

# La quartique de Klein et le groupe simple d'ordre 168

Voir, Penser, Dire, Agir,  
Travailler, S'appliquer, Se concentrer, Méditer.

Le chemin des huit vertus vers le Nirvana.



Figure 1: The eightfold way

## Introduction

Ce texte est inspiré de l'article de Felix Klein : *Über die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen*, *Math. Ann.* **14** (1879), 428-471. *Œuvres*, Tome III, p. 90-136. C'est une rédaction élargie de deux exposés, donnés en janvier 2005 à Versailles (resp. en septembre 2008 à Besançon) lors d'une journée d'hommage aux mathématiques allemandes (resp. pour le colloquium de l'université). Je remercie Pierre Michalak (resp. Anne Cortella) de m'avoir invité à faire ces conférences.

Il est conçu comme une promenade mathématique au pays de la quartique de Klein, que je considère, pour ma part, comme l'un des plus beaux objets des mathématiques. D'ailleurs, cette courbe (ou surface) est si belle qu'on lui a érigé une statue, appelée *The eightfold way*, au MSRI (Mathematical Sciences Research Institute) à Berkeley, voir ci-dessus. Il nous mènera de la géométrie algébrique à la théorie des groupes en passant par la théorie des nombres, la topologie et la géométrie hyperbolique. On y verra beaucoup de figures, quelques belles équations, un beau groupe simple fini (le groupe d'ordre<sup>1</sup>  $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ ), et même une maxime de la philosophie bouddhique. En revanche, la plupart des démonstrations seront omises, surtout si elles sont difficiles. Le lecteur que ce texte aurait convaincu d'étudier de plus près la quartique de Klein pourra se reporter à l'abondante littérature qui le concerne<sup>2</sup> et en particulier au très beau livre : *The eightfold way* édité par Silvio Levy (Cambridge University Press, 1999) à l'occasion de l'inauguration de la statue en question. On pourra aussi se reporter à l'exposé de Christophe Bavard et au livre (épuisé) de Régine et Adrien Douady.

## Rappels

Nous aurons besoin de quelques notions sur les groupes qu'on trouvera par exemple dans [Perrin1].

Soit  $G$  un groupe et  $X$  un ensemble. Dire que  $G$  opère (ou agit) sur  $X$  signifie qu'on a une application  $(g, x) \mapsto g.x$  de  $G \times X$  dans  $X$  avec les propriétés usuelles. On dit que le groupe opère transitivement si, pour tous  $x, y$  dans  $X$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g.x = y$ . Si ce n'est pas le cas, on considère les orbites de  $G$  dans  $X$  : l'orbite  $\omega(x)$  est l'ensemble des transformés de  $x$  par les éléments de  $G$ . Le stabilisateur  $H_x$  de  $x \in X$  est le sous-groupe formé des  $g \in G$  qui fixent  $x$  :  $g.x = x$ . On a une relation entre orbite et stabilisateur : l'ensemble quotient (les classes à gauche)  $G/H_x$  est en bijection avec  $\omega(x)$

---

<sup>1</sup>D'ailleurs les nombres 2, 3, 7 nous poursuivront tout au long de ce périple

<sup>2</sup>Voir la bibliographie.

par l'application qui à  $\bar{g}$  associe  $g.x$ . En particulier, et c'est surtout ce point qui nous sera utile, on a  $|G| = |H_x| \times |\omega(x)|$ .

On rappelle aussi qu'un sous-groupe  $N$  d'un groupe  $G$  est dit **distingué** s'il est stable par conjugaison : pour tout  $n$  dans  $N$  et tout  $g$  dans  $G$ ,  $gn g^{-1}$  est dans  $N$ .

## 1 La quartique de Klein : variante affine réelle

Contrairement à Klein, je commence par l'étude de la variante affine réelle de la quartique. Ce n'est peut-être pas la plus intéressante, mais c'est sans doute la plus élémentaire.

### 1.1 La courbe et ses bitangentes

La quartique de Klein est une courbe algébrique  $K$ , dont une image réelle est la courbe  $K_0$  de la figure 2. Cette courbe est tracée dans le plan euclidien et elle est inscrite dans un triangle équilatéral dont les sommets sont  $1, j, j^2$  (si on identifie  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{C}$ ). Elle admet d'ailleurs manifestement comme groupe de symétries le groupe  $\mathfrak{S}_3$  du triangle équilatéral (trois rotations d'angles  $2k\pi/3$  et trois symétries axiales). À l'œil, cette courbe semble être une quartique i.e. une courbe de degré 4 (car une droite la coupe en au plus 4 points), lisse (sans points singuliers : ni points doubles, ni rebroussements). En revanche, certaines tangentes sont particulières. En effet, une tangente ordinaire recoupe la courbe en deux points distincts  $u, v$  et un cas particulier est celui des bitangentes (c'est-à-dire le cas  $u = v$ ). Les côtés du triangle équilatéral sont des bitangentes à  $K$ . Leurs équations sont  $2x + 1 = 0$ ,  $-x + \sqrt{3}y + 1 = 0$  et  $-x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ . Les points de contact étant échangés par le groupe  $\mathfrak{S}_3$ , ils sont sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

Une équation plausible pour cette courbe est donc :

$$(2x + 1)(-x + \sqrt{3}y + 1)(-x - \sqrt{3}y + 1) - k(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 0.$$

En effet, une telle équation est invariante par  $\mathfrak{S}_3$  (car  $x^2 + y^2$  l'est) et les trois côtés du triangle équilatéral sont des bitangentes (quand on coupe par  $2x + 1 = 0$  par exemple, les solutions sont doubles, à cause du carré de l'équation du cercle). En réalité, l'équation que nous choisirons pour  $K_0$  est la suivante :

$$49(2x + 1)(-x + \sqrt{3}y + 1)(-x - \sqrt{3}y + 1) - 3(7(x^2 + y^2) - 4)^2 = 0$$

(on a donc  $R = 2/\sqrt{7}$ ). Attention, ce choix numérique (on y notera la présence des trois nombres premiers 2, 3, 7) n'est pas du tout innocent et

c'est lui qui va faire que cette (belle) courbe réelle va s'avérer plus belle encore en complexes. En vérité, on peut s'en douter, ce n'est pas cette équation qui est apparue la première, mais une autre, plus naturelle, qui interviendra dans un cadre un peu plus général.

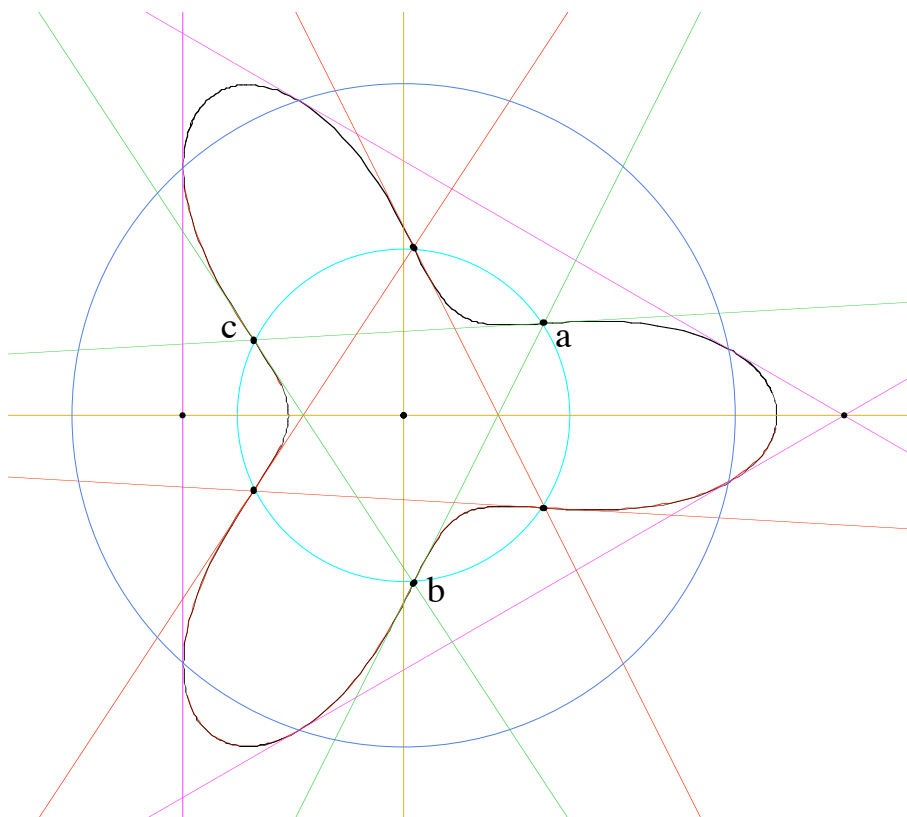


Figure 2: La courbe réelle

## 1.2 Les inflexions

Si l'on regarde bien le dessin de  $K_0$  on y voit d'autres points remarquables : les points d'inflexion, points où la tangente traverse la courbe et la coupe avec multiplicité 3, puisque la dérivée seconde s'annule (penser à la formule de Taylor), de sorte que la tangente ne recoupe la courbe qu'un seul point. Il en apparaît 6, permutés par le groupe  $\mathfrak{S}_3$ , et formant deux triangles équilatéraux  $T_1, T_2$ . Sur la figure 2, on constate deux phénomènes :

- 1) Ces triangles ont une propriété géométrique remarquable<sup>3</sup> : la tangente

---

<sup>3</sup>Même si on a une quartique avec un automorphisme d'ordre 3 et un triangle formé de trois inflexions qui s'échangent par cet automorphisme, les tangentes inflexionnelles ne

en chaque point d'inflexion de  $T_1$  recoupe  $K$  en un unique point qui est un autre point de  $T_1$ . Cette propriété mérite un nom :

**1.1 Définition.** *On appelle triangle d'inflexion d'une quartique  $K$  un triangle  $abc$  de points de  $K$  tel que :*

- 1)  $a, b, c$  sont des points d'inflexions de  $K$ ,
- 2) les tangentes en  $a, b, c$  sont respectivement  $(ca), (ab), (bc)$ .

2) Les six points d'intersection sont sur un cercle qui a l'air d'être de rayon moitié du cercle des contacts des bitangentes :  $1/\sqrt{7}$ .

On peut calculer explicitement ces inflexions. Je propose pour cela deux voies, l'une plus théorique, l'autre plus adaptée à la situation.

D'une manière générale, on a une courbe plane définie par une équation implicite  $f(x, y) = 0$ . Comme elle est lisse, le théorème des fonctions implicites nous dit qu'on peut résoudre l'équation soit en  $y$ , soit en  $x$ , disons par exemple sous la forme  $y = g(x)$ . On sait calculer la dérivée  $g'(x)$  en partant de l'identité  $f(x, g(x)) = 0$  que l'on dérive :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x) = 0$$

ce qui donne

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Pour trouver les points d'inflexion il suffit d'écrire que la dérivée seconde  $g''(x)$  est nulle, ce qui conduit à la relation (dite hessienne) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0$$

ou encore, avec une notation plus économique :

$$f''_{x^2} (f'_y)^2 - 2f''_{xy} f'_x f'_y + f''_{y^2} (f'_x)^2 = 0.$$

Pour trouver les inflexions on peut alors éliminer  $x$  (ou  $y$ ) entre ces deux équations, puis résoudre l'équation en  $y$  (ou  $x$ ) obtenue. Il y a des techniques pour cela (on peut par exemple écrire le résultant des polynômes) et les logiciels de calcul formel le font sans problème.

Dans notre cas, pour trouver les inflexions, comme on se doute qu'elles sont sur le cercle de rayon  $1/\sqrt{7}$ , le mieux est de couper  $K_0$  par ce cercle, ce

---

sont pas nécessairement les côtés du triangle, cf. annexe 1.

qui permet d'éliminer le dernier terme de  $f$ . Il reste une équation du troisième degré en  $x$  :  $8 \times 49x^3 - 42x + 1 = 0$ . Si l'on pose, pour éliminer le coefficient de  $x^3$ ,  $x' = 14x$ , l'équation devient  $x'^3 - 21x' + 7 = 0$ .

Cela permet de calculer des valeurs approchées des inflexions (et de vérifier que ce sont bien des inflexions en utilisant la hessienne). On peut aussi les trouver sous une forme algébrique si la profusion de 7 et de  $\sqrt{7}$  nous fait penser aux racines 7-èmes de l'unité. En effet, si on pose  $\zeta = e^{2i\pi/7}$ , on a la relation  $1 + (\zeta + \zeta^{-1}) + (\zeta^2 + \zeta^{-2}) + (\zeta^3 + \zeta^{-3}) = 0$ . Si on pose  $u = \zeta + \zeta^{-1}$ , on a  $\zeta^2 + \zeta^{-2} = u^2 - 2$  et  $\zeta^3 + \zeta^{-3} = u^3 - 3u$  et  $u$  est solution de l'équation  $u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$ .

Le changement de variable usuel  $v = u + \frac{1}{3}$  élimine le terme de degré 2 et on obtient :  $v^3 - \frac{7}{3}v - \frac{7}{27} = 0$ . En posant  $x' = 3v$  on retrouve l'équation ci-dessus. On peut donc calculer les inflexions en termes de racines septièmes de l'unité. Voilà les coordonnées des trois inflexions du premier triangle :

$$\begin{aligned} a &= \left( -\frac{1}{14}(1 + 3(\zeta + \zeta^{-1})), \frac{\sqrt{3}}{14}(\zeta^3 + \zeta^{-3} - \zeta^2 - \zeta^{-2}) \right), \\ b &= \left( -\frac{1}{14}(1 + 3(\zeta^3 + \zeta^{-3})), \frac{\sqrt{3}}{14}(\zeta^2 + \zeta^{-2} - \zeta - \zeta^{-1}) \right), \\ c &= \left( -\frac{1}{14}(1 + 3(\zeta^2 + \zeta^{-2})), \frac{\sqrt{3}}{14}(\zeta + \zeta^{-1} - \zeta^3 - \zeta^{-3}) \right), \end{aligned}$$

Les autres sont les symétriques de celles-là par rapport à  $Ox$ .

On peut encore écrire ces inflexions en termes de cosinus, par exemple :

$$a = \left( -\frac{1}{14} \left[ 1 + 6 \cos \frac{2\pi}{7} \right], \frac{\sqrt{3}}{14} \left[ 2 \cos \frac{6\pi}{7} - 2 \cos \frac{4\pi}{7} \right] \right),$$

les autres s'obtenant par l'action du groupe  $\mathfrak{S}_3$ . Dans cette formule on notera encore la présence des entiers 2, 3, 7.

