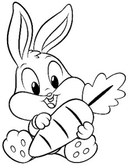
Invariants, relations et théorèmes

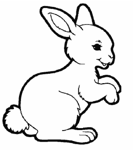
Daniel PERRIN

12 septembre 2014, en l'honneur de René Cori

Pour René, grand amateur d'anagrammes, une variante :

Le ROI CERNÉ





par le DERNIER LAPIN

Deux de mes préoccupations principales

- Comprendre les liens entre l'algèbre et la géométrie
- Réfléchir à l'enseignement de la géométrie

Pour des précisions : voir ma page web

Je ne vais qu'effleurer le sujet des invariants et des relations. Pour plus de détails voir :

`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/`

rubrique livre de géométrie projective, Partie II

(cette partie porte exclusivement sur le sujet des invariants et des relations mais ce thème est présent aussi dans les autres parties).

Mes sources d'inspiration principales sur le sujet : Leibniz, Cayley, Klein, Hilbert, Weyl, Mumford.

Introduction et premiers exemples

Mon point de départ, une citation de Bourbaki :

Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies" de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la géométrie "élémentaire". Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

Les invariants : qu'est-ce que c'est ?

Dans une géométrie, associée à un groupe, ce sont des quantités **invariantes** par le groupe. Par exemple :

- Dans le plan affine euclidien (avec le groupe des isométries), les deux invariants essentiels sont les **longueurs** et les **angles**, ou leur variante algébrique, le produit scalaire.

Les invariants : qu'est-ce que c'est ?

Dans une géométrie, associée à un groupe, ce sont des quantités **invariantes** par le groupe. Par exemple :

- Dans le plan affine euclidien (avec le groupe des isométries), les deux invariants essentiels sont les **longueurs** et les **angles**, ou leur variante algébrique, le produit scalaire.
- Dans le plan affine (avec le groupe affine) un invariant (relatif) associé à 3 points est l'**aire** du triangle ou sa variante algébrique, le crochet.

Les invariants : qu'est-ce que c'est ?

Dans une géométrie, associée à un groupe, ce sont des quantités **invariantes** par le groupe. Par exemple :

- Dans le plan affine euclidien (avec le groupe des isométries), les deux invariants essentiels sont les **longueurs** et les **angles**, ou leur variante algébrique, le produit scalaire.
- Dans le plan affine (avec le groupe affine) un invariant (relatif) associé à 3 points est l'**aire** du triangle ou sa variante algébrique, le crochet.
- Sur une droite projective, un invariant associé à 4 points est leur birapport.

Invariants, relations et théorèmes

Le principe qui sous-tend la phrase de Bourbaki :

Tout théorème d'une géométrie correspond à une relation (algébrique) entre des invariants (algébriques) du groupe associé.

C'est ce que nous allons tenter d'illustrer, voire de prouver. Commençons par deux exemples.

Théorèmes et relations, un exemple simple :

- Soit ABC un triangle et H un point du plan affine euclidien. On a la relation :

$$(\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{HC}) = 0.$$

Théorèmes et relations, un exemple simple :

- Soit ABC un triangle et H un point du plan affine euclidien. On a la relation :

$$(\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{HC}) = 0.$$

- C'est Chasles, plus la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

$$(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}|\overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}|\overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}|\overrightarrow{HC}) = 0.$$

Théorèmes et relations, un exemple simple :

- Soit ABC un triangle et H un point du plan affine euclidien. On a la relation :

$$(\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{HC}) = 0.$$

- C'est Chasles, plus la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

$$(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}|\overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}|\overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}|\overrightarrow{HC}) = 0.$$

- Interprétation géométrique : voir figure *hauteurs*.

