Problèmes ouverts : pourquoi et comment ?

Daniel PERRIN

Ce texte est la rédaction d'une conférence donnée à l'IREM de Paris 7 le 4 novembre 2015. Il vise à expliciter mes positions sur cette question des problèmes ouverts, son lien avec l'expérimentation et les conséquences que j'en tire pour la formation des maîtres. Il fait suite à d'autres textes que j'ai écrits, notamment sur l'expérimentation, et que l'on trouvera sur ma page web : `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/conferences.html`

Deux remarques préliminaires. La première, c'est que ce texte est le reflet d'une opinion et d'une pratique : je vais dire **pourquoi** je pense qu'il est utile d'utiliser des problèmes ouverts dans notre enseignement et **comment** je procède pour aborder de tels problèmes ou les faire aborder par des élèves. C'est délibérément que je choisis de ne pas formaliser mes intuitions sur cette question. Pour un approfondissement côté didactique, voir par exemple [AGM], [Kosyvas], [Massola], [Sauter], etc. La seconde c'est que je n'aborde ici que des problèmes déjà mathématisés. Le travail de modélisation est très important, lui aussi, mais c'est une autre histoire. On pourra sur ce point consulter, toujours sur ma page web : `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Master.html` (il s'agit d'un cours intitulé *Mathématiques et autres disciplines*).

1 Pourquoi les problèmes ouverts

1.1 Une définition ?

Un premier point est de s'entendre sur ce que l'on appelle *Problèmes ouverts*. Les deux conditions que j'imposerai au départ sont les suivantes :

• On a une situation (mathématique) dans laquelle on se pose (ou on pose[1]) des questions, mais, où l'on ne connaît pas (ou on ne donne pas) les réponses.

• On ne connaît pas non plus (ou on n'indique pas) de méthode pour aborder le problème.

Bien entendu, dans la gestion de la recherche d'un tel problème avec une classe, on pourra éventuellement donner des indications supplémentaires par

1. Notamment dans une classe.

la suite.

1.2 L'état des lieux

C'est une idée absolument banale [2], de nos jours, d'utiliser des problèmes ouverts dans l'enseignement des mathématiques. Il suffit pour s'en convaincre de proposer *problèmes ouverts* comme requête à Google pour avoir des milliers de réponses [3]. Ce n'est pas non plus une idée nouvelle, puisqu'on trouve des recueils de problèmes ouverts dans l'histoire, par exemple les *Arithmétiques* de Diophante (vers 250), ou le livre de Bachet *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* (1612) et bien d'autres. Plus près de nous, l'IREM de Lyon a publié en 1983 un recueil passionnant intitulé *250 problèmes pour nos élèves* [4]. J'en cite les premiers mots : *Chercher des problèmes c'est se former. Cette idée semble faire aujourd'hui l'unanimité.* Déjà, pourrait-on dire. Parmi les ressources que l'on peut aussi considérer comme des problèmes ouverts, et dont certains sont utilisables dans des classes, citons les *Jeux mathématiques* d'E. Busser et G. Cohen (qui paraissent dans le journal *Le Monde*) ou le *Calendrier mathématique* édité par l'université de Strasbourg, le site *Culturemath*, `http://culturemath.ens.fr`, mais, là encore, il y en a bien [5] d'autres.

Soit, mais encore faut-il s'interroger, à côté du plaisir que de nombreuses personnes éprouvent à résoudre des petits problèmes, sur l'intérêt de cette activité pour l'apprentissage des mathématiques [6]. Cet intérêt semble en tous cas être reconnu par l'institution. Par exemple, le document d'accompagnement des programmes du primaire de 2002 préconise l'usage de tels problèmes. Voici comment il les décrit :

[Il s'agit] de véritables problèmes de recherche, pour lesquels [les élèves] ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problème qui est privilégiée, dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre

2. L'idée est banale, mais est-elle si souvent mise en œuvre ?

3. Depuis mon ordinateur, la plupart des réponses concernent les mathématiques, mais Google me connaît peut-être trop bien ...

4. Je ne sais pas à quels élèves ils pensent. De temps en temps il faut de drôlement bons élèves ...

5. Je signale une très belle conférence de J. Oesterlé : `http://www.esm22.fr/sciences-problemes-ouverts-maths.html`

6. Si l'on prend le mot problème en un sens très large, on peut y englober les mots croisés – j'en suis moi-même très friand – dont l'intérêt pour l'apprentissage proprement mathématique n'est pas clair.

des hypothèses et les tester, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter.

On trouve aussi des allusions à cette activité dans les projets de programmes (de collège) actuels, avec un vocabulaire voisin :

Identifier un problème, s'engager dans une démarche de résolution, mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter les erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.

1.3 Les justifications

1.3.1 Les mathématiques

Sur l'intérêt de cette utilisation de problèmes ouverts, je vais essentiellement expliciter mon opinion, qui n'est qu'une opinion et sans doute assez peu originale. Il faut bien partir d'une conception des mathématiques. Celle à laquelle je souscris est la suivante : *Faire des mathématiques, c'est poser et – si possible – résoudre des problèmes.*

On voit déjà que le mot *problèmes* y joue un rôle central et, de fait, ce point n'est guère discutable : les problèmes sont bien au centre de l'activité mathématique.

1.3.2 Le débat

Ce qui est plus délicat c'est de trancher l'éternel débat, s'agissant de notre enseignement, entre deux pôles. Dans l'un on mettrait les ingrédients nécessaires à une véritable activité mathématique digne de ce nom : la logique, la technique (notamment le calcul algébrique), la rigueur, dans l'autre, ceux qui en font le charme et le sel : le sens, l'utilité, le plaisir. Parmi les tenants du premier pôle, on trouve nombre de collègues de l'enseignement supérieur, qui déplorent la maladresse de nos étudiants face au moindre calcul algébrique et je partage largement leurs griefs. La difficulté est que pour atteindre à une dextérité de calcul, même modeste, on sait qu'il est nécessaire d'en faire beaucoup : l'entraînement est aussi nécessaire pour faire des mathématiques que pour pratiquer la musique ou jouer au football. Soit. Mais, à qui cette dextérité est-elle utile ? Indiscutablement à tous ceux qui utiliseront les mathématiques et d'abord aux scientifiques [7]. Pour eux, il faut bien en passer par là et le plus tôt est le mieux [8]. Mais il reste les autres, tous

7. Bien entendu, même pour les scientifiques, la technique ne suffit pas et avoir réfléchi sur des problèmes ouverts doit aussi faire partie de leur formation.

8. De ce point de vue, le remplacement de vraies séries scientifiques des lycées comme étaient les séries C par le fourre-tout qu'est devenue la série S est une catastrophe.

les autres : ceux qui n'utiliseront que très peu de notions de mathématiques et s'empresseront d'oublier [9] tout ce que l'on a tenté de leur apprendre et en particulier la technique qu'on aura essayé de faire entrer de force dans leurs têtes. Pire, ceux-là risquent de garder toute leur vie une rancœur contre cette discipline, vécue comme une perpétuelle contrainte. Voyez ce qu'en dit Victor Hugo [10] :

J'étais alors en proie à la mathématique
...
On me faisait de force ingurgiter l'algèbre :
On me tordait, depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y ;

Pourtant, comme le dit quelqu'un qui m'est proche [11], les mathématiques sont à l'opposé de cela :

Faire des mathématiques, ce n'est pas appliquer des règles, c'est se placer en position de liberté face à un problème.

Alors, que faut-il faire en mathématiques pour le citoyen lambda ? C'est une question difficile. Ainsi l'ancien ministre Luc Ferry se déclarait volontiers sceptique sur la nécessité d'enseigner les mathématiques à tous les élèves du collège et du lycée. Si l'on pense qu'elles sont indispensables à tous, il est donc nécessaire d'expliquer pourquoi.

1.3.3 L'apprentissage de la rationalité

Une réponse, essentielle, est qu'elles contribuent à la construction de la rationalité. Jean-Pierre Kahane [12] le résume très bien :

Elles [les mathématiques] *forcent à expliciter les évidences, à décomposer les difficultés, à enchaîner les résultats, à dénombrer tous les cas possibles : elles sont la logique cartésienne en action.*

C'est un point essentiel que l'étude de problèmes ouverts pourra renforcer, comme on le verra.

---

9. L'exemple de quelques-uns de nos ministres est révélateur, voir `http://www.youtube.com/watch?v=OOSLpAJ_8aw` ou
`http://www.youtube.com/watch?v=ulnLgYAM-0U` ou encore
`http://fluctuat.premiere.fr/Societe/News-Videos/Video-Valerie-Pecresse-est-nulle-en-maths-3240614`. Pourtant, comme l'aurait dit Fernand Raynaud à peu de choses près : *J'suis pas un imbécile, puisque j'suis ministre ...*

10. Dans le cas d'Hugo, cette animosité n'a peut-être pas beaucoup d'importance, mais lorsqu'il s'agit d'un décideur, c'est plus grave. Pensons à Claude Allègre, ou encore aux journalistes, toujours prêts à fustiger la dictature des maths.

11. Ne concluez pas trop vite ...

12. Dans l'introduction du rapport de la commission qu'il présidait, voir [K].

1.3.4 Mon expérience

Pour ma part, je n'ai jamais été autant convaincu de l'intérêt de l'apprentissage des mathématiques dans la vie courante que dans une circonstance particulière que je relate maintenant.

En septembre 1996 j'ai été tiré au sort pour être juré de cour d'assises. Ma première réaction a été d'être furieux de cette corvée. En effet, le moment était particulièrement mal adapté (c'était la rentrée du CAPES) et j'avais le sentiment de n'avoir aucune compétence pour faire ce travail, alors qu'il y a des magistrats dont c'est le métier. J'ai pourtant été obligé de le faire et j'ai donc participé à deux procès. Cette expérience m'a montré que ce système de jury populaire n'est pas si mauvais. En effet, j'ai constaté que les jurés prenaient leur tâche très à cœur (ce qui n'est pas toujours le cas des magistrats professionnels) et que la diversité de leurs origines amenait une réflexion souvent très intéressante.

En ce qui me concerne j'ai pu constater à plusieurs reprises que ma formation de mathématicien (et aussi celle de professeur, habitué depuis plus de 20 ans à critiquer les prestations d'élèves des préparations à l'agrégation ou au CAPES) m'a été d'une très grande utilité. En effet, l'habitude de discuter, en mathématiques, des relations de cause à effet, de la logique des affirmations, des enchaînements, de penser une situation de manière globale, m'a permis, à plusieurs reprises de poser des questions (notamment à des témoins, policiers, médecins, etc.) qui ont montré un certain nombre de défaillances de l'enquête ou ont pu préciser certains points. En particulier, dans l'une des affaires, la reconstitution précise de la chronologie n'avait pas vraiment été effectuée soigneusement. Dans l'autre, l'accusation s'appuyait sur une analyse médicale, dont les circonstances montraient clairement qu'elle ne pouvait avoir aucune valeur. Cette faculté de raisonnement a aussi été très utile dans les discussions qui se sont déroulées ensuite entre les jurés et les magistrats.