## 2 La quartique de Klein : variante projective complexe

### 2.1 Le plan projectif

Quand on fait de la géométrie algébrique (par exemple quand on étudie des courbes algébriques planes), on se rend vite compte que travailler dans le plan affine réel n'est pas satisfaisant. Ainsi, si l'on regarde l'intersection

d'une conique et d'une droite on a envie de dire qu'il y a deux points d'intersection. Bien entendu cela peut être faux (penser à une droite extérieure à un cercle ou à une parallèle à l'asymptote d'une hyperbole). Dans le cas d'une droite et d'un cercle on trouve toujours deux points d'intersection, mais éventuellement imaginaires ou confondus. Dans le cas de l'hyperbole, le point manquant est "à l'infini". Le même problème se rencontre avec l'intersection de deux coniques, ou le nombre de points d'intersection attendus est 4, mais où il n'est pas toujours atteint (penser à deux cercles), et de même pour deux courbes de degrés  $d$  et  $d'$ . La solution adoptée depuis Poncelet et d'autres, au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, est de travailler dans le plan projectif complexe. Pour le mot complexe, cela veut dire simplement qu'on prend des points à coordonnées complexes. Ainsi, le cercle  $x^2 + y^2 = 1$  et la droite  $x = 2$  se coupent en deux points :  $(2, \pm \frac{i\sqrt{3}}{2})$ . Pour le mot projectif, cela signifie qu'on introduit des points à l'infini. Précisément, on considère, au lieu des points  $(x, y)$  du plan affine des points  $(x, y, t)$ , mais avec des coordonnées **homogènes**, ce qui signifie que  $x, y, t$  ne sont pas tous nuls et que le point  $(x, y, t)$  est le même que  $(\lambda x, \lambda y, \lambda t)$ . L'ensemble de ces points est le plan projectif  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ . On y retrouve le plan affine en prenant les points  $(x, y, 1)$ , mais aussi une droite à l'infini formée des points  $(x, y, 0)$ , définis à un scalaire près.

Les courbes algébriques de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  sont définies encore comme zéros de polynômes, mais cette fois, de polynômes homogènes  $F(X, Y, T)$  (en effet, si  $(x, y, t)$  est solution, il faut que  $(\lambda x, \lambda y, \lambda t)$  le soit aussi). Par exemple,  $uX + vY + wT = 0$  est une droite projective, dont la partie affine est l'ensemble des points  $(x, y, 1)$  qui vérifient  $ux + vy + w = 0$  : c'est bien une droite affine, mais elle a, en plus, à l'infini l'unique point  $(v, -u, 0)$  (les coordonnées ne sont définies qu'à un scalaire près) qui correspond à la direction de  $D$ . Quand on a une courbe affine, on obtient sa complétion projective en homogénéisant son équation (usuellement avec la variable  $T$ ). Par exemple, l'hyperbole  $xy - 1 = 0$  devient  $XY - T^2$  et on voit, à l'infini, les deux points  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 1, 0)$  qui correspondent aux points à l'infini de  $Ox$  et  $Oy$ , donc aux directions asymptotiques de l'hyperbole.

Les bonnes applications du plan projectif sont les homographies : elles correspondent aux applications linéaires bijectives  $u : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ , donc aux matrices  $3 \times 3$  inversibles : le groupe  $GL(3, \mathbf{C})$ . En fait, comme les homothéties sont triviales en projectif (à cause de l'homogénéité des coordonnées), le groupe des homographies est le groupe  $PGL(3, \mathbf{C})$ , quotient du précédent par les homothéties. On verra plusieurs exemples d'homographies ci-dessous. Les applications affines bijectives (par exemple les isométries du groupe  $\mathfrak{S}_3$  vu ci-dessus) se prolongent en des homographies par homogénéisation.

Dans le cas de la courbe de Klein  $K$ , on va voir que le passage en projectif

complexe révèle des propriétés insoupçonnées, en particulier la présence de nombreux automorphismes de  $K$  (i.e. des homographies qui conservent  $K$ ).

## 2.2 La pseudo-quartique de Klein et ses automorphismes

### 2.2.1 Un triangle d'inflexion

Nous allons maintenant aller vers la forme définitive de la quartique de Klein. Pour cela, il faut repenser à un triangle d'inflexions. Lorsqu'on a un tel triangle, on peut toujours l'envoyer par une homographie sur n'importe quel autre triangle. On peut même envoyer quatre points (non trois à trois alignés) sur quatre autres.

Or, dans le plan projectif, avec les coordonnées  $(x, y, t)$  il y a un triangle particulièrement simple :  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$ ,  $c = (0, 0, 1)$  (le point à l'infini de l'axe des  $x$ , celui de l'axe des  $y$  et l'origine du plan affine). On peut envoyer le triangle d'inflexions de  $K_0$  (celui qui s'appelait déjà  $abc$ ) sur  $abc$ . De plus, on peut aussi envoyer l'origine  $o$  du plan affine sur le point unité  $d = (1, 1, 1)$  de  $\mathbf{P}^2$ . La rotation de centre  $o$  qui permute les inflexions de  $K_0$  devient une homographie de  $\mathbf{P}^2$  qui permute  $a, b, c$  et fixe  $d$ . À un scalaire près c'est l'homographie  $\sigma$  définie par  $X \mapsto Y \mapsto T \mapsto X$ .

Appelons  $F(X, Y, T)$  la nouvelle équation de la quartique. Bien entendu, on peut déterminer  $F$  par le calcul à partir de l'équation de la quartique affine, mais on peut aussi (presque) le faire sans calculs en tenant compte du fait qu'elle admet le triangle  $abc$  comme triangle d'inflexion et qu'elle est stable par  $\sigma$ . C'est le lemme suivant :

**2.1 Lemme.** *Soit  $F$  une quartique de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ . On suppose que les points  $a, b, c$  sont des inflexions de  $F$  et que les droites  $(ca), (ab), (bc)$  sont les tangentes inflexionnelles en  $a, b, c$ . On suppose de plus que  $F$  est stable par  $\sigma$ . On peut écrire  $F$  sous la forme :*

$$F(X, Y, T) = X^3Y + Y^3T + T^3X + AXYT(X + Y + T).$$

*Démonstration.* Regardons le point  $c$ . Dire qu'il est sur  $K$  signifie que  $F$  n'a pas de terme en  $T^4$ . Pour trouver la tangente en  $c$ , on se place dans le plan affine  $t = 1$  en étudiant la courbe  $f(x, y) = F(x, y, 1)$ . La tangente est alors donnée par les termes<sup>4</sup> de degré 1 en  $x, y$  (donc les termes en  $XT^3$  et  $YT^3$  de  $F$ ) et dire que c'est la droite  $(bc)$  d'équation  $X = 0$  c'est dire que le terme en  $YT^3$  est nul. Dire que  $c$  est un point d'inflexion signifie que, si on coupe par la tangente  $x = 0$ , la multiplicité d'intersection est  $\geq 3$ , c'est-à-dire qu'il

<sup>4</sup>Si  $f(x, y) = ax + by + \dots$ , et si on coupe la courbe par  $ax + by = 0$ , comme il ne reste que des termes de degré  $\geq 2$  la multiplicité d'intersection est  $\geq 2$ .



n'y a pas de terme en  $y^2$  (donc de terme en  $Y^2T^2$ ). En appliquant le même raisonnement en  $a$  et  $b$ , et en tenant compte de la stabilité de  $F$  par  $\sigma$ , on obtient la forme annoncée (car  $F$  n'est définie qu'à un scalaire près).

### 2.2.2 Automorphismes et inflexions : premier épisode

Dans un premier temps nous supposons que  $K$  est la courbe d'équation  $F(X, Y, T) = X^3Y + Y^3T + T^3X + AXYT(X + Y + T) = 0$ .

Les automorphismes d'une courbe algébrique  $C$  plongée<sup>5</sup> dans  $\mathbf{P}^2$  sont les homographies du plan qui conservent  $C$ . Elles forment un groupe qu'on notera  $G$  dans le cas de la courbe de Klein. Comme  $G$  est un sous-groupe de  $PGL(3, \mathbf{C})$  et que ce groupe est isomorphe à  $PSL(3, \mathbf{C})$  (le quotient est  $\mathbf{C}^*/\mathbf{C}^{*3}$ , cf. [Perrin1]), on peut supposer que l'image réciproque de  $G$  dans  $GL(3, \mathbf{C})$  est formée de matrices de déterminant 1. Nous allons en exhiber trois et étudier le groupe  $G$ .

Le premier automorphisme de  $K$  a déjà été vu : c'est la permutation circulaire des coordonnées :  $x \mapsto y \mapsto t \mapsto x$ . Il s'agit d'un automorphisme

d'ordre 3, de matrice  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Cet automorphisme permute les trois

sommets  $a, b, c$  du triangle d'inflexions. Une bonne partie de notre travail va consister à regarder l'action de  $G$  sur l'ensemble  $I$  de ses inflexions. Il est clair que si  $m$  en est une et si  $g$  est dans  $G$ ,  $g(m)$  est aussi une inflexion (car la multiplicité d'intersection est conservée par les homographies). Autrement dit  $G$  permute l'ensemble  $I$  et il est intéressant de chercher le stabilisateur d'une inflexion, disons par exemple  $a$ . C'est le sous-groupe  $G_a$  des  $g \in G$  tels que  $g(a) = a$ . On a la proposition suivante :

#### 2.2 Proposition.

1) Si la constante  $A$  est non nulle, le stabilisateur  $G_a$  est réduit à l'élément neutre.

2) On suppose  $A = 0$ . Le stabilisateur  $G_a$  est un groupe d'ordre 7 engendré

par l'homographie de matrice  $\rho = \begin{pmatrix} \zeta^4 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}$  où  $\zeta$  est une racine primitive

7-ème de l'unité (disons  $\zeta = e^{2i\pi/7}$ ).

---

<sup>5</sup>On peut aussi considérer les automorphismes de la courbe abstraite  $C$ , indépendamment d'un plongement. Dans le cas présent c'est la même chose car le plongement d'une courbe lisse de genre 3 non hyperelliptique dans  $\mathbf{P}^2$  est le plongement canonique, ce qui implique que tout automorphisme de la courbe s'étend en un automorphisme de  $\mathbf{P}^2$ .

*Démonstration.* 1) Soit  $g \in G_a$ . Notons que si on a  $g(a) = a$  on a aussi  $g(b) = b$  et  $g(c) = c$ . En effet, si  $g$  fixe  $a$  il transforme la tangente  $T_a$  en  $a$  en elle-même. Comme  $T_a$  recoupe  $K$  en  $b$ , cela implique que  $c$  est fixe lui aussi, et de même pour  $b$ .

Attention, dire qu'on a  $g(a) = a$  dans le projectif cela veut dire  $g(a) = \lambda a$  en vectoriel : autrement dit  $a$  est un vecteur propre de  $g$ . Cela signifie

que dans la base canonique  $g$  est diagonale :  $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ , avec  $\lambda, \mu, \nu$

non nuls et on peut supposer  $g$  de déterminant 1. Écrivons que cette matrice conserve  $K$ . Cela signifie que  $F(\lambda X, \mu Y, \nu T)$  est proportionnel à  $F(X, Y, T)$ . Or, on a  $F(\lambda X, \mu Y, \nu T) = \lambda^3 \mu X^3 Y + \mu^3 \nu Y^3 T + \nu^3 \lambda T^3 X + A \lambda \mu \nu X Y T (\lambda X + \mu Y + \nu T)$ . Si  $A$  est non nul, on doit donc avoir  $\lambda^3 \mu = \mu^3 \nu = \nu^3 \lambda = \lambda^2 \mu \nu = \lambda \mu^2 \nu = \lambda \mu \nu^2$ . On voit aussitôt que cela impose  $\lambda = \mu = \nu$ , de sorte que  $g$  est une homothétie vectorielle, donc l'identité dans le projectif.

2) Supposons maintenant  $A = 0$ . Il reste seulement les relations  $\lambda^3 \mu = \mu^3 \nu = \nu^3 \lambda$ . Intéressons-nous aux rapports  $k = \lambda/\mu$  et  $l = \mu/\nu$  en notant qu'on a alors  $\lambda/\nu = kl$ . On a  $k^3 = \frac{1}{l}$  et  $l^3 = kl$ , d'où l'on déduit  $l^2 = k$  et  $l^6 = \frac{1}{l}$ . On voit donc que  $l$  est une racine septième de l'unité, qui est primitive si  $g$  n'est pas l'identité. Appelons  $\zeta$  cette racine. On a donc  $\mu = \zeta \nu$  et  $\lambda = \zeta^3 \nu$ . Comme le déterminant de  $g$  vaut 1, on a  $\zeta^4 \nu^3 = 1$ , ce qui donne  $\nu^3 = \zeta^3$  donc  $\nu = \zeta$ , ou  $\nu = j\zeta$  ou  $\nu = j^2\zeta$ . On en déduit que la matrice est égale à la matrice proposée ou à son produit par  $j$  ou  $j^2$ , ce qui, dans  $PGL(3, \mathbf{C})$ , est la même chose.

Réciproquement, on vérifie que  $\lambda = \zeta^4$ ,  $\mu = \zeta^2$  et  $\nu = \zeta$  satisfait aux conditions requises.

### 2.2.3 Calcul des inflexions de $K$

Dans le cas d'une courbe projective, on a une méthode pour trouver toutes les inflexions de manière globale. Notons  $F'_X, F''_{XY}$ , etc. les dérivées partielles de  $F(X, Y, T)$ . On a le résultat suivant :

**2.3 Proposition.** *Soit  $F(X, Y, T)$  une courbe projective lisse de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ . Ses inflexions sont les intersections de  $F$  et de sa hessienne qui est la courbe définie par le polynôme suivant :*

$$H(X, Y, T) = \begin{vmatrix} F''_{X^2} & F''_{XY} & F''_{XT} \\ F''_{YX} & F''_{Y^2} & F''_{YT} \\ F''_{TX} & F''_{TY} & F''_{T^2} \end{vmatrix}.$$

*Si  $F$  est homogène de degré  $d$ ,  $H$  est homogène de degré  $3(d - 2)$ , de sorte*

que le nombre d'inflexions, comptées convenablement, est  $3d(d-2)$  (soit 24 lorsque  $d$  est égal à 4).