Mon chouchou : le théorème des six birapports

- Définition du birapport de 4 points :

$$[\![a,b,c,d]\!] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

Mon chouchou : le théorème des six birapports

- Définition du birapport de 4 points :

$$[\![a, b, c, d]\!] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

- Pour 8 points a, b, c, d, p, q, r, s on a la relation :

$$[\![a, b, r, s]\!]\,[\![b, c, p, s]\!]\,[\![c, a, q, s]\!]\,[\![p, q, c, d]\!]\,[\![q, r, a, d]\!]\,[\![r, p, b, d]\!] = 1.$$

Enfin un théorème pas cher !

$$[\![a,b,r,s]\!]\,[\![b,c,p,s]\!]\,[\![c,a,q,s]\!]\,[\![p,q,c,d]\!]\,[\![q,r,a,d]\!]\,[\![r,p,b,d]\!] = 1.$$

$$\frac{r-a}{r-b} \times \frac{s-b}{s-a} \times \frac{p-b}{p-c} \times \frac{s-c}{s-b} \times \frac{q-c}{q-a} \times \frac{s-a}{s-c}$$

$$\times \frac{c-p}{c-q} \times \frac{d-q}{d-p} \times \frac{a-q}{a-r} \times \frac{d-r}{d-q} \times \frac{b-r}{b-p} \times \frac{d-p}{d-r} = 1$$

Interprétation géométrique : Les points $a, b, c, d \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel, donc, si cinq des quadruplets sont cocycliques ou alignés, le sixième aussi. Voir figures *pivot* et *Miquel*.

Les invariants de la géométrie projective plane

Géométrie et calcul : le rêve de Leibniz

Je croys qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique linéaire, qui exprime directement la situation [c'est-à-dire la position, les propriétés géométriques] *comme l'algèbre exprime la grandeur. ... Les calculs y sont de véritables représentations de la figure et donnent directement les constructions.*

Nous allons illustrer cette idée sur l'exemple de la géométrie **des points et des droites** du plan projectif.

Plan projectif et coordonnées homogènes

- Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps k (par exemple $\mathbf{R}$). En choisissant une base on a $E \simeq \mathbf{R}^3$ et on note $m = (x, y, t)$ ses éléments.

Plan projectif et coordonnées homogènes

- Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps k (par exemple $\mathbf{R}$). En choisissant une base on a $E \simeq \mathbf{R}^3$ et on note $m = (x, y, t)$ ses éléments.
- Le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ est le quotient de $E - \{0\}$ par la relation de colinéarité :

$$m \sim m' \Longleftrightarrow \exists \lambda \in k \quad m' = \lambda m$$

Plan projectif et coordonnées homogènes

- Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps k (par exemple $\mathbf{R}$). En choisissant une base on a $E \simeq \mathbf{R}^3$ et on note $m = (x, y, t)$ ses éléments.
- Le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ est le quotient de $E - \{0\}$ par la relation de colinéarité :

$$m \sim m' \iff \exists \lambda \in k \quad m' = \lambda m$$

- On dit que (x, y, t) est un système de coordonnées homogènes de $\overline{m}$, image de m dans $\mathbf{P}(E)$.

Plan projectif et coordonnées homogènes

- Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps k (par exemple $\mathbf{R}$). En choisissant une base on a $E \simeq \mathbf{R}^3$ et on note $m = (x, y, t)$ ses éléments.
- Le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ est le quotient de $E - \{0\}$ par la relation de colinéarité :

$$m \sim m' \iff \exists \lambda \in k \quad m' = \lambda m$$

- On dit que (x, y, t) est un système de coordonnées homogènes de $\overline{m}$, image de m dans $\mathbf{P}(E)$.
- On retrouve le plan affine comme l'ensemble des points $(x, y, 1)$, les autres points $(x, y, 0)$ (homogènes) constituent la droite à l'infini de $\mathbf{P}(E)$.

Les droites sont des points comme les autres

- Une droite projective a pour équation $ux + vy + wt = 0$ avec u, v, w non tous nuls (donc une forme linéaire non nulle).

Les droites sont des points comme les autres

- Une droite projective a pour équation $ux + vy + wt = 0$ avec u, v, w non tous nuls (donc une forme linéaire non nulle).
- Une droite admet ainsi un système de coordonnées homogènes $(u, v, w) \in E^*$: les droites projectives constituent le plan projectif dual $\mathbf{P}(E^*)$.