Bref, je me suis tout à coup senti une vocation de Sherlock Holmes ! D'ailleurs, et c'est un des compliments les plus flatteurs que l'on m'ait jamais fait, l'un des greffiers m'a dit, à la fin : *Ah, je n'aimerais pas être votre élève : vous ne laissez rien passer !*

1.3.5 Que faire ?

Cet exemple, et quelques autres, fondent ma conviction : faire des mathématiques est utile et formateur, et pour tous les citoyens. Mais, quelle part de l'activité que nous proposons aux élèves est-elle pertinente pour cet objectif ? Sans doute pas la technique au sens strict, ni la démonstration déductive avec des règles trop stéréotypées. En revanche, le fait de réfléchir sur un problème inconnu, pour lequel il n'y a pas de réponse toute faite, d'avoir des méthodes pour s'en emparer, de pouvoir proposer des hypothèses, de savoir que l'erreur est toujours possible mais qu'on peut apprendre à la surmonter, de contrôler ses résultats, voilà des activités qui vont peut-être pouvoir se transposer dans d'autres lieux et d'autres cadres. À mon sens, c'est en cela que les problèmes ouverts peuvent être utiles à tous.

1.3.6 Encore un argument

Il y a un dernier point qui me semble important pour notre enseignement. Parmi les difficultés essentielles que nous rencontrons, celle de l'apprentissage de l'algèbre n'est pas la moindre. La démarche qui consiste à utiliser des variables n'est pas toujours très naturelle. En ce sens, l'utilisation de problèmes ouverts (où justement rien n'est nommé *a priori*), peut permettre de montrer quelle puissance revêt cette désignation des objets en permettant de calculer avec eux sans les connaître. Un bel exemple en ce sens est le problème défi sur les aires que nous verrons plus loin.

1.3.7 Un bémol

Attention, je suis bien conscient des dérives que peut impliquer une telle position et d'abord celle de baptiser n'importe quoi problème ouvert. On commence à voir fleurir ce genre de choses dans les manuels [13]. Bref, pour dire les choses crûment, les questions abordées ne doivent pas être du pipi de chat.

1.3.8 Et la formation des maîtres ?

De ce côté, il me semble qu'il y a un gros déficit. En effet, l'enseignement supérieur ne fait pas la part belle aux problèmes ouverts (sans doute à cause de l'évaluation). Au contraire, la plupart des sujets posés aux étudiants le sont sous la sempiternelle forme *montrer que*, avec des questions découpées en tâches élémentaires. Il est donc nécessaire de montrer aux futurs maîtres qu'il peut y avoir une autre façon de faire des mathématiques. Dans l'organisation actuelle, cela peut notamment se faire au cours de l'année de M2.

13. Dans un domaine voisin, l'indigence des situations proposées pour introduire l'algorithmique est consternante.

2 Comment aborder les problèmes ouverts ?

2.1 Mon expérience

Ce qui fonde mon discours sur ce sujet c'est, avant tout, mon expérience de chercheur [14]. La procédure de recherche que je vais décrire ici et que je nomme expérimentale [15], c'est, de manière authentique, ce que je pratique depuis toujours. Sans doute, cette manière de procéder n'est-elle pas universelle. Probablement aussi beaucoup de collègues utilisent-ils ce type de pratiques sans les expliciter, voire sans se l'avouer. En tous cas, ce que je vais décrire, c'est ce que je fais [16]. J'ajoute qu'un point essentiel qui renforce cette pratique expérimentale est l'utilisation, de plus en plus active en ce qui me concerne, des logiciels, autrefois Macaulay et Cabri, maintenant *xcas* et GeoGebra.

En ce qui concerne l'utilisation des problèmes ouverts dans des classes, j'ai souvent abordé ce thème lors de conférences dans des collèges ou des lycées, en de multiples endroits (collèges de Boussy, Mennecy, Igny, Issy, Garges, Les Ulis, lycées de Genève, Janson de Sailly, etc.).

J'ai eu aussi l'occasion de développer mes positions devant des publics d'enseignants, notamment dans la conférence sur l'expérimentation que j'ai proposée à la Copirelem en 2006 et dont le succès m'a valu de la répéter un grand nombre de fois pour des régionales APM ou des IREM, à Paris, Besançon, Troyes (2), Orléans, Bourges, Bordeaux, etc. Sur un thème voisin, on consultera aussi ma conférence à Lille sur l'utilisation de Cabri. Toutes ces conférences sont disponibles sur ma page web.

Enfin, sur la formation des maîtres j'utilise ce genre de choses en M1, où il y a maintenant des dossiers sur les problèmes ouverts, dont certains liés à l'algorithmique, et en M2 dans un module *Culture mathématique* qui comprend des séances spécifiques sur les problèmes ouverts.

2.2 Quelques problèmes ouverts

Je vais détailler ici quelques uns des problèmes que j'utilise le plus souvent, soit avec des collégiens ou lycéens, soit avec des étudiants en formation des maîtres. D'autres apparaîtront de manière plus succincte et j'en ai beaucoup, beaucoup d'autres en réserve ...

---

14. On retrouvera beaucoup des idées exposées ici dans une conférence de 1999 intitulé *Les idées dans la recherche mathématique*, voir `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Debatsetcontroverses/Surlarecherche/Cergy-recherche.pdf`

15. Je préciserai ce que j'entends par là.

16. Avec quelques cautions illustres, comme on le verra.

2.2.1 Les aires égales

On considère un triangle ABC et un point M du plan. À quelle condition les aires des triangles AMB et AMC sont-elles égales ?

2.2.2 Les entiers consécutifs

Il y a plusieurs questions sur ce thème, par exemple :

• *Quels sont les nombres qui sont sommes de trois entiers positifs consécutifs ?*

• *Plus généralement, quels sont les nombres qui sont sommes d'un nombre $n \geq 2$ fixé d'entiers positifs consécutifs ?*

• *Plus généralement encore, quels sont ceux qui sont sommes d'au moins deux entiers positifs consécutifs ?*

2.2.3 Le problème de Magali

Soit ABC un triangle rectangle en A, P un point de l'hypoténuse et M, N ses projetés orthogonaux sur $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Pour quelle position de P la longueur MN est-elle minimale ?

2.2.4 Le problème 119 (IREM de Lyon)

Soit ABC un triangle et M un point du plan, différent de B et C. On appelle P, Q les projetés orthogonaux de A sur (MB) et (MC) respectivement. On demande d'étudier la longueur PQ (a-t-elle un minimum, un maximum ?)

2.3 La méthode expérimentale

2.3.1 Une caution illustre

Dans tous ces problèmes, la première phase de la recherche est une phase d'exploration et d'expérience qui consiste à **observer** des **exemples**, des cas particuliers et, sur ces exemples, à **formuler** ce qu'on voit, puis à le **généraliser** et enfin à le **vérifier**, avant de le **démontrer**.

C'est l'un des moments les plus amusants de la recherche, l'un de ceux où l'on peut donner libre cours à son imagination et il ne faut pas craindre de dire des bêtises, voyez ce qu'en dit Alexandre Grothendieck, l'un des plus grands mathématiciens du XX-ème siècle (mort le 13 novembre 2014).

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au *début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".*

Pour ma part, je crois que j'ai toujours fonctionné de cette manière. Que je réfléchisse sur des problèmes liés à la recherche ou à l'enseignement, j'essaie toujours de formuler explicitement mes idées et je n'ai pas peur d'écrire sur ma feuille de papier le mot *conjecture* : ça me motive ! Bien sûr, la plupart des conjectures énoncées le matin ne survivent pas jusqu'au soir. Les puristes s'en offusqueront sans doute [17]. Ainsi, mon collègue R. Harthshorne se moque gentiment de moi à ce sujet en parlant de "conjectures à la Daniel". Mais, depuis que j'ai lu Grothendieck, je n'ai plus aucune honte à procéder ainsi.

2.3.2 Quels exemples regarder ?

Il s'agit donc, pour entrer dans un problème, d'étudier des exemples, des cas particuliers. Bien entendu, certains sont triviaux et ne méritent pas un examen approfondi. Ma doctrine, c'est qu'il est toujours intéressant de regarder **le premier exemple non trivial**, le premier que l'on ne comprend pas complètement. En fait, ce que l'on espère de l'exemple que l'on a choisi d'étudier, c'est qu'il soit un exemple **générique**, c'est-à-dire un exemple où les comportements observés vont s'étendre au cas général. Mais il arrive souvent que, même si l'exemple est non trivial, il soit cependant trop particulier, et qu'il induise une généralisation incorrecte. J'ai rencontré plusieurs exemples de ce type en recherche. Dans l'un d'eux, il y a quelques années, il a fallu revenir à la charge plusieurs fois, avec des exemples de plus en plus complexes, avant de comprendre vraiment ce qui se passait.

2.4 Étude des problèmes proposés

2.4.1 Les aires égales

En utilisant un logiciel de géométrie, on peut faire afficher les aires de AMB et AMC. On voit apparaître une droite passant par A, on réfute la hauteur et la bissectrice grâce au logiciel et la conjecture se dégage assez vite :

2.1 Conjecture. *Les aires de AMB et AMC sont égales si et seulement si M est sur la médiane de ABC issue de A.*

17. Voir les diatribes de R. Bkouche à propos du mot conjecture.

En imposant à M de varier sur la médiane, on vérifie effectivement que les aires sont égales.

2.4.2 Les entiers consécutifs

Dans les conférences aux collégiens, je commence toujours par poser la question des sommes de trois entiers consécutifs. Si l'on regarde les premiers exemples, $1+2+3=6$, $2+3+4=9$, $3+4+5=12$, etc. la conjecture se dégage sans peine : on obtient les multiples de 3 (à partir de 6). J'aime bien demander ensuite ce qui se passe avec n nombres, dans l'espoir, qui ne manque jamais de se réaliser, d'avoir la conjecture (à la Daniel) : on trouve les multiples de n, conjecture qui ne vit même pas ce que vivent les roses, puisqu'on a $1+2+3+4=10$, mais c'est l'occasion de discuter du rôle de l'erreur, voir plus loin. Si l'on est sérieux, le cas des sommes de deux nombres consécutifs, où l'on voit apparaître les nombres impairs, montre bien que les sommes de n nombres consécutifs ne sont pas nécessairement multiples de n. Je laisse au lecteur le soin de faire quelques expériences. Il trouvera que la conjecture solide c'est que les sommes de n entiers consécutifs vont de n en n. Ainsi, pour $n=6$, si l'on regarde l'exemple $3+4+5+6+7+8$ et le suivant : $4+5+6+7+8+9$, on voit qu'on remplace simplement le 3 par 9 qui est $3+6$. Si l'on dispose des notations algébriques, on voit que c'est général : si la somme est $p+(p+1)+(p+2)+\cdots+(p+n-1)$, la suivante, qui est $(p+1)+(p+2)+\cdots+(p+n-1)+(p+n)$, s'obtient en remplaçant p par $p+n$, ce qui augmente bien la somme de n.