*Démonstration.* On calcule le déterminant en multipliant la première ligne par  $X$ , la seconde par  $Y$  et en les ajoutant à la troisième multipliée par  $T$ , puis on applique la formule d'Euler. Il apparaît un  $d-1$  en facteur et la troisième ligne est remplacée par  $F'_X, F'_Y, F'_T$ . On refait la même chose avec les colonnes. La dernière colonne devient  $F'_X, F'_Y, F$  et en développant modulo  $F$  il reste le polynôme vu précédemment :

$$F''_{X^2}(F'_Y)^2 - 2F''_{XY}F'_XF'_Y + F''_{Y^2}(F'_X)^2.$$

**2.4 Corollaire.** *Le cardinal du groupe  $G$  est inférieur ou égal à 24 si  $A$  est non nul (resp. à 168 si  $A$  est nul).*

*Démonstration.* Cela résulte de la formule des classes :  $|G| = |\omega(a)| \times |G_a|$  où  $\omega(a)$  désigne l'orbite de  $a$ . Comme les éléments de  $G$  permutent les points d'inflexion, le cardinal de  $\omega(a)$  est inférieur ou égal à 24 (et ce sera 24 si et seulement si l'opération est transitive). Par ailleurs, on a vu que le cardinal de  $G_a$  vaut 1 ou 7 selon les cas, d'où le résultat.

## 2.3 La courbe de Klein : la vraie

On va désormais travailler avec la courbe qui possède le groupe d'automorphismes le plus gros possible, donc celle qui correspond à  $A = 0$  :

**2.5 Définition.** *La quartique de Klein  $K$  est la courbe du plan projectif complexe définie par le polynôme  $F(X, Y, T) = X^3Y + Y^3T + T^3X$ .*

**2.6 Remarque.** Dans le cas de la quartique de Klein on a  $H(X, Y, T) = 54(5X^2Y^2T^2 - YT^5 - TX^5 - XY^5)$ . On retrouve bien les points  $a, b, c$ . Pour l'heure on sait qu'on a  $3 \leq |I| \leq 24$ . On pourrait d'ailleurs montrer directement à partir de ces équations qu'il y a exactement 24 points d'inflexion dans  $K$ .

**2.7 Remarque.** La droite  $X + Y + T = 0$  est bitangente à  $K$  en les points  $(1, j, j^2)$  et  $(1, j^2, j)$ .

**2.8 Remarque.** On peut montrer que les seuls points rationnels de  $K$  sont les trois points  $a, b, c$  du triangle d'inflexion initial. Cela implique d'ailleurs le théorème de Fermat pour l'exposant 7. En effet, si on a une solution entière de l'équation de Fermat  $u^7 + v^7 + w^7 = 0$ , avec  $u, v, w$  non nuls, on obtient un point rationnel de  $K$  en prenant  $x = u^3w, y = v^3u, t = w^3v$ , calcul très proche de celui effectué ci-dessus pour calculer  $G_a$ .

### 2.3.1 Une involution

On a vu que la variante réelle  $K_0$  de la courbe de Klein admettait aussi des automorphismes d'ordre 2 (les symétries axiales du triangle équilatéral). On retrouve ces symétries pour  $K$ , mais elles sont un peu plus délicates à écrire. On peut les obtenir à partir des symétries de la courbe réelle par conjugaison, mais le calcul est un peu saumâtre. Il est plutôt plus simple de chercher  $\tau$  comme une involution, qui conserve  $K$  et vérifie  $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$ , voir Annexe 2.

On trouve l'involution suivante :  $\tau = k \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \mu & \nu & \lambda \\ \nu & \lambda & \mu \end{pmatrix}$ , avec  $k = \frac{i}{\sqrt{7}}$  et  $\lambda = \zeta - \zeta^{-1}$ ,  $\mu = \zeta^2 - \zeta^{-2}$ ,  $\nu = \zeta^4 - \zeta^{-4}$ .

### 2.3.2 Retour aux inflexions

L'étude de l'opération de  $G$  sur  $I$  va nous permettre de montrer le résultat principal :

**2.9 Théorème.** *Le groupe  $G$  a 168 éléments.*

*Démonstration.* En vertu de la formule des classes, il suffit de montrer que  $I$  a exactement 24 éléments et que  $G$  opère transitivement sur  $I$ . On pose  $I' = I - \{a, b, c\}$ . Comme l'involution  $\tau$  envoie  $a$  sur un point qui n'est égal à aucun des points  $a, b, c$ , comme le montre sa matrice<sup>6</sup>, on voit que  $I'$  est non vide. Soit  $d \in I'$ .

On regarde le sous-groupe  $H$  de  $G$  engendré par  $\rho$  et  $\sigma$ . Comme on a  $\sigma^{-1}\rho\sigma = \rho^2$  (la conjugaison par  $\sigma$  permute les termes diagonaux et on conclut avec  $\zeta^8 = \zeta$ ), on peut écrire tous les éléments de  $H$  sous la forme  $\sigma^i\rho^j$  avec  $0 \leq i \leq 2$  et  $0 \leq j \leq 6$ . Le groupe  $H$  est donc de cardinal 21. Comme il laisse stable  $\{a, b, c\}$ , il opère sur  $I'$  et l'orbite  $\Omega$  de  $d$  sous ce groupe est de cardinal diviseur de 21. Dans cette opération, le sous-groupe  $H_1 = \langle \rho \rangle$  ne fixe personne (les seuls points fixes, i.e. vecteurs propres, des puissances de  $\rho$  sont  $a, b, c$ ). L'orbite  $\Omega_1$  de  $d$  sous  $H_1$  est donc de cardinal 7 et contenue dans  $\Omega$ . Par ailleurs, le sous-groupe  $H_2 = \langle \sigma \rangle$  opère aussi sur  $I'$  et il n'a pas de point fixe (ses points fixes sont  $(1, 1, 1)$  qui n'est pas sur  $K$  et  $(1, j, j^2)$  et  $(1, j^2, j)$  qui sont les contacts de la bitangente  $X + Y + T$  donc ne sont pas des inflexions!). Ses orbites ont donc 3 éléments et il ne peut pas laisser stable  $\Omega_1$ . Il en résulte que l'orbite  $\Omega$  contient strictement  $\Omega_1$ , donc est de

<sup>6</sup>Une variante consiste à regarder les points  $\tau(a)$ ,  $\tau(b)$ ,  $\tau(c)$  et leurs orbites sous  $\langle \rho \rangle$ . Comme ces points sont réels et  $\rho$  à coefficients complexes, on vérifie sans peine que les orbites sont distinctes et on a le résultat.

cardinal  $> 7$ . Comme son cardinal divise 21, c'est 21 et on voit que  $I'$  est de cardinal 21 et que  $G$  est transitif sur  $I$ .

**2.10 Remarque.** En fait il y a un groupe à 336 éléments qui conserve  $K$ . Il est formé d'homographies et d'anti-homographies, et s'obtient en rajoutant à  $G$  la conjugaison :  $(x, y, t) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  et ses produits avec les éléments de  $G$ . On en aura une description plus géométrique dans la quatrième partie.

**2.11 Remarque.** La courbe projective  $K$  a 24 inflexions, mais 6 seulement sont réelles : les trois points  $a, b, c$  du repère, ainsi que leurs images  $a', b', c'$  par  $\tau$  (qui est réelle en dépit des apparences, voir Annexe 2). Les 18 autres inflexions sont les images de  $a', b', c'$  par le sous-groupe à 21 éléments engendré par  $\rho$  et  $\sigma$ . Mais dans ce groupe les seuls éléments réels (y compris à un scalaire près) sont  $\text{Id}, \sigma, \sigma^2$ . C'est évident car ces matrices sont les matrices de permutation affublées de  $\zeta, \zeta^2, \zeta^4$ .

Cela montre aussi que la courbe réelle  $K_0$  vue au premier paragraphe n'a que les 6 inflexions évidentes. En effet, le changement de repère qui transforme  $K_0$  en  $K$  étant réel, cela vient de la propriété analogue pour  $K$ .

### 2.3.3 Les bitangentes

**2.12 Corollaire.** *La courbe  $K$  admet 28 bitangentes qui forment une orbite sous  $G$ . Le stabilisateur de la bitangente  $X+Y+T$  est le sous-groupe  $\langle \sigma, \tau \rangle$ , isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ .*

*Démonstration.* Le groupe opère sur les bitangentes et on voit aussitôt que le stabilisateur de la bitangente  $X+Y+T$  contient le sous-groupe  $\langle \sigma, \tau \rangle$ . On montre que le stabilisateur est égal à ce sous-groupe (cf. Annexe 3). L'orbite de cette bitangente est donc de cardinal 28. On conclut avec la proposition suivante :

**2.13 Proposition.** *Le nombre de bitangentes d'une courbe plane lisse de degré  $d$  est inférieur ou égal à  $\frac{d(d-2)(d-3)(d+3)}{2}$ . Il est égal à ce nombre si les bitangentes sont comptées avec leurs multiplicités. Une quartique lisse a au plus 28 bitangentes distinctes.*

*Démonstration.* Cela résulte des formules de Plücker, cf. [Fischer]. Une courbe lisse  $C$  de degré  $d$  est de classe  $d^* = d(d-1)$  (cela signifie que l'on peut mener  $d(d-1)$  tangentes à  $C$  d'un point extérieur). La courbe duale est donc de degré  $d^* = d(d-1)$  et la formule de Plücker affirme qu'on a  $d^*(d^*-1) = d+3i+2b$  où

$i$  est le nombre d'inflexions et  $b$  le nombre de bitangentes, comptées convenablement (les bitangentes et les inflexions sont respectivement les points doubles et les rebroussements de la courbe duale). Cette formule s'écrit encore  $d^3(d-2) = 2b+3i$ . Comme on a vu avec la hessienne qu'on a  $i = 3d(d-2)$ , on en déduit la formule annoncée.

**2.14 Remarque.** Dans le cas de la courbe de Klein on peut montrer à la main qu'il y a exactement 28 bitangentes, voir Annexe 3.

### 2.3.4 Simplicité

**2.15 Théorème.** *Le groupe  $G$  est simple.*

*Démonstration.* La preuve consiste essentiellement à passer en revue les éléments de  $G$  et leurs conjugués.

Considérons les éléments d'ordre 7 du groupe  $G$ . On a vu qu'il y a déjà les éléments des stabilisateurs des 24 inflexions. Si un élément  $\rho'$  d'ordre 7 fixe une inflexion, il en fixe trois (comme dans le cas de  $a, b, c$ ). Comme  $G$  est transitif sur  $I$ ,  $\rho'$  est conjugué d'un  $\rho^i$ , il a donc exactement trois droites propres et fixe seulement ces trois inflexions. Il y a ainsi 6 éléments d'ordre 7 par paquet de 3 inflexions (on exclut le neutre), et cela fait  $6 \times 8 = 48$  éléments d'ordre 7. De plus, un élément  $g$  d'ordre 7 est nécessairement dans le stabilisateur d'une inflexion. En effet, les orbites du sous-groupe  $\langle g \rangle$  sur  $I$  sont de cardinal 1 ou 7 et elles ne peuvent être toutes de cardinal 7 (car 7 ne divise pas 24). Il y a donc une orbite de cardinal 1, i.e. un point fixe.

En bref, on a 48 éléments d'ordre 7, qui sont exactement les éléments qui fixent les inflexions.

De la même façon, pour chaque bitangente  $T$ , il y a 2 éléments d'ordre 3 qui laissent stable  $T$  et un élément d'ordre 3 laisse nécessairement stable une bitangente (même argument que ci-dessus : 3 ne divise pas 28), et une seule (car un élément d'ordre 3 ne fixe pas plusieurs bitangentes, cf. Annexe 3). Il y a donc 56 éléments d'ordre 3.

Passons aux involutions (éléments d'ordre 2). On peut montrer qu'il y en a 21, toutes conjuguées, voir ci-dessous. On peut aussi raisonner directement :

1) Une involution et un élément  $\rho$  d'ordre 7 ne commutent pas. Sinon, l'involution permuterait les points fixes de  $\rho$ , i.e. un triangle d'inflexion. Or il y a 3 points dans un triangle, donc elle en fixerait nécessairement un et on a vu que le stabilisateur des inflexions est uniquement formé d'éléments d'ordre 7.

2) Une involution et un élément d'ordre 3 ne commutent pas. En effet, si  $\sigma'$  est un élément d'ordre 3, il stabilise une bitangente et une seule et, comme

$G$  est transitif sur les bitangentes, on peut supposer que c'est  $T$  et que  $\sigma'$  c'est  $\sigma$ . Si  $\tau'$ , d'ordre 2, commute avec  $\sigma$ , il stabilise aussi  $T$ . Or, on a calculé le stabilisateur d'une bitangente et on a vu que c'était le groupe  $\langle \sigma, \tau \rangle$ , isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ , ce qui contredit le fait que  $\sigma$  et  $\tau'$  commutent.

Regardons alors les conjugués d'une involution sous l'action du groupe à 21 éléments  $\langle \rho, \sigma \rangle$ . Le centralisateur ne contenant aucun élément d'ordre 3 ou 7 est réduit à l'élément neutre, donc l'orbite est de cardinal 21, autrement dit, une involution admet (au moins) 21 conjugués.

On peut alors prouver le théorème. Supposons que  $G$  contienne un sous-groupe distingué  $N$ , non réduit à l'élément neutre. Nous allons montrer que  $N$  est égal à  $G$ . Comme le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe, il suffit de montrer qu'on a  $|N| > 84$ . Dès que  $N$  contient un élément  $n$ , il contient tous ses conjugués  $gn g^{-1}$ .

Si  $N$  ne contient pas d'élément d'ordre 7 ni d'ordre 3, son cardinal n'est ni multiple de 7, ni multiple de 3. Comme il divise 168, c'est donc un diviseur de 8. Le sous-groupe contient alors une involution, donc aussi ses 21 conjuguées et c'est absurde pour un sous-groupe d'ordre  $\leq 8$ .

Supposons maintenant que  $N$  contienne un élément d'ordre 7 (resp. 3). Alors, je dis qu'il les contient tous. En effet, si  $N$  contient, par exemple, l'élément  $\rho$ , qui fixe  $a$ , il contient tout le fixateur de  $a$  (car ce groupe est cyclique). Si  $m$  est une autre inflexion, il existe un  $g \in G$  tel que  $g(a) = m$ , mais alors  $g\rho g^{-1}$ , qui est contenu dans  $N$ , fixe  $m$ . Le sous-groupe  $N$  contient tous les fixateurs des inflexions, donc tous les éléments d'ordre 7. Le raisonnement est identique pour les éléments d'ordre 3. Mais alors, le cardinal de  $N$  est au moins  $48 + 1$  (resp.  $56 + 1$ ), donc c'est 56, 84 ou 168 (resp. 84 ou 168). Le cas 84 est écarté car  $N$  contiendrait à la fois un élément d'ordre 7 et un d'ordre 3 donc au moins 105 éléments.

Il reste le cas  $|N| = 56$ . Dans ce cas, outre les éléments d'ordre 7,  $N$  contiendrait un élément d'ordre 2, donc il en contiendrait 21 et c'est absurde car  $48 + 21 > 56$ .