Les droites sont des points comme les autres

- Une droite projective a pour équation $ux + vy + wt = 0$ avec u, v, w non tous nuls (donc une forme linéaire non nulle).
- Une droite admet ainsi un système de coordonnées homogènes $(u, v, w) \in E^*$: les droites projectives constituent le plan projectif dual $\mathbf{P}(E^*)$.
- Le groupe associé à cette géométrie est le groupe des homographies $PSL(E) = PSL(3, \mathbf{R})$ induites par les matrices 3×3 de déterminant 1. C'est le groupe des bijections de $\mathbf{P}(E)$ qui transforment droite en droite.

L'interprétation des rêves

Dans le plan projectif on a donc deux types d'objets : des points a, b, c, etc. et des droites A, B, C, et entre eux des relations d'incidence.

Un calcul géométrique au sens de Leibniz doit comporter deux opérations :
• à deux points distincts a, b on associe la droite qui les joint : $a \wedge b$
• à deux droites distinctes A, B on associe leur point d'intersection $A \wedge B$.

Il doit aussi comporter des critères d'alignement de trois points $[a, b, c] = 0$ ou de concours de trois droites $[A, B, C] = 0$.

Réaliser ses rêves, c'est déterminant

Trois points a, b, c de coordonnées homogènes $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ et $c = (c_1, c_2, c_3)$, sont alignés s'il existe une droite $ux + vy + wt$ qui passe par ces trois points, donc si l'on a :

$$\begin{cases} ua_1 + va_2 + wa_3 = 0, \\ ub_1 + vb_2 + wb_3 = 0, \\ uc_1 + vc_2 + wc_3 = 0, \end{cases}$$

avec u, v, w non tous nuls et c'est équivalent à :

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

De même, le concours des droites d'équations f, g, h s'écrit $[f, g, h] = 0$.

Rêves en mineurs

Dire que la droite $ux + vy + wt = 0$ passe par a, b est donc équivalent à :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{pour tous } x, y, t.$$

L'équation de la droite (ab) est $a \wedge b = (u, v, w)$, avec

$$a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

De même, si f et g sont les équations de deux droites, leur point d'intersection est donné par $f \wedge g$ avec une formule analogue.

Un exemple de calcul

- Pour pouvoir utiliser les définitions qui précèdent, il faut être capable de calculer avec ces symboles, par exemple de déterminer le point m, intersection des droites (ab) et (cd) :

$$m = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d).$$

Un exemple de calcul

- Pour pouvoir utiliser les définitions qui précèdent, il faut être capable de calculer avec ces symboles, par exemple de déterminer le point m, intersection des droites (ab) et (cd) :

$$m = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d).$$

- Pour cela, on montre que les crochets et les produits extérieurs sont **invariants** par le groupe $SL(E)$.

Un exemple de calcul

- Pour pouvoir utiliser les définitions qui précèdent, il faut être capable de calculer avec ces symboles, par exemple de déterminer le point m, intersection des droites (ab) et (cd) :

$$m = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d).$$

- Pour cela, on montre que les crochets et les produits extérieurs sont **invariants** par le groupe $SL(E)$.
- Cela permet de prouver la relation de double produit $(*)$:

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = [a, c, d]\, b - [b, c, d]\, a = [a, b, d]\, c - [a, b, c]\, d.$$

Invariants et relations :

le méta-théorème

Les objets de la géométrie projective linéaire plane

Les objets d'étude sont les points et les droites de $\mathbf{P}(E)$, donc les $m+n$-uplets :

$$q = (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}\,; D_1, \dots, D_n) \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$$

définis par les vecteurs a_i et les formes linéaires δ_j. On désignera simplement sous le nom d'**objets** ces $m+n$-uplets dans ce qui suit et on les notera parfois $q = (a, \delta)$.

Propriétés projectives

- On appelle **propriété** d'un objet $(\overline{a}, D) \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$: on définit la propriété “en extension” comme l'ensemble des objets qui la vérifient.

Propriétés projectives

- On appelle **propriété** d'un objet $(\overline{a}, D) \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$: on définit la propriété "en extension" comme l'ensemble des objets qui la vérifient.
- On dit qu'une propriété est projective si elle vérifie deux conditions :
  • elle est invariante par $PSL(E)$ (autrement dit elle ne dépend pas du choix d'un repère),
  • elle est localement fermée au sens de Zariski (autrement dit, elle est définie par des équations polynomiales $h_i(q) = 0$ ou des inéquations polynomiales $f_j(q) \neq 0$).