Plus difficile est de dire quel est le résultat lorsqu'on prend tous les n possibles, mais l'expérience donne la conjecture de manière éclatante. Voici les entiers ≤ 40 obtenus. On a porté [18] en rouge les sommes de deux entiers consécutifs, en bleu les sommes de 3 (qui ne sont pas sommes de deux), en vert celles de 4, en orange celles de 5 et en jaune de 7. En noir et en gros apparaissent les entiers non obtenus. Il saute aux yeux qu'il s'agit des puissances de 2.

1 2 3 **4** 5 6 7 **8** 9 10 11 12 13 14 15 **16** 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 **32** 33 34 35 36 37 38 39 40

18. Dans une classe on colorie progressivement chaque type de somme.

On a donc produit une conjecture robuste :

Conjecture. *Tous les entiers, à l'exception des puissances de* 2*, sont sommes d'au moins deux entiers consécutifs.*

2.4.3 Le problème de Magali

Ce problème a été proposé par plusieurs auteurs, voir [AGM] ou [Sauter], et repris dans sa classe de cinquième par Magali Froger (cf. [Froger]). Dans une vraie classe, sans utilisation de logiciel de géométrie, la bonne conjecture n'est pas si évidente à se dégager : les élèves pensent d'abord au milieu de $[BC]$, puis à la bissectrice. Ces conjectures ne résistent pas à l'utilisation d'un logiciel (Magali utilisait Géoplan), avec lequel la conjecture émerge très vite :

Conjecture. *Le minimum de* MN *est atteint lorsque* P *est le projeté orthogonal de* A *sur* (BC)*.*

2.4.4 Le problème 119

La question du minimum est facile. On voit expérimentalement que PQ est nulle si M est sur (BC) et c'est évident, puisqu'alors (BM) et (CM) sont égales à (BC) donc P et Q confondus au pied de la hauteur issue de A. Inversement, si $PQ = 0$ on a $P = Q$, donc les droites (AP) et (AQ) sont égales, donc aussi les perpendiculaires (BM) et (CM) à ces droites par M, donc M est sur (BC).

Cette démonstration vous convainc ? Vous avez tort car il y a un autre cas. En effet, avant de parler des droites (AP) et (AQ), encore faut-il qu'elles existent, donc que l'on ait $P, Q \neq A$. Si $A = P = Q$ (ce qui n'est possible que si A est sur (BM) et (CM), donc égal à M), on a aussi $PQ = 0$. En résumé, on a $PQ = 0$ si et seulement si $M = A$ ou $M \in (BC)$ ($M \neq B, C$ bien entendu). *On a ici un bel exemple de la nécessité de la rigueur pour ne pas oublier* $M = A$*. On reviendra sur ce thème plus loin.*

Venons-en au maximum. L'expérience montre (et c'est un peu étonnant *a priori*) que PQ ne tend pas vers l'infini quand M s'éloigne. En fait c'est facile à comprendre car on a $PQ \leq AP + AQ$ par l'inégalité triangulaire, puis $AP \leq AB$ et $AQ \leq AC$ (ce sont les côtés de l'angle droit de triangles rectangles, donc plus petits que l'hypoténuse). On a donc $PQ \leq AB + AC$. On verra une meilleure majoration plus loin.

À partir du moment où l'on a vu que PQ reste borné, on subodore [19]

19. C'est presque évident avec la topologie. Attention tout de même aux points B, C car il n'est pas évident que le maximum ne soit pas atteint "en ces points".

qu'il doit y avoir un maximum. Ici l'expérience est décisive [20]. On voit qu'il semble y avoir un point (un seul, là encore c'est un peu étonnant) qui réalise le maximum. L'observation doit être précise et complète. En ce qui me concerne, j'ai vu rapidement que (PQ) était parallèle à (BC), mais à y regarder de plus près, on a mieux que cela : (PQ) est la droite des milieux de ABC.

2.4.5 Quelques autres exemples

La méthode d'investigation préconisée ici est valable dans une multitude de situations, avec quelques bémols. Voici encore quatre exemples.

• *On considère un triangle ABC et un point variable E de son cercle circonscrit. La droite (AE) coupe (BC) en D. Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit à BDE ?*

L'expérience avec GeoGebra montre aussitôt qu'il s'agit d'une droite passant par B. Pour une preuve, voir : `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/circonscrit.pdf`

• Le problème suivant m'a été posé par Olivier Girod. *On considère un cercle Γ de centre O, un point A du plan, et une longueur BC. Un point M décrit Γ et le point P est sur la médiatrice de $[AM]$, à la distance BC du milieu H de $[AM]$. Quel est le lieu de P quand M varie sur Γ ?*

L'expérience, si elle est menée de manière négligente, peut mener à conjecturer que le lieu de P (en rouge) est un cercle.

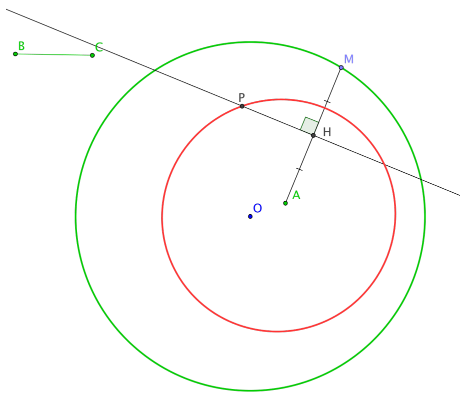


FIGURE 1 –

En fait, les choses sont plus compliquées. En effet, déplaçant le point A, on voit que le "cercle" lieu se déforme et qu'il devient une courbe avec des

20. C'est mieux de faire afficher 5 décimales au moins pour voir ce qui se passe.

creux et des rebroussements, voir Fig. 2. On note aussi qu'une droite coupe cette courbe en 4 points, ce qui permet de subodorer qu'on a affaire à une courbe algébrique de degré ≥ 4. Arrivé là, on sait que l'on ne pourra atteindre ce lieu que par le calcul : un des intérêts de l'expérience, parfois, c'est de se rendre compte que le problème est difficile ! Voir la solution en annexe 5.4.

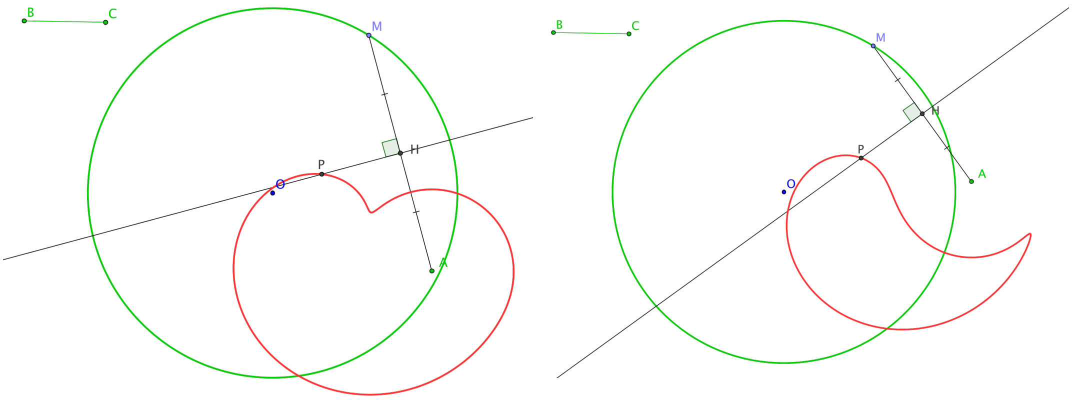


FIGURE 2 –

• *On considère la fonction f qui à un entier écrit en base 10, $n = a_r \times 10^r + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$, associe la somme des carrés de ses chiffres : $f(n) = a_r^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2$.*

On demande d'étudier les itérées de f

Ici, l'utilisation de *xcas* est décisive. En effet, quelques lignes de programme montrent que, selon le point de départ, les itérés de f ont deux destins :

– soit ils atteignent 1 et n'en bougent plus,

– soit ils atteignent 4 et décrivent le cycle $4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4$.

La preuve du résultat n'est plus qu'une question de technique. Voir la solution en annexe 5.5.

• *Un palindrome est un nombre écrit en base 10 qui ne change pas quand on le retourne, comme 2442. Lorsqu'un nombre n'est pas un palindrome, on peut obtenir un palindrome en lui ajoutant le nombre renversé : $125 + 521 = 646$. Mais cela ne marche pas s'il y a des retenues. Dans ce cas, on réitère. Exemple : à partir de 165 on obtient 726, 1353 et 4884. Cette procédure mène-t-elle toujours à un palindrome ?*

Ici encore, l'utilisation de *xcas* semble décisive, y compris dans des cas non triviaux. Par exemple, si l'on part de 98 on obtient le palindrome 8813200023188 au bout de 24 itérations. Malheureusement, il y a des nombres qui résistent [21] ! C'est le cas de 196 pour lequel nous [22] avons fait tourner le plus grand ordinateur du département de maths d'Orsay toute une nuit sans succès. Comme je le disais ci-dessus : un des intérêts de l'expérience, parfois, c'est de se rendre compte que le problème est difficile !

2.4.6 Les mathématiques c'est magique

J'emprunte le problème suivant au calendrier mathématique 2015 (21 janvier). Il s'agit de déterminer l'aire inconnue. Si l'on a bien [23] lu *Mathématiques d'école* on peut trouver une jolie preuve géométrique. Sinon, on a toujours la ressource de donner des noms aux quantités inconnues (longueurs et aires) et d'écrire des équations : les mathématiques, ça marche [24].

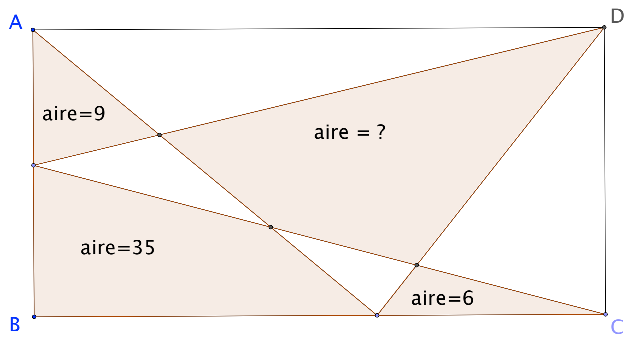


FIGURE 3 – Un problème défi sur les aires

2.5 Des preuves (1)

2.5.1 Aires égales

On peut facilement prouver la conjecture de la médiane : on considère le point d'intersection A' de (AM) et de (BC). Alors, le "lemme du chevron", lui-même conséquence du "lemme des proportions" (voir [ME] ou se

21. On les nomme nombres de Lychrel. Pour 196, *Wikipedia* affirme que l'itération a échoué même en allant jusqu'à 300 millions de chiffres.
22. Mon collègue Bernard Héron et moi.
23. Manifestement ce n'est pas mon cas ...
24. Dans notre série, faire des mathématiques c'est poser des problèmes, comment construire cette figure ?

souvenir de la formule $base \times hauteur/2$: de temps en temps, pour faire des mathématiques, il faut des outils) montre que l'on a $\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \dfrac{A'B}{A'C}$, de sorte que les aires sont égales si et seulement si le point A' est milieu de $[BC]$, donc si (AM) est la médiane issue de A.

