINITION. — **Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf peut-être en un point x_0 qui n'est pas une borne de cet intervalle. On dit que $f(x)$ a pour limite l lorsque x tend vers x_0, si quel que soit le nombre positif ε** (arbitrairement petit) **on peut prouver l'existence d'un nombre positif α tel que l'inégalité**

(1) $0 < |x - x_0| < \alpha$ entraîne l'inégalité (2) $|f(x) - l| < \varepsilon$

On dit aussi, parfois, que $f(x)$ ***tend vers*** l lorsque x tend vers x_0. **On écrit**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \text{ si } x \longrightarrow x_0$$

§3 Calcul intégral (1962-1965)

document 3 (Cagnac et thiberge) : le théorème fondamental du calcul intégral.

132. Extension du résultat précédent au cas d'une fonction quelconque. — Soit maintenant L la ligne représentative, en axes rectangulaires, d'une fonction f définie, continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Soit x un nombre de cet intervalle. Marquons sur L (fig. 69) les points A et M, d'abscisses a et x, qui se projettent en A′ et M′ sur Ox. Les segments de droite A′M′, A′A, M′M [1], et l'arc AM de la ligne L limitent une surface appelée *trapèze mixtiligne* ; son aire [2] est un nombre qui dépend de x, et que nous noterons $S(x)$; nous avons ainsi

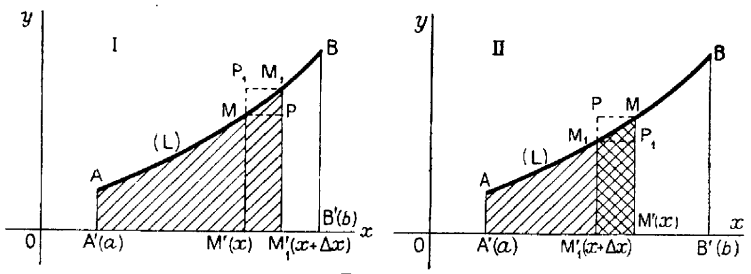


FIG. 69.

défini une fonction S de la variable x. Nous allons démontrer que S est une primitive de la fonction f.

1° *Supposons d'abord que la fonction f soit croissante* sur l'intervalle $[a, b]$. Donnons à x un accroissement Δx, et soit ΔS l'accroissement correspondant de $S(x)$. Soit M'_1 et M_1 les points de Ox et de L qui ont pour abscisse $x + \Delta x$, P la projection orthogonale de M sur M'_1M_1 et P_1 celle de M_1 sur M′M. Si Δx est positif, ΔS est l'aire du trapèze mixtiligne $M'M'_1M_1M$; cette aire est supérieure à celle du rectangle $M'M'_1PM$, de base Δx et de hauteur $f(x)$ (fig. 69, I) et inférieure à celle du rectangle $M'M'_1M_1P_1$ de base Δx et de hauteur $M'_1M_1 = f(x + \Delta x)$. On peut donc écrire l'inégalité $\Delta x . f(x) < \Delta S < \Delta x . f(x + \Delta x)$, ou, puisque $\Delta x > 0$

$$(1) \qquad f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x + \Delta x).$$

Si Δx est négatif, l'accroissement ΔS est en fait une *diminution ;* ΔS est un nombre négatif dont la valeur absolue $| - \Delta S |$ est encore l'aire du trapèze mixtiligne $M'_1M'MM_1$ (fig. 69, II) : cette aire est inférieure à celle du rectangle $M'_1M'MP$ de base $M'_1M' = |\Delta x| = -\Delta x$ et de hauteur $f(x)$, et supérieure à celle du rectangle $M'_1M'P_1M_1$ de même base et de hauteur $f(x + \Delta x)$. On peut donc écrire l'inégalité $-\Delta x . f(x + \Delta x) < -\Delta S < -\Delta x . f(x)$. En divisant ses trois membres par le nombre positif $-\Delta x$, on obtient l'inégalité :

$$(2) \qquad f(x + \Delta x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x).$$

Si, x restant constant, Δx tend vers 0 par valeurs inférieures ou supérieures, $f(x + \Delta x)$ tend vers $f(x)$ *puisque la fonction f est continue.* Or, d'après (1) et (2), le quotient $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ reste compris entre $f(x)$, qui est constant, et $f(x + \Delta x)$, qui tend vers $f(x)$; il tend lui-même vers $f(x)$. La fonction S est donc dérivable et a pour dérivée f : c'est une primitive de f.