Propriétés projectives : exemples

• Trois points sont alignés : c'est la condition $[a, b, c] = 0$ qui est conservée par $SL(E)$ et fermée.

• Trois droites sont concourantes : $[f, g, h] = 0$.

• Un point est sur une droite (condition $f(a) = 0$).

Un exemple de condition localement fermée : trois points sont distincts, mais alignés.

Théorèmes projectifs

Un **théorème de géométrie projective plane linéaire** associé à la donnée de points et de droites $\overline{a_i}, D_j$ est une assertion du type $(H) \Longrightarrow (C)$ dans laquelle :

1) les hypothèses (H) portent sur les données et sont des propriétés projectives (fermées, ouvertes ou localement fermées),
2) les conclusions (C) sont de la même forme, mais font intervenir les points et droites donnés ou construits.

Le Méta-théorème : les données

Soit $\mathcal{T}$ un théorème de géométrie projective plane (linéaire).

On note $q = (a, \delta)$ ses données (les a_i sont des vecteurs, les δ_j des formes linéaires), $a_{i,k}\,; \delta_{j,k}$ leurs coordonnées homogènes, R l'anneau de polynômes en les $a_{i,k}\,; \delta_{j,k}$ (vus comme des indéterminées) et S le sous-anneau des invariants sous $SL(E)$.

Le Méta-théorème : l'énoncé

On suppose qu'il existe des polynômes **invariants** h_i, f_j, et $c_{k,j}$ tels que :

- L'objet q vérifie les hypothèses de $\mathcal{T}$ si l'on a :
  a) $h_i(q) = 0$ pour tout i (condition fermée),
  b) il existe j tel que $f_j(q) \neq 0$ (condition ouverte),
- S'il existe j tel que q vérifie $c_{k,j}(q) = 0$ pour tout k, q vérifie les conclusions de $\mathcal{T}$.

Alors, le théorème $\mathcal{T}$ est vrai si et seulement si, pour tout j, il existe des **invariants** $b_{ijk} \in S$ tels que l'on ait les **relations** :

$$(*_j) \qquad \forall k, \quad f_j c_{k,j} = \sum_{i=1}^{r} h_i b_{ijk}.$$

Un exemple : le théorème de Desargues

On considère deux triangles abc *et* $a'b'c'$ *et on suppose que les droites* (aa'), (bb') *et* (cc') *sont concourantes. Alors, les points d'intersection* u, v, w *des côtés* (bc) *et* $(b'c')$, (ca) *et* $(c'a')$, (ab) *et* $(a'b')$ *sont alignés.*

Ce théorème résulte aussitôt de la relation suivante :

$$[u, v, w] = [(b \wedge c) \wedge (b' \wedge c'), (c \wedge a) \wedge (c' \wedge a'), (a \wedge b) \wedge (a' \wedge b')]$$

$$= [a, b, c]\,[a', b', c']\,[a \wedge a', b \wedge b', c \wedge c'].$$

La réciproque est vraie, pourvu que a, b, c et a', b', c' ne soient pas alignés. Voir figures *Desargues*.

Un autre exemple : le théorème de Pappus

Soient a, b, c (resp. a', b', c') des points distincts alignés sur D, D'. Les droites (bc') et $(b'c)$, (ca') et $(c'a)$, (ab') et $(a'b)$ se coupent respectivement en u, v, w. Alors, u, v, w sont alignés.

Le théorème (voir figure *Pappus*) découle de la relation :

$$[u, v, w] = [(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] =$$

$$[b', c', a][c', a', b][a', b', c][a, b, c] - [b, c, a'][c, a, b'][a, b, c'][a', b', c'].$$

Invariants et relations : les théorèmes fondamentaux

On connaît tous les invariants vectoriels

- On considère des vecteurs génériques $x_1, x_2, \dots, x_m$ (cela signifie que leurs coordonnées $x_{i,j}$, etc. sont des indéterminées). On note R l'anneau de polynômes en les $x_{i,j}$ à coefficients dans k.
  Le groupe $SL(E)$ opère sur l'anneau R *via* les matrices 3×3.