**2.16 Remarque.** Montrons qu'il n'y a que 21 involutions, toutes conjuguées. D'abord il y a une involution dont la classe de conjugaison contient exactement 21 éléments. En effet, on prend un 2-sous-groupe de Sylow<sup>7</sup>, soit  $S$ . Il a un centre, qui contient un élément d'ordre 2. Le centralisateur de cet élément est donc d'ordre 8 (on a vu qu'il ne contenait pas d'éléments d'ordre 3 et 7). Donc son orbite a 21 éléments. Ensuite, s'il y avait des classes plus grandes, elles auraient 42 ou 84 éléments. Le cas 84 est exclu par comptage. Pour 42, avec l'orbite précédente, cela donnerait 63 éléments d'ordre 2, donc il n'y

---

<sup>7</sup>C'est-à-dire un sous-groupe de cardinal 8, cf. [Perrin1].

aurait rien d'autre ( $48 + 56 + 63 + 1 = 168$ ). Les Sylow n'auraient alors que des éléments d'ordre 2, donc seraient abéliens. Par ailleurs, le centralisateur d'une involution aurait 4 éléments. C'est absurde.

On peut montrer aussi qu'il y a 21 2-sous-groupes de Sylow. En effet, il y en a 1, 3, 7 ou 21. Comme  $G$  est simple, 1 et 3 sont exclus, voir [Perrin1] Chapitre 1, exercice E 2 c). S'il y en avait 7, il y aurait au plus 49 éléments d'ordre une puissance de 2. Comme les éléments de  $G$  sont d'ordre 3, 7 ou une puissance de 2 (car il n'y a pas de commutation entre des éléments d'ordre 2, 3, 7), on aurait seulement  $48 + 56 + 49 + 1 = 154$  éléments.

## 2.4 Commentaires

### 2.4.1 Automorphismes

Dans ce paragraphe nous expliquons en quoi la présence de ces 168 automorphismes est exceptionnelle et donc en quoi la courbe de Klein est particulièrement belle.

En ce qui concerne les automorphismes d'une courbe algébrique  $C$  plongée dans  $\mathbf{P}^2$ , les choses sont assez différentes selon le degré  $d$  de  $C$  (ou encore son genre  $g$ , voir plus bas, cela revient au même car degré et genre sont liés par la formule  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ ). Lorsque  $d$  vaut 1, la courbe est une droite  $D$  et le groupe des homographies de  $\mathbf{P}^2$  qui conservent une droite est très gros. Par dualité c'est le même groupe que celui des homographies qui fixent un point qui est un groupe algébrique<sup>8</sup> de dimension 6. Pour  $d = 2$ , la courbe  $C$  est une conique définie par une forme quadratique  $q$  et son groupe d'automorphismes est le groupe  $O^+(q)$ , c'est un groupe algébrique de dimension 3. Pour  $d \geq 3$  en revanche, il n'y a plus qu'un nombre fini d'automorphismes. En effet, on a le résultat suivant :

**2.17 Lemme.** *Soit  $C$  une courbe algébrique plane lisse de degré  $d \geq 3$ . On suppose que  $C$  admet exactement  $3d(d-2)$  points d'inflexion. Alors le groupe des automorphismes de  $C$  (comme courbe de  $\mathbf{P}^2$ ) est fini.*

*Démonstration.* Le groupe  $G$  des homographies qui conservent  $C$  opère sur l'ensemble  $I$  de ses points d'inflexions ce qui fournit un homomorphisme  $\varphi$  de  $G$  dans le groupe  $\mathfrak{S}(I)$  des permutations de  $I$ . Il suffit de montrer que  $I$  contient un repère projectif pour assurer que  $\varphi$  est injectif, donc  $G$  fini. Pour cela on prend deux inflexions  $a, b$ . Comme la droite  $(ab)$  coupe  $C$  en au plus

---

<sup>8</sup>L'opération n'est pas fidèle ; en restriction à la droite on obtient un groupe de dimension 3.



$d$  points, il y a une inflexion  $c$  en dehors de cette droite. Le nombre de points de  $C$  sur les trois côtés du triangle  $abc$  étant au plus  $3(d-1) < 3d(d-2)$ , il y a une inflexion  $m$  qui n'est pas sur ces droites et  $a, b, c, m$  est un repère de  $\mathbf{P}^2$ .

Dans le cas  $d = 3$ , on a affaire à une courbe elliptique et on montre que  $C$  contient exactement 9 points d'inflexion. On notera que, dans ce cas, les choses sont différentes selon qu'on regarde la courbe abstraite (dont le groupe d'automorphismes est essentiellement isomorphe à la courbe, donc de dimension 1) et la courbe plongée qui n'a qu'un nombre fini d'automorphismes. À partir du degré 4 (ou du genre 3) le groupe des automorphismes de  $C$ , qu'elle soit vue comme courbe abstraite ou plongée, est un groupe fini, voir [Hartshorne] IV Exercice 2.5 :

**2.18 Théorème. (Hurwitz)** *Si  $C$  est une courbe algébrique lisse de genre  $g \geq 2$  et soit  $\text{Aut}(C)$  son groupe d'automorphismes (comme courbe abstraite). Alors on a  $|\text{Aut}(C)| \leq 84(g-1)$ .*

Dans le cas de la courbe de Klein, le genre est 3 et la borne est donc de 168 : elle est donc atteinte, ce qui est exceptionnel (les plus petits genres pour lesquels c'est vrai sont 3, 7, 14, 17, voir l'article de A. M. Macbeath dans [Levy]).

#### 2.4.2 Le groupe d'ordre 168 est caractéristique de la quartique de Klein

**2.19 Proposition.** *Soit  $X$  une quartique lisse de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ . On suppose que le groupe d'automorphismes  $G$  de  $X$  est d'ordre 168. Alors,  $X$  est la quartique de Klein.*

*Démonstration.* On se contente de prouver ce résultat lorsque les 24 points d'inflexion de  $X$  sont supposés distincts. Soit  $H = \langle h \rangle$  un sous-groupe d'ordre 7 de  $G$ . Il opère sur l'ensemble  $I$  des 24 inflexions de  $X$ . Comme les orbites de  $H$  sont de cardinal 1 ou 7, il y a nécessairement trois points  $a, b, c$  de  $I$  fixes par  $H$ . En fait, il y en a exactement trois. En effet, sinon, vu le découpage en orbites, il y en aurait au moins 10. Mais, comme l'homographie  $h$  est d'ordre 7, l'application linéaire  $\hat{h}$  dont elle provient est diagonalisable (son polynôme minimal n'a que des racines simples) et n'est pas une homothétie. Il en résulte que  $\hat{h}$  a soit trois vecteurs propres indépendants (donc trois points fixes) soit un plan propre et une droite propre. Dans ce cas, le plan propre de  $\hat{h}$  définit une droite projective qui coupe  $X$  en quatre points au plus. Le nombre de points fixes de  $h$  dans  $X$  est donc  $\leq 5$ .

On montre ensuite que  $a, b, c$  est un triangle d'inflexions. En effet, si  $a$  est fixe par  $h$ , la tangente  $T$  en  $a$  est stable et elle recoupe  $X$  en un point fixe lui aussi : c'est donc  $b$  ou  $c$ . Comme on a un triangle d'inflexions, un raisonnement, analogue à ceux menés en 2.1 et en 2.2, montre que la courbe a pour équation  $\alpha X^3 Y + \beta Y^3 T + \gamma T^3 X$ . Le calcul de 2.2 montre alors qu'il n'y a pas d'autres automorphismes de la courbe fixant  $a$  que ceux de  $H$ . Il en résulte que  $G$  est transitif sur  $I$ . L'image par un élément de  $G$  d'un triangle d'inflexions en est un autre, et il y en a donc 8 dans  $I$ , de sorte que leur stabilisateur est de cardinal 21. Le stabilisateur de  $a, b, c$  contient donc un élément d'ordre 3 qui permute circulairement  $a, b, c$ . Il en résulte que les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  sont égaux et on a le résultat.

### 2.4.3 Groupes simples

Rappelons qu'un groupe est dit simple s'il n'a pas de sous-groupe distingué non trivial. Les groupes simples jouent un rôle essentiel en théorie des groupes. Si un groupe  $G$  a un sous-groupe distingué  $N$ , il y a un groupe quotient  $G/N$  et on peut espérer "dévisser" le groupe  $G$  en ramenant son étude à celle de  $N$  et de  $G/N$  qui sont plus petits. Si  $G$  est simple, on ne peut faire cela : les groupes simples sont en quelque sorte les particules élémentaires de la théorie et on doit les connaître tous. On sait effectivement les classifier depuis une vingtaine d'années (mais cela représente 10000 pages de texte mathématique!). Les plus petits, en dehors des groupes triviaux  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  pour  $p$  premier, sont le groupe alterné  $\mathfrak{A}_5$  (groupe de l'icosaèdre) qui a 60 éléments et le groupe  $G$  qui en a 168.

Il est bien connu qu'il n'y a qu'un seul groupe simple à 168 éléments et qu'il a deux habits différents, étant isomorphe à la fois à  $PSL(2, \mathbf{F}_7)$  et  $PSL(3, \mathbf{F}_2)$ , cf. [Perrin1]. Dans le paragraphe suivant, nous identifions le groupe  $G$  à  $GL(3, \mathbf{F}_2)$  (ou  $PSL(3, \mathbf{F}_2)$ , c'est pareil), groupe des matrices inversibles  $3 \times 3$  sur le corps à 2 éléments. Pour comprendre l'aspect  $PSL(2, \mathbf{F}_7)$ , voir Annexe 4 ou [Bavard].

## 2.5 L'isomorphisme entre $G$ et $GL(3, \mathbf{F}_2)$

### 2.5.1 L'anneau $A$ et son quotient $\mathbf{F}_8$

Le groupe  $G$ , contenu dans  $PGL(3, \mathbf{C})$ , se relève en un groupe noté encore  $G$  et contenu dans  $SL(3, \mathbf{C})$ , engendré par  $\rho, \sigma, \tau$ . En fait, ces matrices sont à coefficients dans un sous-anneau  $A$  de  $\mathbf{C}$ , précisément le sous-anneau  $A = \mathbf{Z}[\zeta]_{2\alpha+1}$  où l'on a posé  $\alpha = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ , donc  $2\alpha + 1 = i\sqrt{7}$ .

L'anneau  $A$  est le localisé de  $\mathbf{Z}[\zeta]$  obtenu en inversant  $2\alpha + 1$ . On a alors le lemme suivant :

**2.20 Lemme.** *Le quotient de  $A$  par l'idéal  $(2, \zeta^3 + \zeta + 1)$  est le corps  $\mathbf{F}_8$ .*

*Démonstration.* Rappelons qu'on a  $\mathbf{Z}[\zeta] \simeq \mathbf{Z}[X]/(X^6 + X^5 + \dots + X + 1)$ . Le corps  $\mathbf{F}_8$  est formé de 7 racines septièmes de 1 et de 0. Comme on a, sur  $\mathbf{F}_2$ ,  $X^6 + X^5 + \dots + X + 1 = (X^3 + X + 1)(X^3 + X^2 + 1)$  et que ces polynômes sont irréductibles,  $\mathbf{F}_8$  est le corps de rupture de chacun de ces polynômes. Appelons  $\zeta$  une racine du premier. On a donc  $\zeta^3 + \zeta + 1 = 0$  et donc aussi  $\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 = 0$ . On envoie  $\mathbf{Z}[X]$  dans  $\mathbf{F}_8$  en envoyant  $X$  sur  $\zeta$ . Ce morphisme se factorise par  $\mathbf{Z}[\zeta]$ . Comme on a, dans  $\mathbf{F}_8$ ,  $2\alpha + 1 = 1$ , le morphisme se factorise aussi par le localisé et on vérifie que son noyau est l'idéal annoncé.

### 2.5.2 Le sous-groupe de $GL(3, \mathbf{F}_8)$

On considère l'homomorphisme de réduction  $\pi : GL(3, A) \rightarrow GL(3, \mathbf{F}_8)$ . Comme  $G$  est simple il est isomorphe à son image, notée encore  $G$ . On appelle encore  $\rho$  et  $\sigma$  les images des éléments correspondants qui s'écrivent de la même manière dans  $\mathbf{F}_8$ . Pour  $\tau$  on considère  $\tau' = -i\sqrt{7}\tau = -(2\alpha + 1)\tau$  qui s'envoie sur le même élément de  $\mathbf{F}_8$ . On appelle encore  $\tau$  l'image. Sur  $\mathbf{F}_8$  on a la formule :

$$\tau = \begin{pmatrix} \zeta^{-2} & \zeta^3 & \zeta^{-1} \\ \zeta^3 & \zeta^{-1} & \zeta^{-2} \\ \zeta^{-1} & \zeta^{-2} & \zeta^3 \end{pmatrix}.$$

Cela résulte de la table d'addition de  $\mathbf{F}_8$  (qui vient de  $\zeta^3 + \zeta + 1 = 0$ ).

### 2.5.3 La conjugaison

On va montrer le théorème suivant :

**2.21 Théorème.** *Il existe  $p \in GL(3, \mathbf{F}_8)$  tel que les trois matrices  $\rho' = p\rho p^{-1}$ ,  $\sigma' = p\sigma p^{-1}$  et  $\tau' = p\tau p^{-1}$  soient dans  $GL(3, \mathbf{F}_2)$ . Le groupe  $G$  est isomorphe à  $GL(3, \mathbf{F}_2)$ .*

*Démonstration.* La dernière assertion est évidente puisque  $pGp^{-1}$  est inclus dans  $GL(3, \mathbf{F}_2)$  et que tous deux sont de cardinal 168.

Pour la première, comme  $\sigma$  est déjà dans  $GL(3, \mathbf{F}_2)$  on va chercher un  $p$  qui commute à  $\sigma$ . Un calcul immédiat montre que  $p$  est alors de la forme suivante :  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ , matrice dont le déterminant est  $a^3 + b^3 + c^3 + abc$  qui

va valoir 1 si on prend  $\{a, b, c\} = \{\zeta^{-1}, \zeta^{-2}, \zeta^3\}$  (il vaudrait 0 avec  $\zeta, \zeta^2, \zeta^4$ ). Pour trouver  $p$ , on peut (par exemple) écrire que  $pgp^{-1}$  est invariant par l'homomorphisme de Frobenius  $F(t) = t^2$  dans le cas de  $g = \rho$  et  $\tau$ . Cela conduit aux conditions  $p^{-1}F(p)F(g) = gp^{-1}F(p)$ . La matrice  $p^{-1}F(p)$  est de la même forme que  $p$  et le calcul montre qu'elle doit être égale à  $\sigma$ . Là encore un petit calcul montre qu'il faut prendre  $a = \zeta^{-1}$ ,  $b = \zeta^3$ ,  $c = \zeta^{-1}$ , c'est-à-dire :

$$p = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & \zeta^3 & \zeta^{-2} \\ \zeta^{-2} & \zeta^{-1} & \zeta^3 \\ \zeta^3 & \zeta^{-2} & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p^{-1} = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & \zeta^{-2} & \zeta^3 \\ \zeta^3 & \zeta^{-1} & \zeta^{-2} \\ \zeta^{-2} & \zeta^3 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer les conjugués de  $\rho$  et  $\tau$  :

$$\rho' = p\rho p^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau' = p\tau p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3 La courbe de Klein vue comme une surface

Dans les deux prochaines sections, on va faire le lien entre la courbe de Klein et la statue du MSRI. Dans cette section on explique uniquement le fait que cette surface possède trois trous. En vérité, ce point est assez banal, car il n'est pas propre à la quartique de Klein, mais vaut pour toute quartique lisse de  $\mathbf{P}^2$ .