2° Si on avait supposé la fonction f décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, on aurait obtenu la double inégalité (1) dans l'hypothèse $\Delta x < 0$, la double inégalité (2) dans l'hypothèse $\Delta x > 0$, et on aurait été conduit au même résultat.

difficile des sommes de Darboux. Cette fois je choisis d'illustrer le calcul intégral par un développement suivi par le plus grand nombre de manuels.

-

Document 1 (Queysanne-Revuz) Fonctions en escalier

Dans la première section nous définissons et nous donnons des propriétés d'une **fonction intégrable au sens de Riemann sur un segment** *[a, b] à l'aide de* **fonctions en escalier** *définies sur [a , b] dont l'emploi est particulièrement adapté à cette étude. Les fonctions en escalier constituent l'outil à la fois* simple *et* précis *que nous utiliserons dans tout le chapitre aussi bien pour les questions théoriques que pour les applications pratiques.*
Dans la section II, on est conduit à la notion de **primitive** *d'une fonction. Les problèmes posés sont de deux sortes : problème d'*existence *d'une primitive d'une fonction sur un intervalle et problème de* calcul *de primitives comportant quelques techniques de calcul.*
La section III est réservée aux **applications pratiques du calcul intégral,** *qui sont nombreuses et que l'on rencontre particulièrement en Mécanique et en Physique.*

I. Intégrale au sens de Riemann d'une fonction sur un segment

. FONCTIONS EN ESCALIER

a) Définition.

Soit, par exemple, la fonction φ définie sur le segment [1 , 4] par :

$$\text{si } 1 < x < 2 \;,\quad \varphi(x) = 1$$
$$\text{si } 2 < x < 3 \;,\quad \varphi(x) = 0$$
$$\text{si } 3 < x < 4 \;,\quad \varphi(x) = -2$$
$$\varphi(1) = 1 \;,\quad \varphi(2) = 3 \;,\quad \varphi(3) = -1 \;,\quad \varphi(4) = -\frac{3}{2}.$$

Nous avons la représentation graphique de φ indiquée à la figure 1.

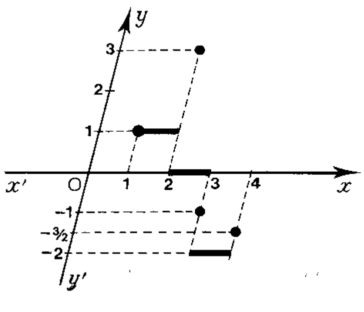


Fig. 1

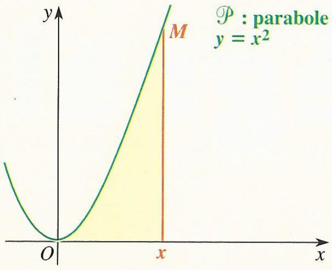
ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

1. OBJECTIF

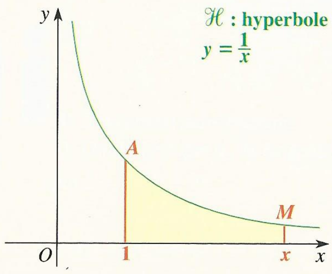
Relier les notions d'aires et de primitives d'une fonction :
- d'une part, c'est un support pour la compréhension des propriétés de l'intégrale ;
- d'autre part, le calcul d'aires – plus généralement le calcul de grandeurs – est du point de vue historique le problème moteur de l'intégration.

2. DEUX EXEMPLES DE CALCULS D'AIRES

Nous proposons, dans l'*Activité* 1, de calculer l'aire de chacun des domaines suivants[1] :



◄ FIG. 1



◄ FIG. 2

ACTIVITÉ 1

1 Avec la parabole

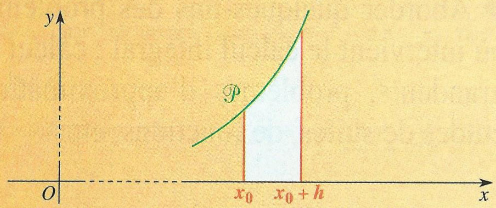
Pour tout $x \geqslant 0$, on désigne par $\mathcal{S}(x)$ l'aire du domaine limité par (Ox), la parabole $\mathcal{P}$ et la parallèle à (Oy) passant par le point M de $\mathcal{P}$ d'abscisse x.