On connaît tous les invariants vectoriels

- On considère des vecteurs génériques $x_1, x_2, \dots, x_m$ (cela signifie que leurs coordonnées $x_{i,j}$, etc. sont des indéterminées). On note R l'anneau de polynômes en les $x_{i,j}$ à coefficients dans k.
  Le groupe $SL(E)$ opère sur l'anneau R *via* les matrices 3×3.
- Le sous-anneau S des polynômes de R invariants sous l'action de $SL(E)$ est engendré par les crochets $[x_i, x_j, x_k]$ avec $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

On connaît tous les invariants vectoriels

- On considère des vecteurs génériques $x_1, x_2, \dots, x_m$ (cela signifie que leurs coordonnées $x_{i,j}$, etc. sont des indéterminées). On note R l'anneau de polynômes en les $x_{i,j}$ à coefficients dans k.
  Le groupe $SL(E)$ opère sur l'anneau R *via* les matrices 3×3.
- Le sous-anneau S des polynômes de R invariants sous l'action de $SL(E)$ est engendré par les crochets $[x_i, x_j, x_k]$ avec $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$.
- Si l'on se donne m vecteurs $x_1, \dots, x_m$ et n formes $f_1, \dots, f_n$, le sous-anneau des invariants est engendré par les crochets de vecteurs $[x_i, x_j, x_k]$, les crochets de formes $[f_i, f_j, f_k]$ et les évaluations $f_i(x_j)$.

On connaît tous les invariants projectifs

Les invariants $[a, b, c]$ n'ont pas de sens géométrique (ils dépendent des coordonnées homogènes) mais ils permettent de construire des invariants projectifs.
Soient $a, b, c, d\,; x$ des vecteurs non nuls de E et $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$; $\overline{x}$ leurs images dans $\mathbf{P}(E)$. On a la formule :

$$[\![x; a, b, c, d]\!] := [\![(\overline{xa}), (\overline{xb}), (\overline{xc}), (\overline{xd})]\!] = \frac{[x, a, c] \times [x, b, d]}{[x, b, c] \times [x, a, d]}.$$

Les fractions rationnelles (géométriques) de m points du plan $\mathbf{P}(E)$, invariantes sous l'action de $PSL(E)$, sont les fractions rationnelles en les birapports $[\![x; a, b, c, d]\!]$ associés à 5 points x, a, b, c, d pris parmi les m.

On connaît toutes les relations

L'idéal des relations entre les invariants de $x_1, \dots, x_m$ est engendré par les éléments suivants :
1) Les relations d'alternance (triviales) du type $[a, a, b] = 0$, $[a, b, c] = [b, c, a]$ ou $[a, b, c] = -[b, a, c]$.
2) Les relations de la forme :

$$[b, c, d][a, x, y]-[a, c, d][b, x, y]+[a, b, d][c, x, y]-[a, b, c][d, x, y] = 0$$

(avec des coïncidences possibles entre les variables).

L'origine de la relation fondamentale

La relation :

$$[b,c,d][a,x,y]-[a,c,d][b,x,y]+[a,b,d][c,x,y]-[a,b,c][d,x,y]=0$$

provient de la relation de **dimension** qui exprime que si l'on a quatre vecteurs a,b,c,d de $\mathbf{R}^3$, ils sont dépendants :

$$[a,b,c]d=[b,c,d]a+[c,a,d]b+[a,b,d]c$$

en appliquant $[\bullet,x,y]$.

La relation de dimension est apparue dans la formule du double produit mais elle a aussi un sens plus familier...

Les relations sur 5 lettres

La relation fondamentale :

$$[b, c, d][a, x, y] - [a, c, d][b, x, y] + [a, b, d][c, x, y] - [a, b, c][d, x, y] = 0$$

donne, en faisant $x = d$, une relation sur 5 lettres :

$$[b, c, d][a, d, y] - [a, c, d][b, d, y] + [a, b, d][c, d, y] = 0$$

On peut écrire ces relations sous la forme normalisée suivante :

$$[e, a, b]\,[e, x, y] - [e, a, x]\,[e, b, y] + [e, a, y]\,[e, b, x] = 0.$$

Ces relations suffisent (presque) à engendrer toutes les autres.