#### 3.1 Courbes et surfaces

Une courbe projective complexe  $K$  étant de dimension 1 sur  $\mathbf{C}$  est donc de dimension 2 sur  $\mathbf{R}$ . Par exemple, une droite projective complexe, qui n'est autre qu'une droite affine complexe (donc un plan réel!) à laquelle on adjoint un point à l'infini, est topologiquement une sphère (la sphère de Riemann), comme on le voit par projection stéréographique. Une courbe projective complexe lisse (comme  $K$ ) est ainsi une surface réelle (sans bord), compacte puisque le plan projectif l'est, lisse car la courbe l'est, localement isomorphe à un ouvert de  $\mathbf{C}$  (c'est le théorème des fonctions implicites), donc orientable (à cause de la multiplication par  $i$  dans les plans tangents). C'est ce qu'on appelle une surface de Riemann. Il y a deux théorèmes (tout à fait non triviaux) qui portent sur ces objets :

- Un théorème de classification topologique (cf. [Gramain] ou [Douady]) : une telle surface est homéomorphe soit à une sphère, soit à un tore à  $g$  trous, voir figure 3 ( $g$  est ce qu'on appelle le genre de la surface, c'est 0 pour la sphère).

- Un théorème de représentation (cf. [Reyssat] ou [Douady]), qui inverse la construction précédente : toute surface de Riemann (compacte et connexe) est isomorphe à une courbe algébrique projective (qu'on peut plonger dans  $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ ).

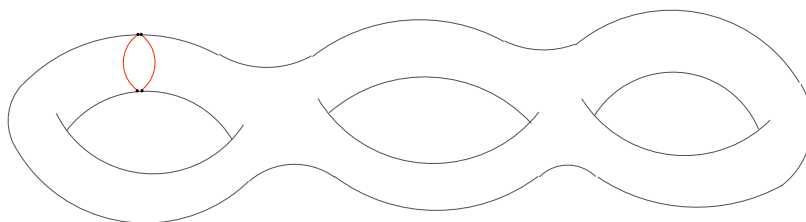


Figure 3: Un tore à trois trous ( $g = 3$ )

## 3.2 Genre et triangulations

Pour calculer le genre d'une surface il y a un moyen topologique simple qui consiste à trianguler la surface. Intuitivement, cela signifie qu'on pave la surface par des triangles (des triangles curvilignes, images par des applications continues injectives de vrais triangles euclidiens), avec des sommets, des arêtes et des faces. Un exemple type de triangulation est obtenu en prenant un polyèdre convexe de  $\mathbf{R}^3$  et en le projetant sur une sphère qui contient le polyèdre à partir d'un point intérieur. On compte le nombre  $f$  de faces de la triangulation, son nombre  $a$  d'arêtes et son nombre  $s$  de sommets. On a alors le théorème suivant :

**3.1 Théorème.** *Le nombre  $\chi = s - a + f$  (appelé caractéristique d'Euler) est indépendant du choix de la triangulation. Si la surface  $S$  est de genre  $g$ , on a, pour toute triangulation de  $S$ ,  $\chi = s - a + f = 2 - 2g$ .*

*Démonstration.* Pour la sphère c'est la fameuse formule d'Euler  $s - a + f = 2$  que nous admettrons, cf. [Perrin2]. Si on admet que la caractéristique d'Euler est indépendante du choix de la triangulation (cf. [Douady], [Reyssat]), le second point est facile par récurrence sur  $g$ . Pour passer de  $g$  à  $g + 1$  on ajoute une anse. On peut le dessiner aisément pour le passage de la sphère

au tore. On commence par étirer la sphère pour en faire une saucisse, dont on rapproche ensuite les extrémités que l'on va recoller pour obtenir le tore. On peut choisir la triangulation de la sphère de façon à recoller les deux morceaux le long de deux triangles. Dans cette opération, les deux faces triangulaires de recollement disparaissent de sorte qu'on a  $f' = f - 2$ , les six sommets de ces faces sont réduits à trois :  $s' = s - 3$ , enfin les six arêtes de ces faces sont elles aussi réduites à trois :  $a' = a - 3$ . En définitive, on a donc  $\chi' = s' - a' + f' = s - a + f - 2 = \chi - 2$ , cqfd. Le calcul est identique pour le passage de  $g$  à  $g + 1$ .

### 3.3 Genre et revêtements

Soit  $p : X \rightarrow B$  une application continue entre deux surfaces. On dit que  $p$  est un revêtement de degré  $d$  si pour chaque point  $b \in B$  il y a un voisinage  $V$  de  $b$  tel que  $p^{-1}(V)$  soit homéomorphe à la somme disjointe de  $d$  copies de  $V$  (on donne classiquement l'image d'une pile d'assiettes, ou de feuilles). On parle d'un revêtement ramifié si, en certains points  $b$  de  $B$ , la fibre  $p^{-1}(b)$  est de cardinal plus petit que  $d$  (c'est le cas où plusieurs feuilles se rencontrent).

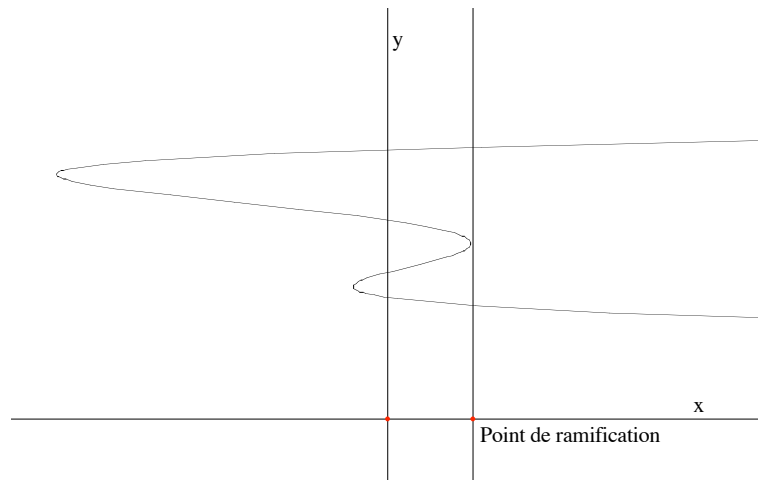


Figure 4: Projection et ramification

#### 3.2 Exemples.

1) Soit  $X$  la courbe algébrique plane d'équation :

$$(*) \quad f(x, y) = y^d + a_{d-1}(x)y^{d-1} + \dots + a_0(x) = 0.$$

On projette  $X$  sur l'axe des  $x$  (la base  $B$ ) en posant  $p(x, y) = x$ . Pour un  $x$  donné, il y a  $d$  nombres  $y$  qui vérifient (\*), de sorte que  $p$  est un revêtement de

degré  $d$ , ramifié en les points  $(x, y)$  où la tangente est parallèle à la direction de projection. Le dessin en réels, voir figure 4, est sans doute plus parlant et plus facile qu'en complexes.

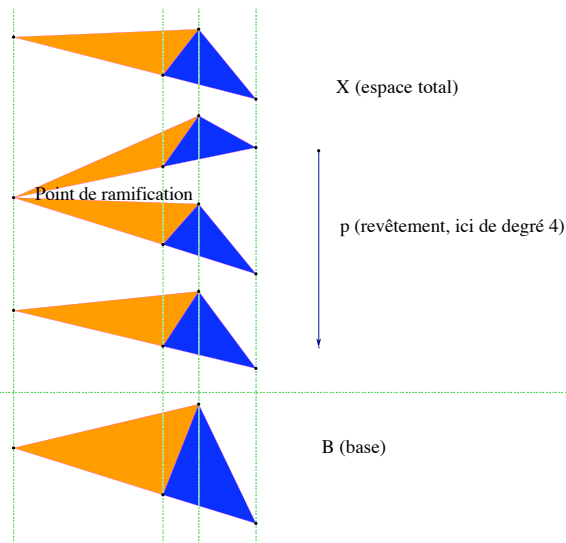
2) Un exemple simple est donné par l'application de "doublement de la longitude" de la sphère dans elle-même : on associe à un point de la sphère le point de même latitude, mais de longitude double (modulo  $2\pi$ ). C'est un revêtement de degré 2 car, par exemple, Hawaï est (à peu près) l'image de Louang Prabang (au Laos) et de Santiago de Cuba. Il est ramifié aux pôles nord et sud. On peut aussi le voir comme l'application  $z \mapsto z^2$  de la sphère de Riemann  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  dans elle-même, ramifiée en 0 et  $\infty$ .

On a alors le théorème d'Hurwitz :

**3.3 Théorème.** Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement de degré  $d$ , ramifié en  $n$  points de  $B$ . On suppose qu'au-dessus de ces points il y a deux feuilles seulement qui coïncident (donc  $n - 1$  points dans la fibre). On note  $g$  le genre de  $B$  et  $g'$  celui de  $X$ . On a la formule :

$$g' - 1 = d(g - 1) + \frac{n}{2}.$$

*Démonstration.* On utilise une triangulation de  $B$  qui fait intervenir les points de ramification comme sommets. On montre (ce n'est pas évident) qu'on peut la relever en une triangulation de  $X$  et on compte. Au dessus de chaque face de  $B$  il y a  $d$  faces de  $X$  :  $f' = df$ . Au-dessus de chaque arête de  $B$  il y a aussi  $d$  arêtes de  $X$  :  $a' = da$ . Au-dessus de chaque sommet de  $B$  il y a encore  $d$  sommets de  $X$ , sauf en les  $n$  points de ramification où il n'y en a que  $d - 1$ . On a donc  $s' = ds - n$ . Au total on a  $2(1 - g') = s' - a' + f' = d(s - a + f) - n = 2d(1 - g) - n$ , d'où le résultat.



**3.4 Exemple.** Dans le cas de 3.2.2, on a  $g = g' = 0$ ,  $n = d = 2$  et on vérifie que la formule est correcte.

### 3.4 Le genre d'une courbe algébrique plane

Soit  $X$  une courbe algébrique plane projective complexe lisse de degré  $d$ . C'est donc une surface compacte et on a la formule suivante :

**3.5 Théorème.** *Le genre de  $X$  est égal à  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .*

*Démonstration.* Quitte à choisir convenablement le système d'axes on peut écrire l'équation de  $X$  sous la forme (\*) vue en 3.2.1 et on considère le revêtement ramifié de degré  $d$  défini par  $p(x, y) = x$ . La base  $B$ , qui est l'axe des  $x$ , est une droite projective, donc une sphère du point de vue topologique, donc de genre 0. Les points de ramification sont donnés par  $\partial f / \partial y = 0$ . (Si on a choisi convenablement les axes, il n'y a que deux des points qui coïncident au-dessus d'un tel point.) On compte ces points de  $X$  (ou de  $B$ ) : ce sont les intersections de  $f = 0$  et  $\partial f / \partial y = 0$ , par Bézout il y en a  $d(d-1)$ . On a donc, avec Hurwitz :  $g' - 1 = -d + \frac{d(d-1)}{2}$ . C'est le résultat attendu .

**3.6 Corollaire.** *La quartique de Klein est une surface de genre 3 donc un tore à 3 trous.*

C'est ce qu'on entrevoit sur la statue du MSRI.

## 4 La courbe de Klein vue comme polyèdre hyperbolique

### 4.1 Introduction

Voici la dernière apparition de la courbe (ou plutôt de la surface) de Klein, la plus belle peut-être, dans la mesure où l'on y voit explicitement les 168 symétries, les 24 points d'inflexion, les 56 contacts des bitangentes, etc. C'est celle qui permettra de comprendre, sur la statue du MSRI, non seulement les trous, mais aussi les lignes qui convergent trois à trois en certains points et le nom de Eightfold Way ! Le lecteur est averti que les preuves des assertions qui suivent vont être plus que sommaires. On le renvoie à la littérature et notamment au livre de R. et A. Douady, qui est très précis sur le sujet.

Jusqu'à présent nous avons construit des surfaces de deux manières : soit algébriquement, à partir de courbes algébriques complexes, soit topologiquement par des opérations de déformation et de recollement à partir de sphères. Dans ce qui suit nous utilisons une troisième méthode qui consiste à partir d'une surface connue (plan, disque, demi-plan, etc.) et à prendre le quotient de cette surface sous l'action d'un groupe. *Via* l'utilisation d'un domaine fondamental, cette opération va se ramener à identifier les bords d'un certain un polygone. C'est aussi la réalisation de ce qu'on appelle l'uniformisation de la surface : il s'agit de trouver une paramétrisation de  $K$  par une seule variable complexe.



## 4.2 Opération de groupe, domaine fondamental, quotient : le cas général

Considérons un groupe  $\Gamma$  opérant sur un ensemble  $X$ , non transitivement. On se reportera au paragraphe suivant pour l'étude de l'exemple d'un groupe discret d'isométries du plan euclidien. On s'intéresse aux orbites de  $\Gamma$  sur  $X$ . Le quotient  $X/\Gamma$  est l'ensemble<sup>9</sup> de ces orbites. Pour le décrire, on cherche ce qu'on appelle un domaine fondamental de  $X$  sous  $\Gamma$ , c'est-à-dire une partie  $D$  de  $X$  qui contienne un point et un seul de chaque orbite, donc qui soit en bijection avec  $X/\Gamma$ . Cela signifie encore qu'on a :

$$X = \bigcup_{g \in \Gamma} g(D) \quad \text{et} \quad g(D) \cap g'(D) = \emptyset \quad \text{pour } g \neq g'.$$

En fait, dans les cas topologiques usuels, on se contentera, à la place de la deuxième condition, de demander que  $g(D)$  et  $g'(D)$  n'aient pas de points communs intérieurs à  $D$  (on parlera de domaine fondamental au sens large). Bien entendu, si on a un domaine fondamental au sens large, il faut, pour trouver le quotient, identifier les points du bord qui sont échangés par  $\Gamma$ .