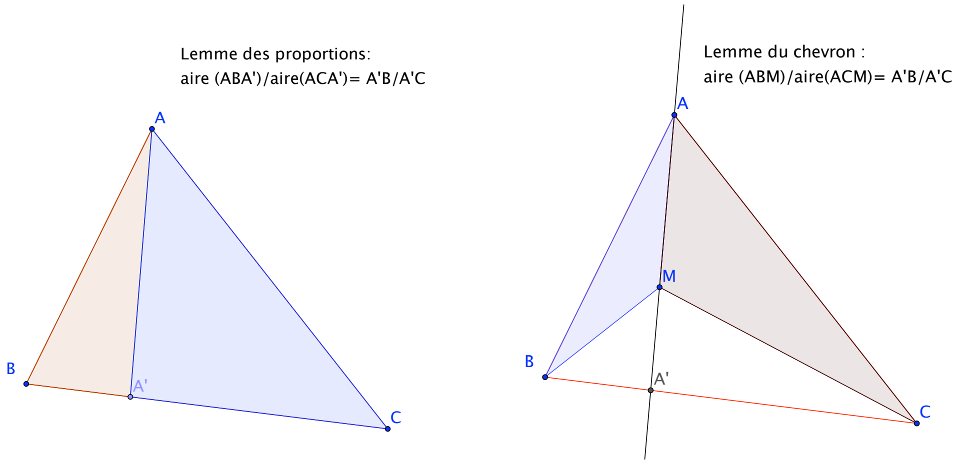


FIGURE 4 – Le lemme des proportions et le lemme du chevron

D'ailleurs, on peut donner une autre preuve de ce résultat (voir Fig. 5). Soient H et K les projetés orthogonaux de B et C sur (AM). Les droites (BH) et (CK) sont parallèles et, si les triangles ABM et ACM ont même aire, on a $BH = CK$ comme hauteurs de deux triangles de même aire ayant la même base AM. On en déduit que $BKCH$ est un parallélogramme. Ses diagonales $(HK) = (AM)$ et (BC) se coupent donc en leur milieu A' et on a le résultat.

Deux démonstrations du même résultat, c'est bien, non ? Pourtant, il y a un petit problème. Si l'on bouge un peu plus sérieusement le point M dans le plan, en lui permettant de s'extirper de l'angle en A, on s'aperçoit qu'il y a d'autres positions dans lesquelles les aires sont égales. En effet, si M est sur la parallèle à (BC) passant par A, on a aussi $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AMC)$ (c'est encore évident avec la formule $base \times hauteur/2$). Alors ?

2.5.2 Le rôle de l'erreur

Sur ce sujet de l'erreur et de la rigueur, mon expérience de chercheur, c'est qu'une preuve, réputée soigneuse, soi-disant rigoureuse, considérée comme telle par les experts, peut parfois ne pas l'être autant qu'on le croit. Une des

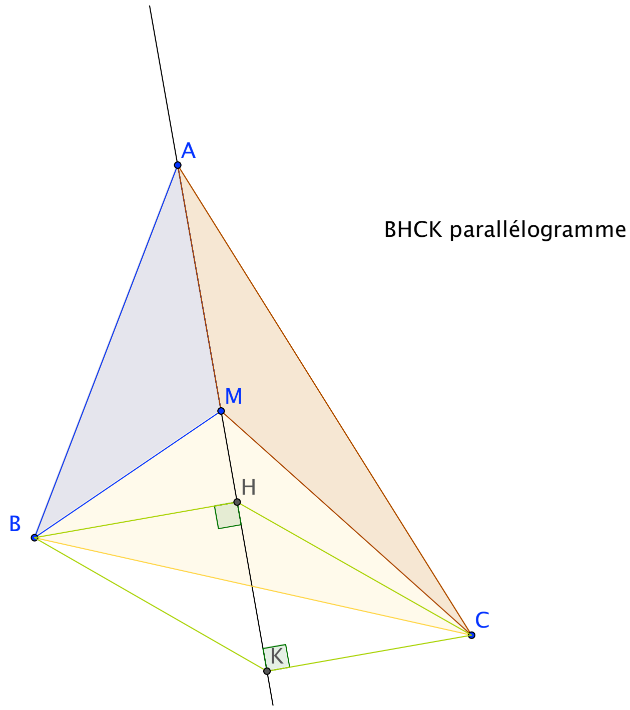


FIGURE 5 – Une autre preuve

raisons qui fait qu'une erreur peut intervenir tient à la volonté, souvent très forte, du chercheur de parvenir au résultat qu'il convoite. Il **veut** à tout prix prouver son théorème ! Cela peut le conduire à une attitude simplificatrice par rapport à la réalité. Il faut bien comprendre que cette volonté de simplifier est un puissant moteur de découverte, mais qu'elle crée un obstacle lorsque la situation se révèle vraiment plus complexe qu'on ne l'avait imaginé. J'ai une petite histoire instructive à raconter à ce sujet.

Il y a une vingtaine d'années, nous travaillions, Mireille Martin-Deschamps et moi-même, sur le schéma de Hilbert des courbes gauches de degré d et genre g (un objet, noté $H_{d,g}$, peu importe ce que signifie ce symbole) et nous avions cru prouver que $H_{d,g}$ n'était **"presque" jamais connexe**. La démonstration était écrite, soumise à une excellente revue, contrôlée par un rapporteur, acceptée, mais heureusement pas encore parue (voir [MDP1] et [MDP2]) ! Pourtant, en étudiant plus à fond un exemple précis, le premier exemple non trivial : $H_{4,0}$, nous avons montré qu'il était connexe, contrairement à ce que nous affirmions. Il nous a fallu quelques jours pour admettre notre erreur et quelque temps encore pour comprendre où était la faute dans la démonstration.

L'intérêt de cette erreur c'est qu'elle était révélatrice d'une conception erronée sur l'objet en question, fondée sur une connaissance trop fragmentaire des exemples. La preuve en est que, passant d'un extrême à l'autre, nous pensons maintenant que le schéma de Hilbert est **toujours** connexe.

Le lecteur mauvais coucheur pourra m'objecter que, si notre démonstration était fausse, c'est que nous n'avions pas été suffisamment rigoureux et il sera d'autant plus enclin à le faire, que, du haut de ses connaissances mathématiques, il aura décelé les entorses à la rigueur commises dans les pseudo-démonstrations ci-dessus. Certes, en théorie c'est vrai. Mais je lui rappellerai, avant qu'il ne me jette la première pierre, que d'autres ont été aussi confrontés à cette difficulté : lorsqu'on propose une preuve, en étant à son niveau de compétence (et pas cent coudées au-dessus, ce qui est souvent le cas en situation d'enseignement), il est bien difficile d'assurer que cette preuve est vraiment correcte. Ainsi les premières versions des démonstrations du théorème de Fermat par Andrew Wiles ou de la conjecture de Ramanujan par Laurent Lafforgue étaient toutes deux entachées d'erreurs, que leurs auteurs ont mis plusieurs mois à corriger.

Toujours pour le lecteur mauvais coucheur, je lui recommande de méditer le texte ci-dessus, dû à Poincaré :

Toute généralisation est une hypothèse [...] qui doit être soumise à la vérification. Il va sans dire que, si elle ne supporte pas cette épreuve, on doit l'abandonner sans arrière-pensée. C'est bien ce qu'on fait en général, mais quelquefois avec une certaine mauvaise humeur.

Eh bien, cette mauvaise humeur même n'est pas justifiée ; le physicien qui vient de renoncer à une de ses hypothèses devrait être, au contraire, plein de joie, car il vient de trouver une occasion inespérée de découverte.

Son hypothèse, j'imagine, n'avait pas été adoptée à la légère ; elle tenait compte de tous les facteurs connus qui semblaient pouvoir intervenir dans le phénomène. Si la vérification ne se fait pas, c'est qu'il y a quelque chose d'inattendu, d'extraordinaire ; c'est qu'on va trouver de l'inconnu et du nouveau.

Déceler une erreur dans une démonstration est un des moments les plus difficiles dans la vie d'un chercheur et je n'ai toujours pas acquis le détachement qui serait nécessaire pour vivre ce genre de moment avec sérénité. Avec l'expérience j'ai cependant appris quelques petites choses. D'abord, je me récite ce que dit à ce sujet A. Grothendieck :

Mais il arrive aussi que cette image [de la situation] *est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. ... Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse est souvent marqué par une tension croissante au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction, d'abord vague, puis de plus en plus criante jusqu'au moment* *où elle éclate avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense.*

Et il ajoute plus loin :

La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.

Il a raison, et l'exemple du schéma de Hilbert a bien montré comment la découverte de l'erreur est décisive pour remettre en cause une conception erronée, mais c'est dur à supporter tout de même ! Cependant, une des petites choses que j'ai apprises en trente années de recherche c'est :

2.2 Maxime. *Il ne faut pas jeter le bébé avec l'eau du bain.*

Cette maxime, que nul ne contestera, peut revêtir deux significations. La première, c'est que, lorsqu'on s'aperçoit qu'une démonstration est fausse, avant de se faire hara-kiri, on peut d'abord essayer de la réparer [25]. Ensuite, si vraiment la preuve est irréparable, ce qui est le cas si le résultat est faux, la découverte de l'erreur peut mener à une conjecture de remplacement, qu'il faudra ensuite prouver. D'une certaine façon, c'est ce que nous avons fait dans le problème des aires égales où la découverte de l'erreur contenait en germe le moyen de la surmonter. En effet, le lecteur montrera sans peine le résultat :

Les aires de AMB et AMC sont égales si et seulement si M est sur la médiane issue de A ou sur la parallèle à (BC) passant par A.

2.5.3 Et les "démonstrations" ?

Indiscutablement, l'expérience a montré que la conjecture de la médiane était fausse et donc aussi les deux démonstrations que nous en avions données. Mais, sous peine de ne plus accorder foi aux mathématiques, il reste à comprendre pourquoi.