Interprétation géométrique

de la relation sur cinq lettres

La relation sur cinq lettres, 1

Rappelons qu'on a la formule qui donne le birapport :

$$[\![x; a, b, c, d]\!] := [\![(\overline{xa}), (\overline{xb}), (\overline{xc}), (\overline{xd})]\!] = \frac{[x, a, c] \times [x, b, d]}{[x, b, c] \times [x, a, d]}.$$

de sorte que la relation sur 5 lettres :

$$[x, a, b][x, d, c] = [x, a, d][x, b, c] - [x, a, c][x, b, d]$$

s'interprète comme la formule de permutation du birapport “au milieu ” :

$$[\![x; a, c, b, d]\!] = 1 - [\![x; a, b, c, d]\!]$$

Relation sur cinq lettres et birapports

Soient $a, b, c, d; x, y \in E$ des vecteurs non nuls. On suppose que les points a, b, c, d sont **alignés** sur une droite D et que x et y sont des points de $\mathbf{P}(E)$ non situés sur D. On a l'égalité des birapports (figure *réfraction*) :

$$[\![x; a, b, c, d]\!] = [\![y; a, b, c, d]\!] \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$[x, a, c]\,[y, b, c] \quad [x, b, d]\,[y, a, d] = [x, b, c]\,[y, a, c] \quad [y, b, d]\,[x, a, d]$$

En effet, avec la relation sur 5 lettres on a :

$$[x, a, c]\,[y, b, c] - [x, b, c]\,[y, a, c] = [a, b, c]\,[x, y, c] = 0.$$

On a aussi la variante duale : "les perspectives (voir figure) conservent le birapport". Ces propriétés impliquent la plupart des théorèmes de géométrie projective, Pappus, Desargues, Newton, Céva, etc. Voir figures.

Être ou ne pas être sur une conique

Dans la formule précédente, a, b, c, d sont alignés. Il y a une variante plus générale. En effet, cinq points du plan sont toujours sur une conique, mais pas six en général. La relation :

$$[\![x; a, b, c, d]\!] = [\![y; a, b, c, d]\!] \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$[x, a, c]\,[x, b, d]\,[y, b, c]\,[y, a, d] = [y, a, c]\,[y, b, d]\,[x, b, c]\,[x, a, d]$$

est équivalente au fait que x, y, a, b, c, d sont sur une même conique (dégénérée si a, b, c, d sont alignés) (voir figure *conicité*).

Le théorème de Pascal

Dire que a, b, c, a', b', c' sont sur une même conique est donc équivalent à :

$$[a,b,c][a,b',c'][a',b',c][a',b,c'] - [a,b',c][a,b,c'][a',b,c][a',b',c'] = 0.$$

Mais, on a la relation, vue avec Pappus :

$$[(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] =$$

$$[b',c',a][c',a',b][a',b',c][a,b,c] - [b,c,a'][c,a,b'][a,b,c'][a',b',c'].$$

On en déduit que les points d'intersection de (bc') et $(b'c)$; (ca') et $(c'a)$; (ab') et $(a'b)$ sont alignés, c'est-à-dire le théorème de Pascal (voir figure).

J'ai des relations !

Comme une conique a pour équation :

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 + \delta x_2 x_3 + \epsilon x_3 x_1 + \eta x_1 x_2 = 0,$$

dire que les six points a, b, c, d, x, y sont sur une même conique signifie que le déterminant suivant est nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_2 y_3 & y_3 y_1 & y_1 y_2 \end{vmatrix}$$

On obtient ainsi 360 relations du type :

$$\Delta = [x,a,c]\,[x,b,d]\,[y,b,c]\,[y,a,d] - [y,a,c]\,[y,b,d]\,[x,b,c]\,[x,a,d]$$

Les invariants

et l'enseignement de la géométrie

La pertinence des invariants

Une conséquence de la détermination des invariants pour l'enseignement de la géométrie est la suivante : dans une géométrie donnée par un groupe, ce sont les invariants associés à ce groupe qui vont être pertinents pour prouver les résultats.