A) Soit $x_0 \geqslant 0$ un réel fixé.

1) Pour $h > 0$ réel, établir que :

$$x_0^2 \leqslant \frac{\mathcal{S}(x_0+h)-\mathcal{S}(x_0)}{h} \leqslant (x_0+h)^2 \qquad (1).$$

Interpréter et encadrer l'aire du domaine ci-dessous :



2) Pour $h < 0$ (et tel que $x_0 + h \geqslant 0$), établir une inégalité analogue à (1).

Interpréter $\mathcal{S}(x_0) - \mathcal{S}(x_0+h)$.

3) Déduire de (1) que $\mathcal{S}$ est dérivable en x_0 et que :

$$\mathcal{S}'(x_0) = x_0^2 \ .$$

B) Prouver que $\mathcal{S}$ est la primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^2$, qui s'annule en 0.

En déduire que $\mathcal{S}(x) = \dfrac{x^3}{3}$ pour $x \geqslant 0$.

2 Avec l'hyperbole

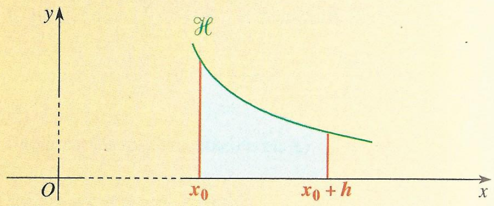
Pour tout réel $x \geqslant 1$, on désigne par $\mathcal{S}(x)$ l'aire du domaine limité par (Ox), l'hyperbole $\mathcal{H}$ et les parallèles à (Oy) passant par les points A et M de $\mathcal{H}$ d'abscisses 1 et x.

A) Soit $x_0 \geqslant 1$ un réel fixé.

1) Pour $h > 0$ réel, établir que :

$$\frac{1}{x_0+h} \leqslant \frac{\mathcal{S}(x_0+h)-\mathcal{S}(x_0)}{h} \leqslant \frac{1}{x_0} \qquad (1).$$

Interpréter et encadrer l'aire du domaine ci-dessous :



2) Pour $h < 0$ (et tel que $x_0 + h \geqslant 1$), établir une inégalité analogue à (**1**).

Interpréter $\mathcal{S}(x_0) - \mathcal{S}(x_0+h)$.

3) Déduire de (1) que $\mathcal{S}$ est dérivable en x_0 et que :

$$\mathcal{S}'(x_0) = \frac{1}{x_0} \ .$$

B) Prouver que $\mathcal{S}$ est la primitive sur $[1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, qui s'annule en 1.

En déduire que $\mathcal{S}(x) = \ln x$ pour $x \geqslant 1$.

(1) Les résultats obtenus à l'issue de cette activité furent l'objet de nombreux tâtonnements pendant quelques siècles, y compris de la part des mathématiciens les plus illustres. Il s'agit donc d'un raccourci saisissant de l'Histoire…

Figure 6 – Extraits du manuel de la collection Terracher

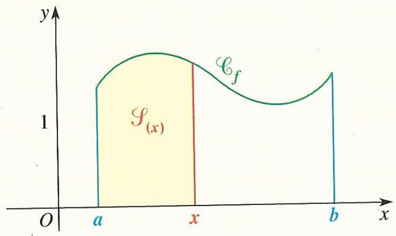
1. UN RÉSULTAT GÉNÉRAL

• Les deux exemples précédents ne sont pas des cas isolés. Bien au contraire, ils sont significatifs d'un résultat[1] dont la portée est générale.

Considérons une fonction f dérivable sur $[a, b]$, ne prenant que des valeurs positives ou nulles (rappel : *en abrégé* **$f \geqslant 0$ sur $[a, b]$**) *et définissons la* **fonction « aire »** $\mathcal{S}$ *sur $[a, b]$ de la manière suivante :*

pour $a \leqslant x \leqslant b$, $\mathcal{S}(x)$ est l'aire du domaine figuré ci-contre.

$\mathcal{S}$ est alors la **primitive de f** *sur $[a, b]$ qui s'annule en a.*



◄ FIG. 3

• L'*Activité* 2 investit dans quelques cas simples un tel résultat. Elle précise également que, dès qu'une *primitive quelconque* de f est connue (pas nécessairement celle qui s'annule en a), on peut procéder au calcul d'aire.