Supposons en outre qu'on dispose d'un sous-groupe  $\Lambda \subset \Gamma$ . *A priori*,  $\Lambda$  opère moins transitivement que  $\Gamma$ , de sorte qu'un domaine fondamental  $D'$  de  $\Lambda$  va être plus grand qu'un domaine fondamental de  $\Gamma$ . Précisément, on a la formule  $D' = \bigcup_{\bar{g} \in \Gamma/\Lambda} g(D)$  et si  $\Lambda$  est d'indice  $n$  dans  $\Gamma$ ,  $D'$  est réunion de  $n$  transformés de  $D$ . De plus, si  $\Lambda$  est un sous-groupe distingué de  $\Gamma$ , le groupe quotient  $\Gamma/\Lambda$  opère sur  $X/\Lambda$  qui est donc naturellement muni d'un groupe d'automorphismes. C'est cette situation que nous allons tenter de réaliser ci-dessous.

## 4.3 Exemple : un quotient du plan euclidien

Considérons le pavage le plus simple du plan euclidien  $P = \mathbf{R}^2$  par les carrés de côté 1, voir figure 5. Si on pose  $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OC}$ , ce pavage est évidemment invariant par les translations de vecteurs  $m\vec{i} + n\vec{j}$  qui forment un groupe  $\Lambda$ , mais aussi par d'autres isométries directes<sup>10</sup> : les rotations de  $k\pi/2$  autour des points du réseau et des centres des pavés. En tout, on a un

<sup>9</sup>Attention, pour que le quotient d'une variété par un groupe en soit encore une, il est prudent de supposer que les éléments du groupe n'ont pas de points fixes ou alors seulement des points fixes isolés. Cela nous conduira à écarter les symétries axiales des groupes  $\Gamma$ .

<sup>10</sup>La note précédente explique l'élimination des réflexions.

groupe  $\Gamma$  dont  $\Lambda$  est un sous-groupe distingué. On remarque que le groupe total  $\Gamma$  est engendré par les rotations, associées au triangle  $OA'B'$ , d'angles doubles des angles du triangle :  $\rho = \rho(O, \pi/2)$ ,  $\sigma = \rho(A', \pi)$ ,  $\tau = \rho(B', \pi/2)$  (d'ordres 4, 2, 4). Le quotient  $\Gamma/\Lambda$  est le groupe cyclique d'ordre 4 formé des rotations (de centre  $O$ ) d'angles  $k\pi/2$ .

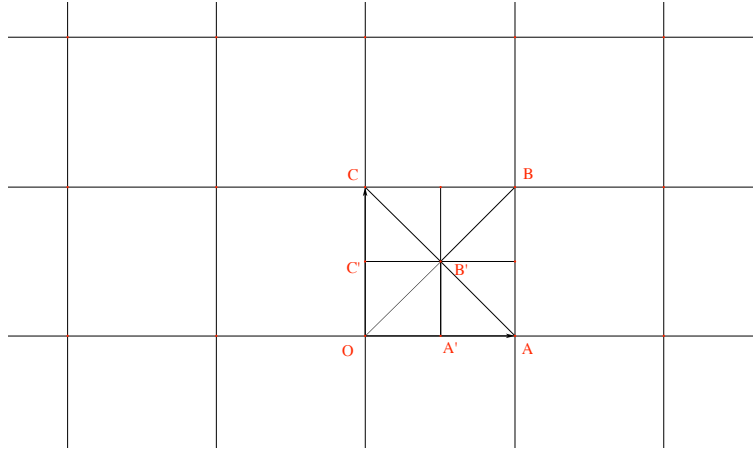


Figure 5: Pavage du plan

On considère le quotient du plan par le sous-groupe  $\Lambda$  des translations. On a vu que cela revient à identifier deux points du plan s'ils sont échangés par un élément de  $\Lambda$ . Comme le carré  $Q = OABC$  est un domaine fondamental pour  $\Lambda$ , le quotient s'obtient en identifiant les bords parallèles de  $Q$ . La réalisation pratique du quotient (qui passe par l'intermédiaire d'un cylindre) montre que ce quotient est un tore<sup>11</sup>. En fait, dans ce cas et dans de nombreux autres, on sait calculer le genre de la surface quotient :

**4.1 Proposition.** *Soit  $D$  un polygone plan convexe (euclidien, ou hyperbolique, etc.) à  $2n$  côtés. On suppose qu'on identifie les côtés de  $D$  deux à deux ainsi que certains sommets, de telle sorte qu'il ne reste que  $p$  sommets. Si le quotient obtenu est une surface compacte, sans bord et orientable, elle est de genre  $g = \frac{n - p + 1}{2}$ .*

*Démonstration.* On triangule le polygone  $D$  en prenant un point  $o$  intérieur à  $D$  et les  $2n$  triangles de sommet  $o$  et de base les côtés. Il y a alors  $f = 2n$  faces,  $a = 4n$  arêtes et  $s = 2n + 1$  sommets. On procède aux identifications. Il y a encore  $f' = 2n$  faces, mais seulement  $a' = 3n$  arêtes (les  $2n$  arêtes du

<sup>11</sup>Si on quotiente en ajoutant une symétrie axiale, c'est-à-dire en recollant les bords en changeant de sens, on obtient la fameuse bouteille de Klein (non orientable).

bord sont identifiées deux à deux) et  $s' = p + 1$  sommets (les  $p$  sommets qui subsistent sur le bord et le point  $o$ ). On en déduit le genre annoncé.

**4.2 Exemple.** Dans le cas du carré ci-dessus, on a  $n = 2$  et  $p = 1$  d'où  $g = 1$ , comme attendu pour un tore.

Le fait que le pavage initial admette un groupe d'isométries  $\Gamma$  plus grand que  $\Lambda$  a deux conséquences :

- le domaine fondamental de  $\Lambda$  est réunion de 4 transformés du domaine fondamental  $OA'B'C'$  de  $\Gamma$ , double du triangle  $OA'B'$
- ce domaine fondamental (et donc aussi le quotient) admet pour groupe d'automorphismes  $\Gamma/\Lambda = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ .

On a construit ainsi une surface,  $P/\Lambda$ , homéomorphe à un tore et munie d'un groupe d'automorphismes à 4 éléments : le quotient  $G = \Gamma/\Lambda$ .

## 4.4 Position du problème dans le cas du groupe simple d'ordre 168

### 4.4.1 Quelques remarques sur le groupe $G$

On sait qu'on a dans le groupe  $G$  des éléments  $\rho, \sigma, \tau$ , d'ordres 7, 3 et 2. De plus, un petit calcul montre que  $\sigma' = \rho^{-1}\tau$  est d'ordre 3. On a, en effet :

$$\sigma' = \rho^{-1}\tau = k \begin{pmatrix} \zeta^4 - \zeta^2 & \zeta^{-2} - \zeta & 1 - \zeta^{-1} \\ 1 - \zeta^{-4} & \zeta^2 - \zeta & \zeta^{-1} - \zeta^4 \\ \zeta^{-4} - \zeta^2 & 1 - \zeta^{-2} & \zeta - \zeta^4 \end{pmatrix} \text{ et on voit que cette matrice}$$

est de trace nulle ce qui (quand on connaît les ordres des éléments de  $G$ ) suffit<sup>12</sup> à assurer qu'elle est d'ordre 3.

De même, un petit calcul montre que  $\gamma = \tau\rho^3$  est d'ordre 4 (cette fois, on voit que son polynôme caractéristique est  $X^3 - X^2 + X - 1 = (X^2 + 1)(X - 1)$ ).

### 4.4.2 L'inadéquation du plan euclidien

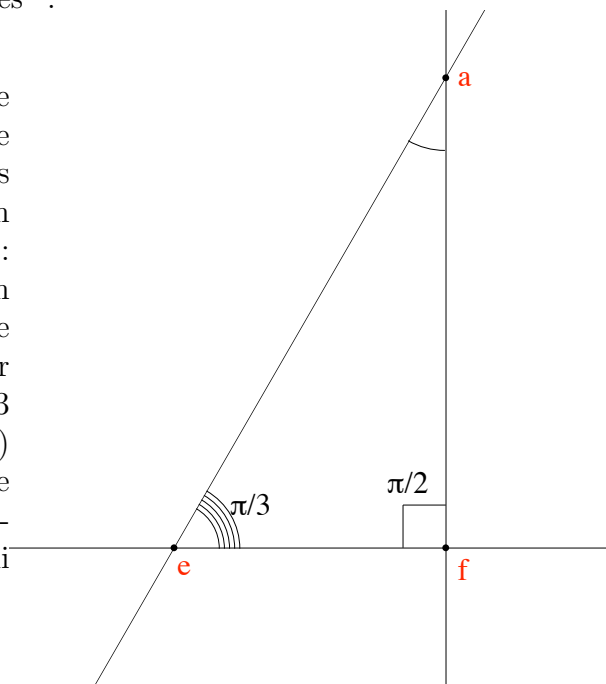
On veut maintenant obtenir la surface de Klein comme un quotient d'une surface  $X$  simple : plan, disque, demi-plan, etc. avec le groupe d'automorphismes  $G$  d'ordre 168 en évidence. L'idée est de procéder comme dans l'exemple précédent en exhibant un groupe  $\Gamma$  d'automorphismes de  $X$ , pas trop transitif (et pour cela on va le choisir discret) et un sous-groupe  $\Lambda$  de  $\Gamma$  avec un isomorphisme du quotient  $\Gamma/\Lambda$  sur  $G$ . Vu les éléments  $\rho, \sigma, \tau$  de  $G$ , on va chercher un groupe  $\Gamma$  engendré par trois éléments d'ordre 7, 3, 2 dont

<sup>12</sup>On peut aussi faire le calcul directement.

$G$  sera quotient (cela signifie que certaines relations entre  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  présentes dans  $G$  ne seront pas dans  $\Gamma$ ). Pour trouver des éléments de ces ordres, on pense aussitôt, comme pour le triangle  $OA'B'$  ci-dessus, à des rotations planes d'angles  $2\pi/7$ ,  $2\pi/3$ ,  $\pi$ .

Mais on a vu ci-dessus qu'on a une relation du genre  $\rho^{-1} = \sigma'\tau$  avec  $\rho$  (resp.  $\tau$ , resp.  $\sigma'$ ) d'ordre 7 (resp. 2, resp. 3). Or, cette relation est impossible à réaliser avec les rotations euclidiennes<sup>13</sup>.

En effet, si on a deux rotations  $\sigma'$ , de centre  $e$  et d'angle  $2\pi/3$  et  $\tau$ , symétrie de centre  $f$ , on peut décomposer ces rotations en produit de symétries, en utilisant  $(ef)$  comme droite commune :  $\sigma' = s_{(ae)}s_{(ef)}$  et  $\tau = s_{(ef)}s_{(af)}$ . On voit alors que  $\sigma'\tau$  est une rotation de centre  $a$ , composée des symétries par rapport à  $(af)$  et  $(ae)$ , donc d'angle  $\pi/3$  (puisque l'angle des droites  $(af)$  et  $(ae)$  est  $\pi/6$  en vertu du fait que la somme des angles d'un triangle vaut  $\pi$ ). Le produit est donc d'ordre 6 et non pas 7 qui donnerait une somme des angles  $< \pi$ .



En revanche on va trouver le groupe  $\Gamma$  comme sous-groupe du groupe des isométries du plan hyperbolique<sup>14</sup>.

## 4.5 Le plan hyperbolique et ses isométries

On renvoie à [Perrin3] pour tout ce qui concerne ce sujet. On utilisera ici exclusivement comme modèle du plan hyperbolique le disque de Poincaré<sup>15</sup>

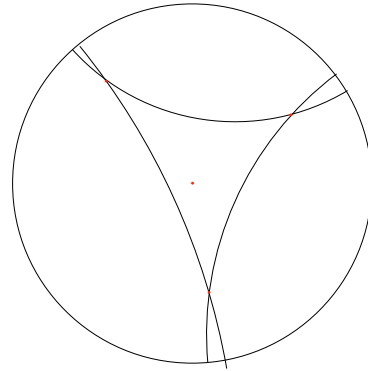
<sup>13</sup>Par ailleurs, les sous-groupes discrets du groupe des isométries du plan euclidien sont bien connus (ce sont les 17 groupes de pavages du plan) et on vérifie facilement que le groupe  $G$  n'en est pas quotient (essentiellement à cause des éléments d'ordre 7).

<sup>14</sup>Un grand théorème, dû à Köbe et Poincaré, montre que toute surface de Riemann, de genre  $\geq 2$ , est un quotient du demi-plan (ou du disque) de Poincaré et est donc, en particulier, munie d'une métrique hyperbolique.

<sup>15</sup>Je n'ai pas vérifié, mais il est bien possible que dans la première version de son article Klein ait travaillé dans ce qu'on appelle maintenant le disque de Klein  $\mathbf{K}$ , dans lequel les droites sont rectilignes, mais les angles non conformes, la figure à laquelle nous nous référerons est celle de ses œuvres complètes, cf. [Levy] ou [Bavard].

**D.** Il s'agit du disque unité ouvert du plan euclidien, qui joue le rôle de plan, le cercle, appelé horizon, servant d'infini, et les droites étant les arcs de cercles orthogonaux à l'horizon. On peut faire une bonne partie de la géométrie dans ce cadre. Les isométries de ce plan correspondent aux éléments de  $O^+(q)$  où  $q$  est la forme de Lorentz  $x^2 + y^2 - t^2$ . On peut se laisser guider (dans certaines limites!) par l'intuition euclidienne : on a encore des symétries axiales, des symétries centrales, des rotations, des pseudo-translations, etc.

Quand on regarde les figures dans le plan hyperbolique, la première chose qui frappe c'est que les angles sont plus petits que dans le plan euclidien. Précisément, la somme des angles  $\alpha + \beta + \gamma$  d'un triangle ne vaut pas  $\pi$ , mais est toujours plus petite que  $\pi$  et il existe des triangles d'angles  $\alpha, \beta, \gamma$  dès qu'on a cette condition.