Ainsi, en géométrie **affine** plane, l'unique invariant, qui correspond au crochet, est **l'aire** qui permet de prouver tous les théorèmes de la géométrie affine (Thalès, Ménélaüs, le concours des médianes, etc.) notamment grâce au lemme du chevron, variante affine de la relation sur 5 lettres. Là-dessus, voir ma page web ou mon livre *Mathématiques d'école*.

Les autres géométries

Il y a bien sûr d'autres invariants dans les géométries métriques (essentiellement les produits scalaires et leurs avatars). Il y a mieux. Un groupe peut parfois apparaître sous deux habits différents. C'est le cas en géométrie anallagmatique (géométrie de l'inversion) avec l'isomorphisme $PGL(2, \mathbf{C}) \simeq PO^+(q)$, où q est une forme de Lorentz réelle à 4 variables.

La conséquence de cet isomorphisme c'est que cette géométrie possède les deux types d'invariants correspondant aux deux habits du groupe : l'invariant birapport (dont on a vu qu'il est lié à la cocyclicité) et l'invariant produit scalaire (lié aux propriétés d'orthogonalité et de contact des cercles et droites).

Les géométries riches

C'est ce qui explique la profusion des théorèmes de cette géométrie avec par exemple Miquel d'un côté et Feuerbach de l'autre : on a affaire à une géométrie **riche**. Ce type de phénomène n'existe qu'en petite dimension : ici, la généralisation est un appauvrissement.

Belles relations et beaux théorèmes

La phrase de Bourbaki semble établir un automatisme entre les relations (entre invariants) et les théorèmes. En allant un peu plus loin dans cette direction, on s'attendrait à ce que la qualité de la relation et celle du théorème soient liés, par exemple :

- que le théorème associé à une relation triviale soit trivial lui aussi,
- qu'au contraire, un théorème associé à une relation fondamentale (i.e. qui fait partie des générateurs minimaux de l'idéal) soit particulièrement important.

L'expérience montre que ce n'est pas aussi simple ...

BONUS

La géométrie affine

Applications en géométrie affine

On a vu que la géométrie affine du plan est la sous-géométrie de la géométrie projective obtenue par la donnée supplémentaire d'une droite (dite à l'infini) qui permet de définir le parallélisme. Les résultats précédents vont avoir des traductions immédiates dans ce cadre.

En dimension 1 on retrouve ainsi la relation de Chasles comme conséquence de la formule $[\![a, c, b, d]\!] = 1 - [\![a, b, c, d]\!]$ (avec $d = \infty$).

Dans le plan affine

L'invariant fondamental $[a, b, c]$ n'est autre que **l'aire orientée** $\mathcal{A}(abc)$ du triangle abc. On retrouve comme traduction des résultats sur les invariants nombre de théorèmes classiques sur les aires. Par exemple, la relation de dimension

$$[a, b, c]d = [b, c, d]a + [c, a, d]b + [a, b, d]c$$

s'interprète en termes de barycentres et on en déduit la formule d'additivité des aires :

$$\mathcal{A}(abc) = \mathcal{A}(bcd) + \mathcal{A}(cad) + \mathcal{A}(abd).$$

Dans le plan affine : le lemme du chevron

La relation sur 5 lettres

$$[a, a', b]\,[a, c, d] = [a, a', c]\,[a, b, d] - [a, a', d]\,[a, b, c]$$

(avec a, a', d alignés) donne le "lemme du chevron" :

Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan affine. On suppose que les droites (ad) et (bc) se coupent en a'. Alors on a l'égalité :

$$\frac{\mathcal{A}(adb)}{\mathcal{A}(adc)} = \frac{\mathcal{A}(aa'b)}{\mathcal{A}(aa'c)} = \frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}}.$$

Application : le concours des médianes d'un triangle.

Quelques autres anagrammes, pour la route ...

René Cori en Ricoré : une mise en boîte ?

Les titres auxquels vous avez échappé cette semaine

RENE CORI a RI ENCORE,

devant cette CONERRIE (?)

du PELERIN RADIN

Où l'on voit que René Cori soutient la géométrie

RENE CORI = CORNIERE

pièce utilisée pour renforcer les angles (et ils en ont bien besoin) !