• Dans le cas de la preuve avec le lemme du chevron, la raison est simple : quand on dit : *Soit A' le point d'intersection de (AM) et de (BC)*, on oublie de vérifier que ce droites ne sont pas parallèles. Or ici, elles peuvent l'être et justement le cas où elles le sont donne l'autre moitié du lieu. Cet exemple est le meilleur que je connaisse pour montrer à nos élèves la raison d'être de la rigueur qu'on leur impose souvent sans discussion : *si une preuve n'est pas rigoureuse, on court le risque qu'elle soit fausse et, pire, que le résultat annoncé soit faux.*

25. Je me souviens encore de la première fois où, jeune chercheur, je me suis aperçu qu'une de mes preuves était fausse. J'en ai été déprimé pour plusieurs semaines, jusqu'à ce que, en désespoir de cause, j'aille la soumettre à mon patron de thèse qui l'a réparée en quelques minutes !

• Et la preuve avec le parallélogramme ? Ici, les enseignants de collège connaissent bien la difficulté. Quand on dit : *Les droites* (BH) *et* (CK) *sont parallèles et on a* $BH = CK$ *donc* $BKCH$ *est un parallélogramme*, encore faut-il vérifier que le quadrilatère est convexe ce qui n'est pas le cas lorsque (AM) est parallèle à (BC) (ici c'est $BCKH$ qui est un parallélogramme).

En tous cas, tout cela mérite bien une maxime :

2.3 Maxime. *Deux expériences valent mieux qu'une démonstration fausse.*

2.6 Des preuves (2)

2.6.1 Les entiers consécutifs

Il y a plusieurs niveaux de preuve : des preuves avec une expérience générique (à l'école, voire au collège), des preuves algébriques (dès qu'on dispose des notations). Dans ce paragraphe je commence par donner les arguments des preuves. Nul doute qu'avec cela un mathématicien est capable de les écrire de manière formelle. Pour des élèves c'est sans doute une autre histoire, mais je pense qu'ici ce n'est pas l'essentiel.

Il s'agit d'abord de comprendre la nécessité de la condition : pourquoi une somme d'entiers consécutifs n'est-elle pas une puissance de 2 ? Pour cela, fidèle aux principes énoncés, on regarde un exemple, disons avec $n = 7$: $3+4+5+6+7+8+9 = 42$. On constate que c'est multiple de 7 : 7×6. C'est bizarre, car il y a bien 7 nombres, mais pas tous égaux à 6. Si on regarde on voit que 6 c'est le terme du milieu et, se souvenant du jeune Gauss [26], on comprend pourquoi : $5 + 7$ c'est deux fois 6, $4 + 8$ aussi, etc. car on ajoute à l'un ce qu'on retire à l'autre. On voit ainsi que si n est impair, la somme est n fois le terme central. Le nombre obtenu peut-il être une puissance de 2 ? Eh bien, non, puisque qu'il admet un facteur impair. Ici, la **formulation** joue un rôle essentiel : il faut exprimer le fait que n n'est pas une puissance de 2 comme : n admet un facteur impair [27].

Et si on a un nombre pair $n = 2k$ de termes ? Évidemment, le raisonnement précédent ne subsiste pas. Mais, regardons un exemple encore une fois : $3+4+5+6+7+8+9+10 = 52 = 4 \times 13$. Cette fois, on peut regrouper [28] les termes deux à deux : $6 + 7 = 13$, $5 + 8$ qui fait la même chose (puisqu'on ajoute à 7 ce qu'on enlève à 6), $4+9 = 3+10 = 13$: on obtient bien 4×13. En regroupant les termes deux à deux, à partir du milieu, on voit que la somme

26. De temps en temps, en mathématiques, il faut une idée. On n'est pas des imbéciles, tout de même !

27. J'ai presque envie de dire que cette reformulation de la conjecture est le point crucial de la preuve.

28. Des idées on n'en a pas beaucoup, alors quand on en a une, on l'exploite à fond.

est somme de k termes, tous égaux à la somme de deux entiers consécutifs, donc à un nombre impair. Là encore les sommes ont un facteur impair : ce ne sont donc pas des puissances de 2. Ici, nul besoin d'écriture formelle pour comprendre le phénomène : les deux exemples sont évidemment génériques !

Bien entendu, il reste à montrer que cette condition nécessaire est suffisante. Pour cela, on prend encore un exemple ! Considérons le nombre 116 (ce n'est pas une puissance de 2, c'est 4×29). Il s'agit de le trouver comme somme de nombres consécutifs. L'exemple ci-dessus indique comment faire : si on prend 8 nombres consécutifs, regroupés deux par deux, on a vu que la somme c'est quatre fois la somme des deux centraux. Il suffit donc d'avoir 29 au centre. Facile, c'est $14 + 15$ et on en déduit :

$$116 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18.$$

On a gagné ? Pas tout à fait encore, regardons un exemple voisin : $112 = 7 \times 16$. Si on essaie d'appliquer la méthode précédente, on doit écrire 7 comme somme de deux nombres consécutifs : $7 = 3 + 4$, puis écrire 16 fois cette somme en diminuant d'un côté et en augmentant de l'autre. Aïe, on tombe rapidement dans le vide si on diminue 3. Alors ? Alors on réfléchit et on regarde les exemples précédents. En fait, ce problème qu'on a avec 112, on l'a déjà avec $42 = 7 \times 6$. Pourtant, on a vu que 42 est atteint, comme somme de 7 nombres : $42 = 3+4+5+6+7+8+9$ et cet exemple donne la méthode : pour 112 il faut prendre la somme de 7 nombres consécutifs, celui du milieu étant égal à 16 : $112 = 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$.

Dans une classe, selon le niveau, on pourra se contenter de vérifier sur d'autres exemples que les élèves ont compris la méthode, ou demander une solution algébrique. D'ailleurs, de ce côté, une motivation supplémentaire pour ce type de techniques pourra être fournie en revenant à notre principe de base : *Faire des mathématiques c'est poser des problèmes et, si possible, les résoudre.* En effet, une question naturelle (et qui est apparue lorsqu'on a établi la liste des sommes parmi les 40 premiers entiers) est de savoir, lorsque le problème a une solution, s'il peut en avoir plusieurs et combien. C'est une question qui se traite très bien à partir des écritures algébriques, voir Annexe 5.1.

2.6.2 Le problème de Magali

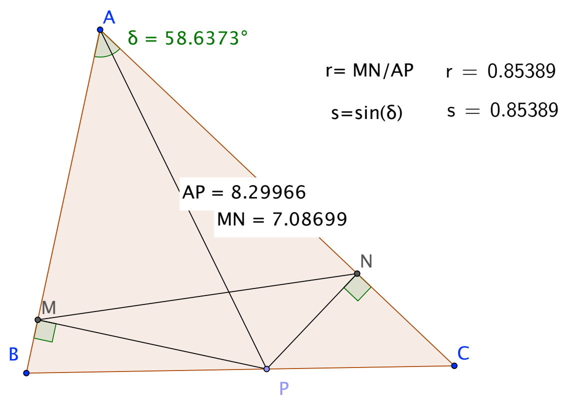
Ici, la preuve est bien facile : comme $AMPN$ est un rectangle, ses diagonales MN et AP sont égales et minimiser MN c'est minimiser AP. Mais, on sait bien que la distance AP, distance de A à un point de $[BC]$ est minimale lorsque P est le pied de la hauteur issue de A.

Soit, mais comme on vient de le redire, faire des mathématiques c'est poser des problèmes. En l'occurrence je me suis demandé [29] : et si le triangle ABC n'est pas rectangle ? L'expérience avec un logiciel montre que le minimum est encore atteint en le projeté H de A. Cette fois l'argument du rectangle tombe à l'eau car AP n'est plus égal à MN comme on le vérifie aussitôt avec Cabri. Cependant, on vérifie aussi expérimentalement que MN/AP est constant. Bien entendu, si l'on admet ce fait, on a le résultat, autrement dit, on a produit une conjecture intermédiaire décisive.

Il reste à comprendre pourquoi ce rapport est constant. Pour cela, on poursuit l'exploration en bougeant le point A, et on observe ce que devient le rapport. Bien entendu, il vaut 1 quand le triangle est rectangle et on constate que, sinon, il est toujours < 1 et d'autant plus petit que l'angle en A est petit (ou au contraire très obtus). Cela fait penser au sinus de l'angle. Si on affiche l'angle et son sinus, on constate effectivement qu'on a bien $\sin \widehat{A} = MN/AP$.

On obtient ainsi une deuxième conjecture intermédiaire décisive. On peut se demander en quoi celle-ci est meilleure que l'autre.

En effet, il peut sembler plus facile de prouver que MN/AP est constant quand P varie, plutôt que de prouver l'assertion plus précise $MN/AP = \sin \widehat{A}$. En réalité, c'est l'inverse qui est vrai (Serre dit que parfois, quand on ne parvient pas à montrer un théorème, c'est parce qu'on cherche à montrer un résultat trop facile !).



De fait, maintenant qu'on a vu apparaître les fonctions trigonométriques, on peut conclure sans trop de peine. Je laisse le lecteur réfléchir jusqu'au paragraphe suivant.

On voit ici en action trois types de raisonnements :

1) L'expérience ou **(phase d'induction)**, dont le but est de donner une conjecture robuste (le minimum est atteint en H). Dans cette phase, l'utilité du logiciel de géométrie est évidente

29. Le cheminement qui suit est exactement celui que j'ai utilisé : je le jure !

2) La seconde phase est ce que Pierce [30] appelle **l'abduction** [31]. Elle consiste à proposer des affirmations intermédiaires qui impliqueraient logiquement la conjecture : ici, on a d'abord MN/AP constant, puis $MN/AP = \sin \widehat{A}$. Dans cette phase aussi, le logiciel est essentiel, au moins pour une raison psychologique : on est sûr que la conjecture produite est à la fois juste et pertinente, ce qui est un encouragement fort pour la prouver.

3) Enfin, la dernière assertion : **phase déductive**. Dans cette dernière phase, le logiciel n'intervient plus, *a priori*. En ce qui me concerne, j'ai eu tout de suite l'idée de la preuve de la dernière conjecture et je ne vais pas faire semblant d'avoir utilisé des explorations supplémentaires. Cependant, je conseille au lecteur de faire vraiment l'exercice, sans consulter les preuves données ci-dessous. Il s'apercevra peut-être, selon son degré de familiarité avec la géométrie de nos pères, qu'il a encore besoin d'une petite abduction supplémentaire, pour laquelle le logiciel pourra être encore utile.

2.6.3 Discussion sur la fin de la démonstration

Cet exercice est décidément instructif, y compris pour moi ! En effet, lorsque je me suis posé ce problème en 2006, à la lecture du mémoire de Magali, arrivé à l'étape qui consistait à prouver l'égalité $MN/AP = \sin \widehat{A} := \sin \alpha$, j'ai trouvé rapidement la solution que voici.