ACTIVITÉ 2

1 Peu importe la primitive

1) Soit F et G deux primitives de f. Montrer que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

« Deux primitives diffèrent… »

2) En déduire que l'aire du domaine limité par (Ox), la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est calculée par $F(b) - F(a)$, où F est une quelconque primitive de f.

2 L'arche du sinus

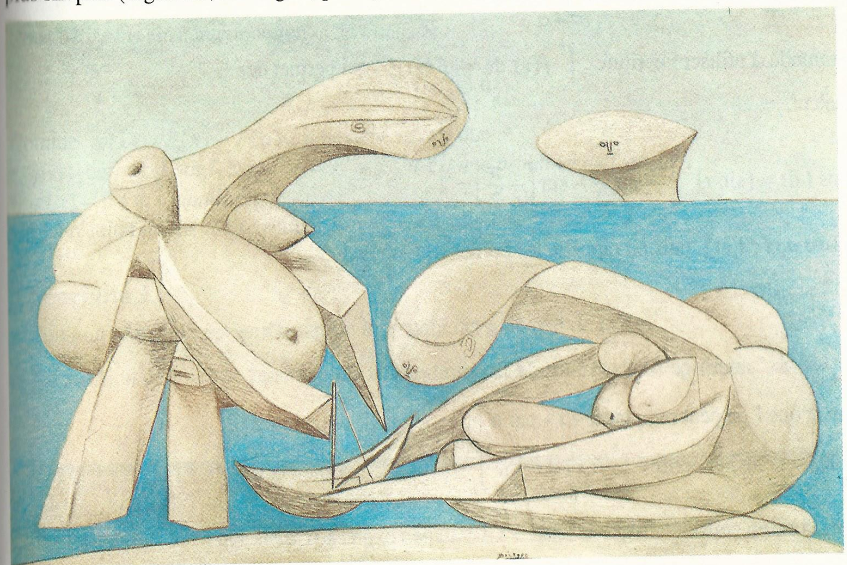
Calculer l'aire de l'arche limitée sur $[0, \pi]$ par l'axe (Ox) et la courbe représentative de $x \mapsto \sin x$.

3 Représenter le domaine $\mathscr{D}$, ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2} .$$

Montrer que l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $\frac{1}{2}$.

Décomposer une forme « réelle » en formes plus simples : c'est la grande idée du calcul intégral qui, pour « mesurer » des *objets* (lignes, surfaces, volumes), les approche par des *objets* plus simples (segments, rectangles, pavés) de mesure connue.



Figures sur la plage,
PICASSO (1937).

(1) Que nous admettrons.

COURS

Intégrale d'une fonction

I. DÉFINITIONS

Convention

Les fonctions admettant des primitives sur un intervalle sont la matière première de ce chapitre. Nous dirons qu'elles sont **intégrables** sur cet intervalle (« admettant des primitives » est trop long et « primitivable » serait un néologisme dissonant).
Notons dès maintenant une classe importante de fonctions intégrables : **les fonctions dérivables** (*cf. chapitre* 5).

Définition 1

Soit f une fonction **intégrable** sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre réel noté $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et défini par $F(b) - F(a)$, où F est une **primitive** *quelconque* de f sur I.

Cette définition est légitime : si F et G sont deux primitives de f sur I, elles diffèrent d'une constante et alors $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ (*cf. Activité* 2).

Notation et vocabulaire

- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **se lit** « somme (ou intégrale) de a à b de $f(t)\,\mathrm{d}t$ ».
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Dans les calculs, il est commode d'utiliser l'écriture $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$, qui permet de condenser la démarche de calcul.

Par exemple : $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\,.$$

(On écrit d'abord une primitive de f : $F(t)$, puis on rappelle les bornes : $[F(t)]_a^b$.)

La variable muette

L'examen de l'écriture $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ interroge sur la nature de la lettre « t » et du symbole « $\mathrm{d}t$ ». Nous dirons simplement que l'on peut remplacer « t » par n'importe quelle autre lettre ou symbole (a et b évidemment exclus) et écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ … au lieu et à la place de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. C'est donc en considérant que la lettre « t » était peu expressive dans

la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qu'elle fut appelée… *variable muette*.