## 4.6 Le sous-groupe discret $\Gamma$ de $O^+(q)$

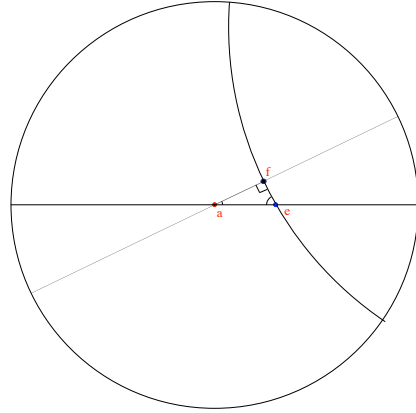
### 4.6.1 Le sous-groupe

On considère, dans **D**, un triangle  $T = aef$  tel que les trois angles de ce triangle<sup>16</sup> soient  $\hat{a} = \pi/7$ ,  $\hat{e} = \pi/3$  et  $\hat{f} = \pi/2$ . Un tel triangle existe, on peut le prendre de la forme  $a = (0, 0, 1)$ ,  $e = (\alpha, 0, 1)$  et  $f = (x, y, 1)$  et il est unique à isométrie près (cf. [Perrin3]). On note alors  $\rho$ ,  $\sigma'$  et  $\tau$  les rotations de centres respectifs  $a, e, f$  et d'angles  $2\pi/7$ ,  $2\pi/3$  et  $\pi$  (le double des angles du triangle). On a un lemme général dans cette situation :

**4.3 Lemme.** *On a  $\rho^7 = (\sigma')^3 = \tau^2 = \text{Id}$ . Le produit  $\rho\sigma'\tau$  est l'identité.*

<sup>16</sup>Précisément, il existe des triangles rectangles d'angles  $\pi/2, \pi/d, \pi/n$  dès que  $1/d + 1/n$  est strictement plus petit que  $1/2$  et un tel triangle donne naissance à un pavage par des polygones réguliers à  $n$  côtés, qui est tel que  $d$  polygones aboutissent en chaque sommet.

*Démonstration.* Les premières relations sont évidentes. Pour montrer la formule  $\rho\sigma'\tau = \text{Id}$  (ou encore  $\sigma' = \rho^{-1}\tau$ ), il suffit de décomposer chaque rotation en produit de deux symétries :  $\rho = s_{(af)}s_{(ae)}$ ,  $\sigma' = s_{(ae)}s_{(ef)}$  et  $\tau = s_{(ef)}s_{(af)}$ .



**4.4 Définition.** On appelle  $\Gamma = \Gamma_{2,3,7}$  le sous-groupe de  $O^+(q)$  engendré par les trois éléments  $\rho$ ,  $\sigma'$ ,  $\tau$  (ou simplement par  $\rho$  et  $\tau$ ).

#### 4.6.2 Le pavage

On considère les transformés des points  $a, e, f$  par les éléments de  $\Gamma$ . Sur les figures ci-dessous, les transformés de  $a$  sont en rouge, ceux de  $e$  en vert, ceux de  $f$  en noir. On considère aussi les transformés du triangle  $ae f$  et du triangle double  $Q$ , réunion du triangle  $T$  et de son symétrique  $T'$  par rapport à  $(ae)$ .

**4.5 Proposition.** Le groupe  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $O^+(q)$ . La réunion  $Q$  du triangle  $T$  et de son symétrique  $T'$  par rapport à  $(ae)$  est un domaine fondamental de  $\Gamma$  (au sens large), autrement dit, les transformés  $g(Q)$ , pour  $g \in \Gamma$ , pavent le plan hyperbolique  $\mathbf{D}$ .

*Démonstration.* Une preuve rigoureuse n'est pas évidente, cf. [Douady] 6.10.2. Intuitivement, on vérifie ce résultat sur les figures ci-dessous. Une remarque essentielle : si on a une transformation de  $\Gamma$  (disons la rotation  $\rho$  de centre  $a$  et d'angle  $2\pi/7$ ) et si l'élément  $g$  de  $\Gamma$  envoie  $a$  sur  $a'$ ,  $\Gamma$  contient  $g\rho g^{-1}$  qui est la transformation de même nature autour de  $a'$  (ici la rotation d'angle  $2\pi/7$ ). On obtient d'abord, en appliquant les rotations de centre  $a$  et d'angles  $2k\pi/7$  un heptagone régulier (hyperbolique). Le point crucial est de noter que les angles de ces heptagones sont égaux à  $2\pi/3$  (ou 120 degrés, au lieu de 128,5 degrés pour l'heptagone euclidien) par construction. On obtient ensuite, par exemple, deux autres heptagones par rotation de  $\pm 2\pi/3$  autour de  $d = \tau(e)$  et tous ces heptagones, réunis trois à trois en chaque sommet, pavent le plan hyperbolique.

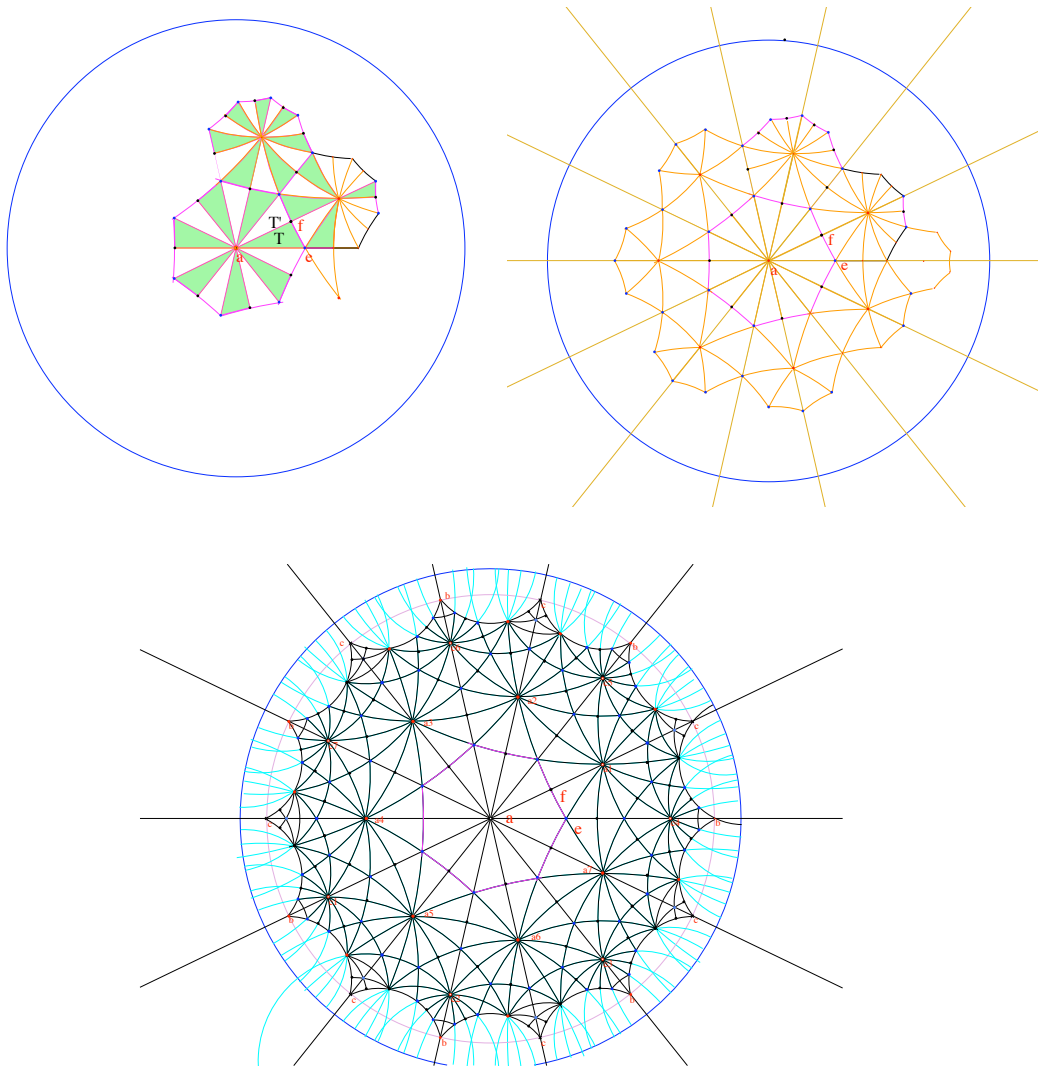


Figure 6: Le pavage du plan hyperbolique

**4.6 Remarque.** Une autre possibilité est de revenir au demi-plan de Poincaré  $\mathbf{H}$ , autre avatar du plan hyperbolique. Les rotations de  $\mathbf{D}$  correspondent à des isométries de  $\mathbf{H}$  qui sont des homographies de  $PSL(2, \mathbf{R})$ . Le groupe  $\Gamma$  est se voit alors comme un quotient du sous-groupe  $PSL(2, \mathbf{Z})$  de  $PSL(2, \mathbf{R})$ . Le fait que le sous-groupe soit discret en résulte et le calcul du domaine fondamental aussi (cf. [Serre] ou [Bavard]).

## 4.7 Le sous-groupe $\Lambda$

Le groupe  $\Gamma$ , même s'il contient des éléments d'ordre 2, 3, 7 n'est certainement pas le groupe d'ordre 168 cherché (c'est un groupe infini : il y a, par exemple, une infinité de rotations d'angles  $2\pi/7$  dont les centres sont les centres des heptagones). De plus, on a vu que  $G$  contient aussi des éléments d'ordre 4 (par exemple  $\gamma = \tau\rho^3$ ). En fait, on montre qu'il manque juste une relation de ce type dans  $\Gamma$  pour qu'il soit égal à  $G$ , précisément :

**4.7 Proposition.** *Soit  $\gamma = \tau\rho^3 \in \Gamma$ . Le groupe simple d'ordre 168 est le quotient de  $\Gamma$  par le sous-groupe distingué  $\Lambda$  engendré par l'élément  $\gamma^4 = (\tau\rho^3)^4$  (autrement dit par  $\gamma^4$  et ses conjugués).*

*Démonstration.* Cela résulte du fait qu'on a une présentation du groupe  $G$  comme groupe engendré par deux générateurs  $R$  et  $T$  vérifiant  $R^7 = T^2 = (TR)^3 = (R^4T)^4 = \text{Id}$  (cf. [Coxeter-Moser]).

Pour décrire géométriquement  $\gamma = \tau\rho^3$ , on décompose  $\rho^3$  et  $\tau$  en produit de symétries axiales. On se reportera à la figure fondamentale. On a ainsi  $\rho^3 = s_{(af)}s_{(aa')}$  et  $\tau = s_{(ef)}s_{(af)}$ , d'où  $\gamma = s_{(ef)}s_{(aa')}$ . Comme ces droites hyperboliques (violette) ne sont pas concourantes,  $\gamma$  est une "translation" hyperbolique. Attention, ce mot doit être pris avec des précautions. En particulier une translation hyperbolique n'a qu'une droite stable (qu'on appelle son axe) qui est la perpendiculaire commune aux deux axes de symétrie (la droite  $\Delta$  violette pointillée de la figure fondamentale). Elle stabilise aussi ce qu'on appelle les équidistantes à cette droite (les points situés à une distance donnée de la droite) qui sont des arcs de coniques. Sur la droite et les équidistantes,  $\gamma$  est effectivement une sorte de translation. Si on regarde l'effet de  $\gamma$  sur les points bleus voisins de  $\Delta$ , par exemple  $e$ , on peut encore décrire cette transformation comme la démarche de l'homme politique indécis : un coup à gauche, un coup à droite.

## 4.8 Le quotient de $\mathbf{D}$ ou $\mathbf{P}$ par $\Lambda$

Comme dans l'exemple du tore vu comme quotient du rectangle, il s'agit maintenant de décrire le quotient de  $\mathbf{D}$  par le groupe<sup>17</sup>  $\Lambda$ , engendré par toutes les translations hyperboliques du type de  $\gamma^4$ . Cela signifie qu'on va identifier deux points s'ils sont transformés l'un en l'autre par  $\gamma^4$  (l'homme politique qui change quatre fois d'opinion), comme les points bleus  $e_0$  et  $e_8$  (les points bleus sont les seuls bien visibles sur la statue du MSRI). Le chemin vert entre  $e_0$  et  $e_8$  est le fameux *eightfold way* le chemin à huit pas (une allusion au chemin des huit vertus vers le nirvana de la philosophie bouddhique<sup>18</sup>). On doit

<sup>17</sup>On montre que ce groupe opère sans point fixe, cf. [Douady] 6.10.13

<sup>18</sup>Dans la philosophie bouddhique, le chemin des huit vertus, *aṣṭāṅgika-marga*, est la voie qui mène au nirvana, cf. [Kitagawa].



ensuite effectuer cette identification pour tous les conjugués de  $\gamma^4$ . Pour cela on construit (comme dans l'exemple euclidien) un domaine fondamental de  $\Lambda$  en réunissant les 168 transformés par (les représentants de)  $G$  du domaine fondamental  $Q$  de  $\Gamma$ . On obtient le polygone<sup>19</sup> hyperbolique  $\mathbf{P}$  à 14 côtés de la figure fondamentale, formé de  $336 = 14 \times 24$  petits triangles transformés de  $T$  donc de 168 transformés de  $Q$ . Dans le quotient, en utilisant  $\gamma^4$ , on voit que les côtés de ce polygone sont identifiés deux à deux selon leurs couleurs. Ainsi, le côté vert qui contient  $e_0$  est identifié au côté vert qui contient  $e_8$ . On procède de même pour les autres éléments d'ordre 4 : les  $\gamma_i = \rho^i \gamma \rho^{-i}$ . Comme les  $\rho^i$  envoient le côté 1 successivement sur les côtés d'indices impairs 3, 5, 7, 9, 11, 13,  $\gamma_i$  envoie le côté  $2i + 1$  sur le côté  $2i + 6$  (modulo 14). On a donc ainsi la règle d'identification. On notera que deux sommets du polygone seulement survivent : l'un qui regroupe tous les sommets roses (appelés  $c$ ) et l'autre tous les oranges (appelés  $b$ ).

**4.8 Remarque.** La statue du MSRI représente la surface de Klein et on y a dessiné, en creux, le pavage par les 24 heptagones réguliers que l'on voit sur la figure 7. Sur le polygone fondamental les centres de ces polygones sont les 24 points correspondant aux inflexions, figurés en rouge et les sommets de ces heptagones sont les 56 points correspondant aux contacts des bitangentes, figurés en bleu. Si l'on se promène de l'un à l'autre des points bleus en suivant les arêtes (des heptagones) qui y passent, avec la règle suivante : à chaque carrefour (à trois branches) on tourne successivement à gauche<sup>20</sup>, puis à droite, puis à gauche, puis à droite, etc., alors, partant de n'importe quel point, avec n'importe quelle arête initiale, quand on a parcouru 8 arêtes (en tenant compte des identifications des bords, évidemment), on revient à son point de départ : le chemin des huit vertus est partout !

**4.9 Remarque.**

La contemplation de la figure 7 montre que les orbites des points de  $\mathbf{D}/\Lambda$  sous l'action de  $G$  ont toutes 168 éléments, à l'exception de trois d'entre elles. Chacun des 336 triangles comporte un point rouge, un bleu et un noir. Les points rouges, centres des rotations d'ordre 7, sont communs à 14 triangles et forment une orbite de cardinal 24, les points bleus, d'ordre 3, communs à 6, une orbite de cardinal 56 et les points noirs, d'ordre 2, communs à 4, une orbite de cardinal 84.