Il s'agit de calculer $\sin \alpha$*. Mais, cet angle est somme de* $\beta = \widehat{BAP}$ *et de* $\gamma = \widehat{PAC}$ *et on a donc* $\sin \alpha = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta$*. On calcule facilement les lignes trigonométriques de* β *et* γ *grâce aux triangles rectangles* AMP *et* ANP *et on obtient :*

$$\sin \alpha = \frac{MP}{AP} \times \frac{AN}{AP} + \frac{NP}{AP} \times \frac{AM}{AP}.$$

L'égalité cherchée est donc équivalente à $MN \times AP = MP \times AN + NP \times AM$*. Ah, mais là, on reconnaît le théorème de Ptolémée* [32] *dans le quadrilatère inscriptible* $AMPN$ *et on a le résultat* [33].

J'étais très content d'avoir trouvé cette preuve et, pendant 10 ans, c'est celle que j'ai expliquée dans de nombreux endroits, par exemple dans ma conférence à Lille :

`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Lille2010.pdf`

30. Charles Sanders Pierce, philosophe et épistémologue américain, 1839-1914.
31. Comme monsieur Jourdain j'ai pratiqué longtemps l'abduction sans le savoir !
32. Dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.
33. Attention il peut y avoir des cas de figure, voir en annexe une discussion sur le résultat et sa preuve.

Soit, mais ce faisant, j'avais toujours un petit remords, celui d'utiliser le théorème de Ptolémée qui, s'il n'est pas très difficile [34], ne fait pas partie du bagage des collégiens et des lycéens (ni de celui des futurs professeurs, le plus souvent). C'est pourquoi, en préparant cette conférence, j'ai cherché s'il n'y aurait pas une preuve plus élémentaire et, de fait, j'en ai trouvé une, que voici.

Le quadrilatère $AMPN$, formé de deux triangles rectangles accolés, est inscrit dans le cercle de diamètre leur hypoténuse commune. Soit O le centre de ce cercle. On a $AP = 2OA$ et $OA = OM = ON$. Par Al-Kashi appliqué dans OMN on a $MN^2 = 2\,OA^2(1 - \cos\theta)$. Mais on a $\theta = 2\alpha$ (l'angle au centre est double de l'angle inscrit) donc $1-\cos\theta = 2\sin^2\alpha$ et donc $MN^2 = AP^2\sin^2\alpha$.

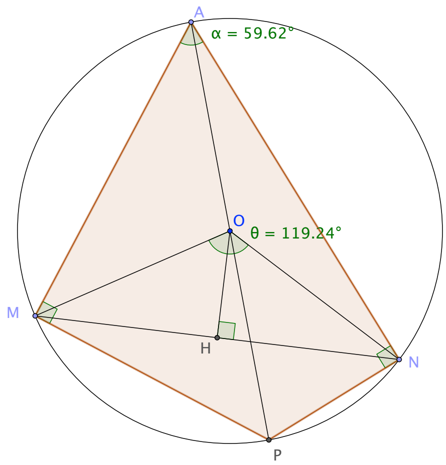


FIGURE 6 – Une preuve élémentaire

On m'objectera que cette preuve n'est pas, ou plus, du niveau d'un collégien, voire d'un lycéen : la formule d'Al-Kashi n'est pas enseignée au collège, pas plus que la formule de duplication du cosinus, la propriété de l'angle au centre n'y sera bientôt plus, etc. Il y a là un débat intéressant par rapport à la formation des maîtres. Il me semble en effet important d'habituer les futurs maîtres à ce travail d'adaptation [35] de leurs connaissances au niveau des élèves. Dans le cas présent, si l'on réfléchit encore un peu, on trouve encore plus simple !

D'abord, que l'angle au centre θ soit égal à 2α est ici facile, car il est somme des deux angles $\widehat{MOP}$ et $\widehat{PON}$. Comme $\widehat{MOP}$ est le supplémentaire de $\widehat{MOA}$, il est égal à $2\widehat{MAO}$ (somme des angles du triangle isocèle AOM). Le même argument de l'autre côté donne le résultat.

Appelons alors H le projeté orthogonal de O sur (MN). On a $\widehat{MOH} = \theta/2 = \alpha$, car la hauteur du triangle isocèle MON est aussi bissectrice. On en déduit $MH = OM\sin\alpha$, donc $MN = 2\,OM\sin\alpha = AP\sin\alpha$.

34. Voir par exemple :
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/Ptolemee.pdf`

35. Qui a dit de *transposition* ? Et pourquoi pas *didactique*, tant qu'on y est ?

Cette double simplification de ma preuve initiale me conduit à rappeler ici une maxime que l'on enseigne au joueur d'échecs débutant, et qui vaut aussi pour rappeler au mathématicien [36] que la première démonstration trouvée est rarement la plus simple :

2.4 Maxime. *Quand tu vois un bon coup sur l'échiquier, ne le joue pas, il y en a sans doute un meilleur.*

2.6.4 Le problème 119 de l'IREM de Lyon

Avec la conjecture explicitée, donc l'accent mis sur les milieux, c'est maintenant facile. On appelle D, E les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Par le principe du plus court chemin on a $PQ \leq PD + DE + EQ$. Par la propriété du triangle rectangle on a $PD = AB/2$ et $QE = AC/2$ et, par la droite des milieux, $DE = BC/2$. On a donc $PQ \leq p$ où p désigne le demi-périmètre de ABC. Il y a égalité si et seulement si les points P, D, E, Q sont alignés dans cet ordre, donc si (PQ) est la droite des milieux Δ. Pour trouver un M qui vérifie cela on trouve P à l'intersection de Δ et du cercle de diamètre $[AB]$ et de même Q à l'intersection de Δ et du cercle de diamètre $[AC]$. Le point M est alors à l'intersection des perpendiculaires à (AP) en P et à (AQ) en Q. Bien entendu pour que la solution soit correcte, il faut que P, Q soient à l'extérieur de $[DE]$, P du côté de D et Q du côté de E, ce qui disqualifie certaines des intersections. On voit qu'il n'y a qu'une solution au problème.

2.5 *Remarque.* On vérifie qu'on a bien $p < AB + AC$ (à cause de $BC < AB + AC$).

Bien sûr, le point M qui réalise le maximum est déterminé par la procédure précédente : on construit P, Q intersections de la droite des milieux de ABC relative à $[BC]$ et des cercles de diamètres $[AB]$ et $[AC]$, à l'extérieur de ABC, puis on trouve M à l'intersection des perpendiculaires à (AP) et (AQ) en P et Q. Soit, mais ne peut-on pas dire plus sur ce point ? Avec GeoGebra, on trouve un magnifique résultat que le lecteur perspicace ne manquera pas de découvrir [37] et de prouver.

36. Je la cite souvent, mais j'oublie parfois de me la rappeler à moi-même !
37. Une indication : penser aux angles ...

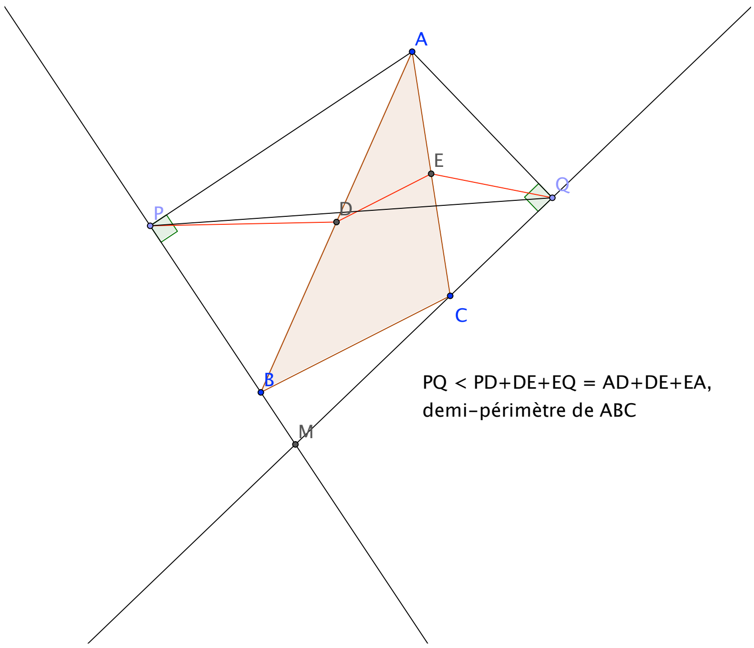


FIGURE 7 – Le problème 119

3 Conclusion

3.1 En guise de bilan : comment aborder un problème ouvert ?

Je résume ici ce qui précède. La méthode que je propose est celle que je pratique lorsque je cherche, que l'objet de ma recherche soit du niveau d'un collégien ou de celui d'un professionnel [38]. Attention, je suis comme tout le monde : je pense toujours que ce que je fais est optimal. Le lecteur gardera donc son esprit critique en lisant ce qui suit.

Je voudrais commencer par répéter l'axiome de départ : faire des mathématiques c'est **poser des problèmes**. Autrement dit, avant de les résoudre, il faut déjà les formuler [39] et ce n'est pas forcément le plus facile.

Face à un problème inconnu – disons de mathématiques, mais on peut peut-être utiliser cette méthode plus largement – je propose comme première étape de regarder, d'étudier, de décortiquer des **exemples**. En ce qui concerne

38. Bien entendu, même si la démarche est similaire, il faut dans ce cas disposer d'un bagage technique beaucoup plus élaboré.

39. Formuler les bonnes questions, c'est déjà comprendre.

le choix de ces exemples, l'idéal est de trouver un ou plusieurs exemples **génériques** (c'est-à-dire susceptibles de se généraliser). Si ce n'est pas possible, ou pas évident, je propose de regarder **le premier exemple non trivial** et, au besoin, de regarder ensuite des exemples plus complexes.

Dans l'étude de ces exemples, je mets en avant quatre mots-clés :

1) Observation Observer doit être pris ici en un sens actif : cela peut vouloir dire faire des **calculs**, éventuellement avec un ordinateur, déplacer, modifier une figure pour voir ce qui se passe, etc. Cela veut dire aussi revenir plusieurs fois sur la même question si besoin est.

2) Formulation L'observation, si elle est convenablement menée, doit permettre une description de la situation. L'expérience montre que celle-ci doit être la plus **explicite** et la plus **précise** possible.

3) Généralisation Si l'on est parti d'un exemple particulier, sur lequel on a repéré un phénomène, on doit essayer de l'étendre au cas général. On se trouve alors avec une ou plusieurs affirmations censées être vraies dans notre situation : une **conjecture**. On notera que la généralisation a une autre fonction : elle permet d'oublier ce qui dans un exemple particulier peut être contingent pour repérer ce qui est essentiel.

4) Vérification Bien entendu, il faut vérifier que la conjecture ainsi obtenue est **robuste**, c'est-à-dire qu'elle résiste aux changements d'exemples. Si ce n'est pas le cas, cela signifie qu'on a été trop optimiste, qu'il y a quelque chose qui n'a pas été pris en compte et il faut revenir à la phase d'observation.

Une fois ce travail fait, on dispose donc, en général, d'une conjecture et il reste un gros travail : la **démontrer** ! Mais là encore, les exemples peuvent être utiles pour trouver des intermédiaires (c'est la fameuse **abduction** de Pierce) qui vont permettre d'élaborer une stratégie pour prouver le résultat. Attention, une démonstration doit être menée avec toute la **rigueur** possible, sous peine d'être fausse, voire de conduire à un résultat faux. Là encore l'expérience permet un contrôle de cette phase. Cela étant, comme on l'a vu, **l'erreur** est inséparable de la recherche et elle peut même souvent être source de progrès. Il ne faut pas non plus craindre, en vertu du principe du joueur d'échecs, de remettre sur le métier une preuve, pour essayer de la parfaire.

Enfin, il faut ajouter une étape importante : la **rédaction**, qui, seule, permet de se convaincre et de convaincre les autres de la véracité d'un résultat.

3.2 Quelques écueils ?

S'agissant d'utiliser la procédure décrite ci-dessus dans les classes, il est clair qu'il ne faut pas se faire trop d'illusions : il n'est pas si facile de faire entrer les élèves dans un vrai problème, ni de guider leur réflexion sans la brider ni trop la diriger. Cela nécessite beaucoup de réflexion de la part du professeur, pas toujours formé pour cela. Par ailleurs, cette activité de recherche de problèmes est évidemment chronophage et se heurte aux impératifs des programmes. On se doute bien aussi que les choses vont dépendre des endroits et qu'elles seront difficiles dans les établissements[40] de même nom. Dans les autres, les écueils peuvent être différents comme le montre l'exemple du troisième problème ci-dessus, proposé par Magali Froger dans sa classe de cinquième du collège franco-allemand de Buc. Il s'agit d'un collège où les élèves sont sélectionnés, absolument pas représentatif du collège moyen. N'empêche, la réaction des élèves est instructive :

Les élèves se censurent eux-mêmes. Ils gardent, inconsciemment sûrement, une idée de ce qu'ils peuvent écrire ou ne pas écrire dans leur compte-rendu. Conscients du fait que leur professeur et leurs parents attendent beaucoup d'eux, les élèves ne veulent pas décevoir et n'acceptent pas de montrer qu'ils font des erreurs.

Les élèves étant habitués à trouver les réponses aux exercices presque instantanément, pour eux le mauvais élève cherche parce qu'il ne trouve pas, alors que le bon élève trouve la solution immédiatement. La recherche est donc, pour eux, synonyme d'échec.

Il est assez inquiétant de rencontrer une telle réaction chez des élèves de cinquième : cela signifie que ces bons élèves n'ont jamais eu de problème mathématique un peu consistant à se mettre sous la dent. Et pourtant, il en existe beaucoup !

3.3 Un espoir ?

Pour voir qu'il y a depuis longtemps des gens sur la même ligne que celle que je préconise, je cite un texte de l'IREM de Strasbourg qui date de 1973 ...

La recherche de problèmes n'est pas une activité scolaire compatible avec des horaires stricts, réalisée en temps limité ...

Il s'agit d'une activité libre, à laquelle on se livre par goût d'une façon désintéressée. On comparera le statut du problème, dans l'enseignement des mathématiques, à la lecture des œuvres littéraires, ne figurant pas au programme ...

Le maître sèmera, de temps en temps, des idées de problème dans l'espoir de récolter des comportements de recherche. Mais, lorsque l'inspecteur viendra passer vingt minutes dans la classe, il n'apercevra pas ce qui germe dans la tête des enfants, et il ne pourra juger si l'initiative du professeur est

40. Ainsi, j'ai pu vérifier (ce dont je me doutais un peu) qu'il y a une différence entre un collège de Garges-les-Gonesse et le lycée Janson de Sailly ...

sur le point de porter ses fruits. Ainsi, s'agit-il pour le maître d'une activité gratuite ...

Semons, semons toujours, il en restera peut-être quelque chose. Voltaire ne disait pas autre chose : *il faut cultiver notre jardin.*

3.4 Et la formation des maîtres ?

J'ai envie de dire que tout ce qui précède est important pour la formation des enseignants. Je redonne une liste non exhaustive des points apparus ci-dessus.

• Le point le plus important est de convaincre les futurs enseignants de l'intérêt de l'utilisation de problèmes ouverts dans la formation du citoyen comme moyen d'apprendre à se confronter à une situation inconnue. Cela peut permettre de changer la vision des élèves sur les mathématiques en les recentrant sur leur vocation première : *Poser des problèmes et, si possible, les résoudre.* Cela peut aussi être l'occasion de montrer la puissance des mathématiques, par exemple de l'algèbre, dans le fait de nommer des quantités inconnues pour pouvoir ensuite calculer avec elles.

• Il est essentiel ensuite de leur indiquer une méthode générale, appelons-là expérimentale pour faire court, pour aborder de tels problèmes, avec les étapes répertoriées plus haut : observation, formulation, généralisation, vérification, en mettant en évidence l'importance du choix des exemples et de la formulation précise de conjectures. Bien entendu cette méthode n'est qu'un fil conducteur et doit être adaptée dans chaque cas.

• Mon expérience c'est qu'il n'est pas inutile de réexpliquer comment on peut produire une démonstration à partir de la question : *Qu'est-ce qu'on cherche ?* et de la méthode d'abduction. Sur ce point, il faut insister sur le fait qu'il est souvent possible d'améliorer une preuve en la retravaillant. D'une manière générale, utiliser des problèmes ouverts nécessite un gros travail préalable de l'enseignant.

• Enfin, c'est l'occasion de les faire réfléchir sur la dialectique rigueur-erreur en insistant sur la nécessité de ne pas stigmatiser celle-ci, mais au contraire de s'appuyer sur les erreurs pour faire progresser les élèves. Ma pratique m'a montré qu'une erreur commise par un élève est très formatrice pour les autres.

Deux points importants pour finir, plus du côté didactique :

• Les programmes existent et il faut en tenir compte, mais cela fait partie du travail du professeur de trouver des voies pour travailler avec ou malgré les programmes.

• Il faut aussi savoir distinguer ce qui est essentiel de ce qui est accessoire :

parfois, l'argumentation, même si elle n'est pas entièrement formalisée peut être suffisante. Il faut se souvenir qu'en mathématiques, la démonstration n'est pas une finalité, mais un moyen d'assurer la sécurité des résultats.

4 Bibliographie

[AGM] ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1991) *Problème ouvert et situation problème*, brochure IREM de Lyon. Nouvelle édition 2008 au CRDP de Lyon.

[Froger] FROGER M., *Initier à la démarche scientifique en classe de 5e à l'aide des problèmes ouverts*, Mémoire PLC2, IUFM de Versailles, 2006.

[K] KAHANE J.-P., *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, 2002.

[Kosyvas] KOSYVAS G., *Problèmes ouverts : notions, catégories et difficultés*, Annales de didactique et de sciences cognitives (IREM de Strasbourg), vol. 15, 2010, p. 45-73.

[MDP1] MARTIN-DESCHAMPS M., PERRIN D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais connexe ni réduit*, Rapport de recherche du LMENS, 1995.

[MDP2] MARTIN-DESCHAMPS M., PERRIN D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4ème série, t. 29, 1996, p. 757-785.

[Massola] MASSOLA J.-P. (2006) *Osons la difficulté*, PLOT, 13, p. 18-23.

[Perrin] PERRIN D., *L'expérimentation en mathématiques*, Petit x, 73, p. 6-34 (2007)

[Sauter] SAUTER M. (2000) *Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège*, Repères IREM, 39, p. 7-20.

250 problèmes pour nos élèves, IREM Lyon, 1983

Calendrier mathématique 2015 (et avant), Presses universitaires de Strasbourg

5 Annexes

5.1 Compléments sur les sommes d'entiers consécutifs

5.1.1 Des démonstrations au collège ?

Même si cela ne me semble pas un objectif prioritaire, on peut, dès le collège écrire des fragments de preuves algébriques des résultats. Par exemple :

• Les sommes de deux entiers consécutifs. La difficulté est d'écrire ce que cela signifie : $p + (p + 1) = 2p + 1$. On voit que la somme est impaire. Inversement si n est impair, $n = 2p + 1$ il s'écrit $p + (p + 1)$.

• Les sommes de trois consécutifs : $p+(p+1)+(p+2) = 3p+3$ ou, encore mieux, $(p - 1) + p + (p + 1) = 3p$. Avec cette écriture, on voit la condition nécessaire et aussi la suffisante en lisant à l'envers.

5.1.2 Une preuve inspirée de l'expérience

Les exemples donnés ci-dessus permettent de produire une démonstration formelle si on sait bien les lire et qu'on dispose de l'écriture algébrique.

Si N est somme de n nombres consécutifs, on distingue selon la parité de n. Si n est impair, $n = 2m + 1$ avec $m > 0$, il y a un terme central égal à k et la somme s'écrit :

$$N = (k-m)+(k-m+1)+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+\cdots+(k+m-1)+(k+m) = (2m+1)k$$

de sorte que N admet le facteur impair $n > 1$. Si n est pair, $n = 2k$, il y a cette fois deux termes centraux, m et $m+1$, avec $m > 0$, et la somme s'écrit :

$$N = (m-k+1)+\cdots+m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)+(m+k) = k(2m+1)$$

et, là encore, N admet un facteur impair non trivial.

Pour la réciproque, on considère un entier N qui n'est pas une puissance de 2. Il a donc un facteur impair > 1 et on écrit $N = (2m+1)k$ (avec $m \geq 1$) et on distingue selon que m est $< k$ ou $\geq k$. Dans le premier cas on applique la méthode 112, dans le second la méthode 116. Précisément, si m est $< k$, on utilise l'entier impair $2m + 1$ comme nombre d'éléments de la série et k comme centre de la série, autrement dit, on écrit N comme la somme des entiers positifs $k - m$, $k - m + 1$, ..., $k - 1$, k, $k + 1$, ..., $k + m - 1$, $k + m$. Au contraire, si m est $\geq k$, on écrit $2m + 1$ comme $m + (m + 1)$ et on utilise le couple $m, m + 1$ comme centre de la série.

5.1.3 Et pour un mathématicien ?

Tout mathématicien à qui on pose le problème des sommes d'entiers consécutifs aura tendance à le formuler en termes algébriques. On considère la somme de n entiers positifs consécutifs ($n \geq 2$), que l'on écrit, en appelant p le premier : $S_{n,p} = p + (p+1) + \cdots + (p+n-1)$ et on évalue cette somme : $S_{n,p} = np + 1 + \cdots + (n-1) = np + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot$ Pourtant, il n'est pas évident à partir de cette écriture de formuler la conjecture des puissances de 2.

5.1.4 Une question : le nombre de solutions

Comme on a dit, faire des mathématiques c'est poser des problèmes et, si possible, les résoudre. On peut donc se demander, lorsque le problème a une solution, s'il peut en avoir plusieurs et combien.

Quand on fait l'expérience qui donne la conjecture des puissances de 2, on voit bien qu'il peut y avoir plusieurs solutions, car il y a des nombres qui sont déjà barrés quand on veut les barrer. L'exemple le plus simple est $N = 15$ où l'on a 3 solutions : $15 = 7 + 8$, $15 = 4 + 5 + 6$ et $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Le résultat est le suivant :

5.1 Théorème. *Soit N un entier. Le nombre de manières d'écrire N comme somme de n nombres entiers positifs consécutifs avec $n \geq 2$ est le nombre de diviseurs impairs > 1 de N. Si $N = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de N (avec les p_i impairs et distincts), le nombre de solutions est $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1) - 1$.*

Démonstration. Il s'agit, N étant donné, de l'écrire $N = np + \dfrac{n(n-1)}{2}$ avec $p > 0$ et $n \geq 2$. On distingue deux cas.

1) Si n est impair, $n = 2k + 1$, on a $N = (2k+1)(k+p)$. On retrouve le fait que N admet un facteur impair non trivial $2s + 1$ (ici $2k + 1$). On pose $q := \dfrac{N}{2s+1}\cdot$ On a une solution et une seule en posant $n = 2s + 1$ et $p = q - s$, pourvu que l'on ait $q > s$ (on vérifie que c'est bien une solution).

2) Si n est pair, $n = 2k$, on a $N = k(2p + 2k - 1)$ et on voit encore que N admet un facteur impair non trivial $2s + 1$ (ici $2p + 2k - 1$). On pose $q := \dfrac{N}{2s+1}\cdot$ On a alors une solution et une seule en posant $n = 2q$ et $p = s - q + 1$, pourvu que l'on ait $q \leq s$ (on vérifie que c'est bien une solution).

Comme on a deux cas qui s'excluent ($q > s$ et $q \leq s$), on voit ainsi qu'on a une unique solution associé à un diviseur impair non trivial de N comme annoncé.

5.2 *Exemple.* Examinons le cas $N = 90 = 2 \times 3^2 \times 5$. Il y a $3 \times 2 - 1 = 5$ solutions. On fait la liste des diviseurs impairs $\neq 1$: $3, 5, 9, 15, 45$. Pour les trois premiers on a une somme de ce nombre impair de nombres :

$$29+30+31, \quad 16+17+18+19+20, \quad 6+7+8+9+10+11+12+13+14$$

et pour les autres le nombre impair est au centre, vu comme somme de deux consécutifs :

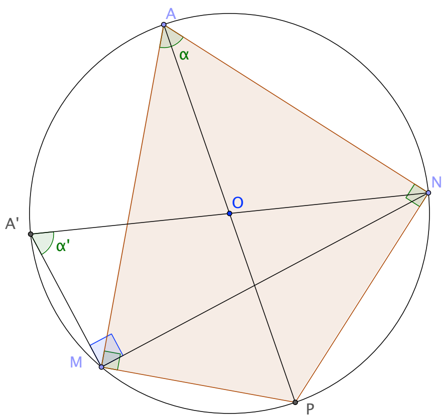
$$2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13, \quad 21+22+23+24.$$

5.2 Complément sur le problème de Magali

Rappelons d'abord l'énoncé le plus général :

5.3 Théorème. *Soit ABC un triangle, P un point de la droite (BC), M et N ses projetés orthogonaux sur (AB) et (AC) respectivement. Alors, la longueur MN est minimum lorsque P est le projeté orthogonal de A sur (BC).*

Démonstration. Le jour de la conférence, Stéphane Ginouillac m'a suggéré



une preuve élémentaire du résultat, particulièrement efficace : on trace le diamètre $[NA']$ du cercle circonscrit à $ANPM$. On a donc $AP = A'N$ et $MN/AP = MN/A'N = \sin \widehat{MA'N} := \sin \alpha'$. Mais, par le théorème de l'angle inscrit, les angles $\widehat{MA'N}$ et $\widehat{MAN}$, qui interceptent tous deux l'arc MN, sont égaux ou supplémentaires, donc ont même sinus et, comme M et N sont respectivement sur (AB) et (AC), ce sinus est aussi celui de $\alpha = \widehat{BAC}$.

Comme le note Stéphane, on a mis en évidence un lemme (que les anciens connaissaient peut-être) :

5.4 Lemme. *Dans un cercle, la longueur d'une corde $[MN]$ s'obtient en multipliant la longueur du diamètre par le sinus de n'importe lequel des angles inscrits*[41] *qui interceptent l'arc MN.*

5.5 *Remarque.* Par rapport aux autres preuves évoquées plus haut, celle-ci a un autre mérite, celui d'éviter d'avoir à considérer divers cas de figure. En effet, comme Dominique Tournès me l'a fait remarquer, la preuve qui utilise Ptolémée peut être incorrecte dans le cas où l'angle $\widehat{ABC}$ est obtus (il faut alors considérer une différence d'angles au lieu d'une somme).

5.3 Complément sur le problème 119

Voici la réponse à la question posée ci-dessus :

5.6 Proposition. *Le point M qui réalise le maximum de PQ est le centre du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$ de ABC.*

Démonstration. On montre d'abord que M est sur la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$. Pour cela, on regarde les complémentaires des demi-angles en A. À gauche, le complémentaire de $\widehat{BAM}$ comporte deux morceaux : $\widehat{PAD} = \widehat{APD} = \widehat{APQ}$ et $\widehat{AMP}$. De même à droite, le complémentaire de $\widehat{MAC}$ est la somme de $\widehat{CAQ} = \widehat{AQB}$ et $\widehat{AMC}$. On conclut grâce aux angles inscrits du quadrilatère (inscriptible) $APMQ$.

On montre ensuite que M est sur la bissectrice extérieure de B. Il suffit de comparer les angles en B avec ceux du triangle isocèle BDP. Ils sont égaux aux angles à la base du triangle, l'un comme opposé par le sommet, l'autre comme correspondant (grâce au parallélisme de la droite des milieux).

5.4 Le problème d'Olivier Girod

Attention, tel qu'il est formulé, le point P n'est pas bien déterminé, il y en a deux, symétriques par rapport à (MH). L'expérience montre que les lieux sont symétriques par rapport à la droite (OA). Je donne ici deux manières de déterminer le lieu de P par le calcul.

Dans les deux cas, on prend O comme origine, le cercle Γ a pour équation $x^2+y^2 = R^2$, on peut supposer $A = (a, 0)$ avec $a \geq 0$ et on pose $BC = r > 0$. Le point M s'écrit (x, y) avec $x^2+y^2 = R^2$ ou $(R\cos t, R\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Le milieu de $[AM]$ est $H = (\frac{a+x}{2}, \frac{y}{2})$. On cherche $P = (X, Y)$.

41. Aigus ou obtus.

5.4.1 Équations paramétriques

On regarde le vecteur $\overrightarrow{AM} = (x-a, y)$ et un vecteur normal à $\overrightarrow{AM}$, soit $(y, a-x)$ que l'on norme en $\vec{n} = \big(\frac{y}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}}, \frac{a-x}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}}\big)$. On choisit alors P défini par $\overrightarrow{HP} = r\vec{n}$, ce qui donne :

$$(X,Y) = \big(\frac{a+x}{2} + \frac{ry}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}}, \frac{y}{2} + \frac{r(a-x)}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}}\big).$$

(Voir GeoGebra *Girod1.ggb* celle-ci est la symétrique de ce que je fais d'habitude, pour avoir la bonne il faut changer $\vec{n}$ en $-\vec{n}$.)

On trouve ainsi, en tenant compte de $x^2+y^2=R^2$:

$$(X,Y) = \big(\frac{a+R\cos t}{2} - \frac{rR\sin t}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos t}}, \frac{R\sin t}{2} + \frac{r(R\cos t - a)}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos t}}\big).$$

5.4.2 Équation implicite

Cette méthode est excellente pour construire la courbe paramétrée, mais pas terrible pour trouver l'équation algébrique. Pour cela, le mieux est de récrire les conditions donnant P.

• Il est sur la médiatrice de $[AM]$:

$$2(x-a)X + 2yY + a^2 - R^2 = 0.$$

• La distance HP est égale à r :

$$X^2 + Y^2 - (a+x)X - yY + \frac{a^2+2ax+R^2}{4} - r^2 = 0.$$

On obtient ainsi un système de deux équations linéaires en x, y, on le résout et on écrit $x^2+y^2=R^2$. À la main, le calcul est saumâtre, mais *xcas* fait ça très bien. On trouve une équation de degré 6 avec tout de même 42 termes (alors que j'attendais plutôt du degré 4), voir *Girod.xws.*

5.5 La fonction somme des carrés des chiffres

Rappelons qu'il s'agit de la fonction f qui à un entier écrit en base 10, $n = a_r \times 10^r + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$, associe la somme des carrés de ses chiffres : $f(n) = a_r^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2$. Le résultat est le suivant :

5.7 Théorème. *Pour tout $N \in \mathbf{N}$ la suite des itérés $(f^k(N))_{k\in\mathbf{N}}$ est*

– soit constante et égale à 1 à partir d'un certain rang,

– soit périodique à partir d'un certain rang, avec la période $4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4$.

Démonstration. La preuve consiste à vérifier le résultat avec *xcas* pour $N \leq 99$ et à montrer le lemme suivant :

5.8 Lemme. *Si n est ≥ 100 on a $f(n) < n$.*

Ce lemme étant établi, on raisonne par l'absurde. Si le théorème est faux on appelle N le plus petit contre-exemple. Grâce à la vérification, on a $N \geq 100$, donc $f(N) < N$, donc $f(N)$ n'est plus un contre-exemple (car N est le plus petit), mais alors N non plus, car les itérés de $f(N)$ sont aussi ceux de N !

Pour prouver 5.8 on montre d'abord, en étudiant la fonction différence :

5.9 Lemme. *Pour $r \geq 3$ on a $10^r > 81(r+1)$.*

Soit alors $n = a_r \times 10^r + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$ un entier écrit en base 10, avec $a_r > 0$. On a $f(n) \leq 9^2(r+1) = 81(r+1)$, donc $f(n) < n$ si $r \geq 3$ par 5.9. Il reste à vérifier le cas des entiers compris entre 100 et 1000. C'est facile. (Par exemple, si $n = 100a + 10b + c$ on a $f(n) \leq 3 \times 81 = 243$ et on a donc gagné si $a \geq 3$. On est donc ramené aux entiers compris entre 100 et 300, etc. Le lecteur se chargera des détails.)

5.6 Dans notre série : poser des problèmes

Le problème suivant est extrait du *Calendrier mathématique 2015* (3 avril) :

Trouver le plus petit nombre premier $p > 2$ tel que $p^3 + 7p^2$ soit un carré.

Nul doute que le lecteur averti trouvera la solution bien vite. Je lui propose alors une question subsidiaire :

Y a-t-il une infinité de tels nombres premiers p ?

C'est une autre histoire et, peut-être, une autre conférence ...