---

<sup>19</sup>Mais il n'est pas tout à fait évident de montrer qu'il est réunion des  $g(Q)$  pour  $g \in G$ !

<sup>20</sup>Ou l'inverse, selon les opinions de chacun.

**4.10 Proposition.** *La surface  $\mathbf{D}/\Lambda$  est de genre 3.*

*Démonstration.* Il y a de multiples manières de voir cela. On peut regarder le polygone hyperbolique  $\mathbf{P}$ . Il a 14 côtés, identifiés deux à deux et il reste 2 sommets. En vertu de 4.1 on a donc  $g = (7 - 2 + 1)/2 = 3$ . On peut aussi, dans ce cas, utiliser directement la triangulation par les 14 triangles de sommet  $a$ .

Une autre preuve consiste à utiliser le pavage par des heptagones (réunions de transformés de  $Q$  par les rotations  $\rho^i$ ). C'est d'ailleurs ce pavage qui apparaît sur la statue. Ces heptagones ont des sommets bleus, leurs centres sont rouges, les milieux de leurs arêtes sont noirs. On a donc un pavage avec  $s = 56$ ,  $a = 84$  et  $f = 24$ , donc  $2 - 2g = 56 - 84 + 24 = -4$  et  $g = 3$ .

**4.11 Théorème.** *La surface  $\mathbf{D}/\Lambda$  est la surface de Klein. Elle admet le groupe simple d'ordre 168 comme groupe d'automorphismes.*

*Démonstration.* C'est le point non évident de l'histoire. On montre d'abord que  $X = \mathbf{D}/\Lambda$  est une surface de Riemann. Cela résulte du fait que c'est le quotient de la surface de Riemann  $\mathbf{D}$  par le groupe  $\Lambda$  qui opère sans point fixe (ce n'est pas évident que  $\Lambda$  est sans point fixe, même si c'est clair pour son "générateur"  $\gamma^4$  qui est une translation hyperbolique, cf. [Douady] 6.10.13). On prouve ensuite qu'elle est compacte (car elle admet un domaine fondamental au sens large qui l'est) et orientée (on a une structure complexe naturelle). Il en résulte que  $X$  est une courbe algébrique (c'est un théorème, pas du tout trivial, cf. [Reyssat] ou [Douady]). Elle est de genre 3 en vertu de 4.10. On sait alors (cf. [Hartshorne] IV 5.2.1) que  $X$  est soit hyperelliptique (i.e. qu'il existe un revêtement de degré 2 de la droite projective  $p : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ ), soit qu'elle est isomorphe à une courbe plane lisse de degré 4. Le premier cas est impossible car une courbe hyperelliptique admet un automorphisme d'ordre 2 qui est dans le centre du groupe des automorphismes, ce qui n'est pas le cas ici. La surface  $X$  admet donc un plongement dans  $\mathbf{P}^2$  comme courbe de degré 4. Mais, par construction, le groupe  $G = \Gamma/\Lambda$  est un groupe d'automorphismes de  $\mathbf{D}/\Lambda$ . On conclut alors par 2.19.

Une autre méthode (celle que Klein utilise dans son article) consiste à exhiber des fonctions  $x, y, t$  qui vérifient la bonne équation, à l'aide de la fonction modulaire  $\eta$ .

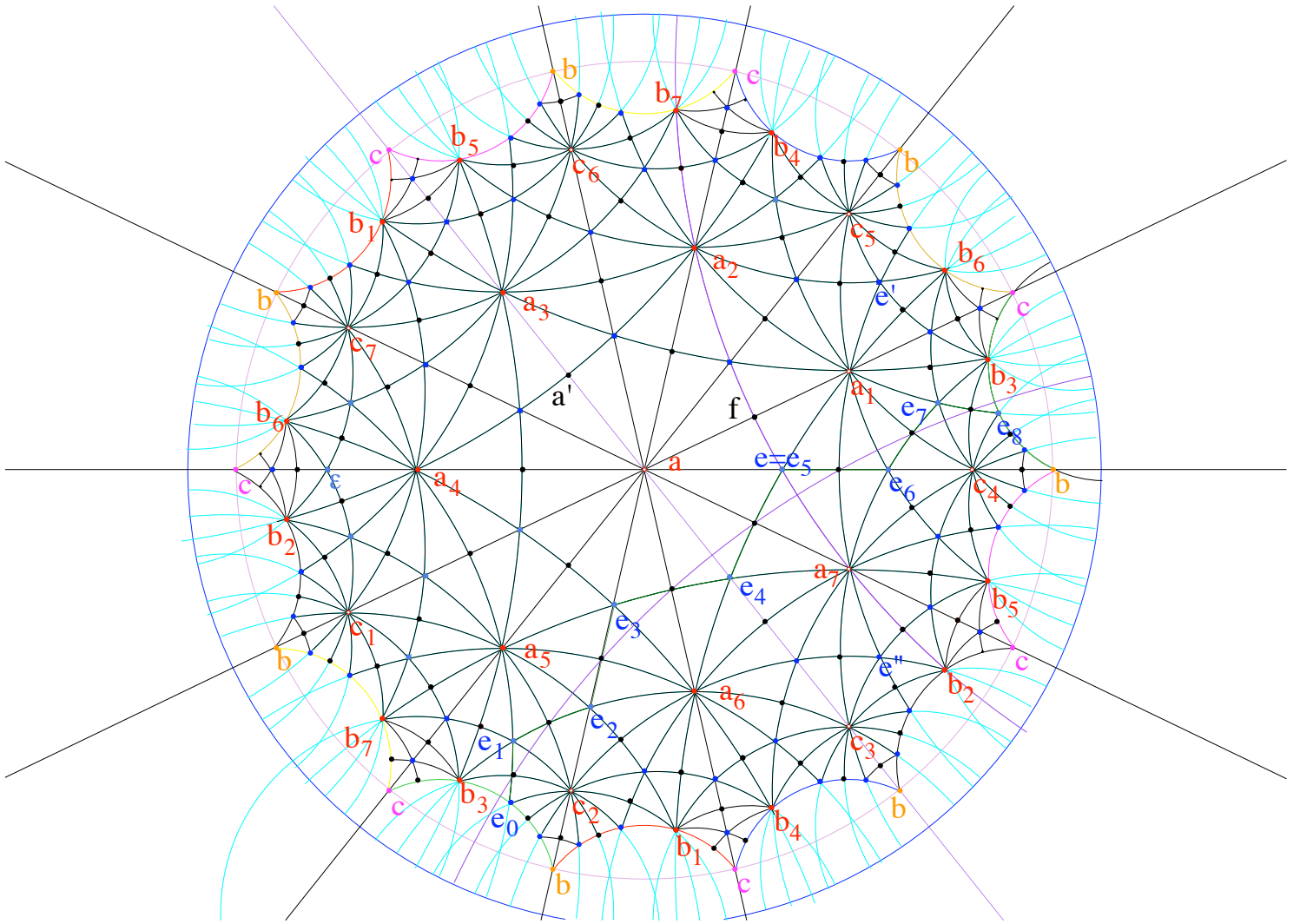


Figure 7: La figure fondamentale

## 4.9 Tout voir sur la figure fondamentale

### 4.9.1 Interprétation géométrique des orbites

On a déjà noté que les orbites des points de  $\mathbf{D}/\Lambda$  sous l'action de  $G$  ont toutes 168 éléments, à l'exception de celles des points rouges, bleus et noirs. Maintenant qu'on a identifié  $\mathbf{D}/\Lambda$  et  $K$ , on peut interpréter géométriquement ces trois orbites. La seule orbite de cardinal 24 de  $K$  étant celle des inflexions, les points rouges correspondent aux inflexions. De même, les points bleus, qui forment une orbite de cardinal 56 correspondent aux points de contact des 28 bitangentes. Le cas des points noirs est plus difficile. Il s'agit des points sextactiques de  $K$ , points de contacts des coniques osculatrices à  $C$  (non dégénérées) qui la coupent avec multiplicité  $\geq 6$ . On verra que ces points sont alignés 4 par 4 sur 21 droites.

### 4.9.2 Triangles d'inflexion et points fixes des éléments d'ordre 7

On a vu que les inflexions correspondent aux points rouges, centres des heptagones qui pavent le polygone fondamental. On sait que ces inflexions sont organisées en huit triangles d'inflexions que l'on va déterminer explicitement, comme les triangles laissés invariants par les huit sous-groupes d'ordre 7. Pour cela, on commence par noter que  $abc$  est un triangle d'inflexions (ce qui justifie, *a posteriori*, les notations). En effet, si on considère la rotation  $\rho$ , elle fixe  $a$ , mais aussi  $b$  et  $c$  avec les identifications. (Pour le voir on note que  $\rho$  envoie  $a_1$  sur  $a_2$ . Comme elle conserve l'alignement et la distance hyperbolique, il est clair que le point  $c$  aligné avec  $a_1$  s'envoie sur son *alter ego* aligné avec  $a_2$ .)

On pose  $a = a_\infty$ ,  $b = b_\infty$ ,  $c = c_\infty$ . Pour trouver les autres triangles  $a_i b_i c_i$  avec  $i = 1, \dots, 7$ , on commence par appliquer la symétrie  $\tau$  de centre  $f$  à  $a$ . On trouve ainsi le point  $a_1$ . On l'applique ensuite à  $c$  (sous n'importe laquelle de ses apparences, mais le plus simple est d'utiliser le point aligné avec  $a$  et  $a_1$ ), on trouve  $c_1$ , puis à  $b$  et on trouve  $b_1$  (ce point pouvant être pris sur l'un ou l'autre des côtés orange du polygone  $\mathbf{P}$ ). On utilise ensuite les rotations de centre  $a$  pour trouver les autres triangles. Il n'y a plus de difficulté et on obtient la numérotation des points  $a_i, b_i, c_i$  figurant sur la figure 7.

On obtient ainsi une opération de  $G$  sur les 8 triangles d'inflexions qui donne un plongement de  $G$  dans  $\mathfrak{S}_8$ , voir Annexe 4.

### 4.9.3 Un lemme

Le résultat suivant sera très utile :

**4.12 Lemme.** *Soit  $g \in G$ . On suppose que  $g$  fixe deux inflexions ne faisant pas partie d'un même triangle d'inflexions. Alors  $g$  est l'identité. Si deux éléments de  $G$  ont même effet sur deux inflexions ne faisant pas partie d'un même triangle ils sont égaux.*

*Démonstration.* Si  $g$  fixe une inflexion  $a$  on a vu que c'est un élément d'ordre 7 et qu'il fixe seulement les autres inflexions du triangle contenant  $a$ .

#### 4.9.4 Points fixes des éléments d'ordre 3

On a vu dans l'étude de  $K$  que les éléments d'ordre 3 admettent deux points fixes dans  $K$  (dans le cas de  $\sigma$  il s'agit de  $(1, j, j^2)$  et  $(1, j^2, j)$ , contacts de la bitangente  $X + Y + T = 0$ ). Notre objectif est de déterminer explicitement les deux points fixes d'un élément d'ordre 3 donné.

On commence par la rotation  $\sigma'$  de centre  $e$  et d'angle  $2\pi/3$ . On a le lemme suivant :

**4.13 Lemme.** *L'élément  $\sigma'$ , vu comme permutation de  $\mathbf{D}/\Lambda$ , admet deux points fixes, le point  $e$  et le point bleu<sup>21</sup>  $\epsilon$ , centre du triangle  $b_2b_6a_4$ .*

*Démonstration.* On calcule les images des points d'inflexion par  $\sigma'$ . On obtient les cycles suivants :  $(aa_7a_1)$ ,  $(bb_7b_1)$ ,  $(cc_7c_1)$ ,  $(a_2a_6c_4)$ ,  $(b_2b_6a_4)$ ,  $(c_2c_6b_4)$ ,  $(a_3c_3b_3)$ ,  $(a_5b_5c_5)$ . Expliquons comment on établit ce résultat à l'aide de la figure fondamentale. Le cas du triangle  $aa_7a_1$  est immédiat (c'est un triangle équilatéral de centre  $e$ ). Un autre cas facile est celui de  $a_2a_6c_4$ . En effet, ces points sont situés sur les médianes du triangle précédent et à égale distance de  $e$  (précisément, la distance est  $2ef + ae$ ). On procède de même pour  $b_2b_6a_4$ . Cela permet de traiter le cas de  $a_5b_5c_5$ . En effet, on note par exemple qu'on a deux triangles équilatéraux  $a_1a_2a$  et  $a_1a_2c_5$ , symétriques par rapport au milieu de  $a_1, a_2$ . Par  $\sigma$  le premier triangle donne  $aa_6a_7$  et donc le second donne le symétrique de celui-là par rapport au milieu de  $a, a_6$ . On obtient ainsi  $\sigma(c_5) = a_5$ . On poursuit ainsi, de proche en proche, en utilisant les triangles équilatéraux<sup>22</sup> voisins de ceux déjà traités. On obtient ainsi le cas des points d'indice 3, puis  $c_2c_6b_4$  et enfin,  $bb_7b_1$  et  $cc_7c_1$ . Pour ce dernier cas, l'image de  $c_7$  est symétrique de  $a_7$  par rapport au milieu de  $c_3b_2$ . Ce point est à l'extérieur de  $\mathbf{P}$ , mais on le trouve en notant qu'il est à distance  $ae$  du point bleu proche de  $b_2$  sur l'arc noir. En changeant d'arc noir, cela montre que cette image est bien  $c_1$ .

<sup>21</sup>Ce point est situé sur la droite  $(ae)$ , immédiatement à gauche de  $a_4$ .

<sup>22</sup>Dans ce qui suit on désignera cette technique sous le nom de "méthode des triangles accolés".

Soit alors  $\sigma''$  la rotation de  $-2\pi/3$  autour de  $\epsilon$ . On constate que  $\sigma''$  a le même effet que  $\sigma'$  sur les points  $b_2, b_6$  et  $a_4$ . En vertu de 4.12 on a  $\sigma' = \sigma''$ , ce qui montre que le second point fixe de  $\sigma'$  est  $\epsilon$ .

**4.14 Remarque.** En principe, une fois qu'on a trouvé un couple de contacts de bitangentes comme  $e, \epsilon$ , on trouve les autres en transformant ces points par les éléments du groupe. Dans la pratique cela peut être plus laborieux. Cherchons, par exemple, un élément<sup>23</sup> d'ordre 3 qui conserve le triangle  $abc$ . Pour cela, on considère la rotation  $r$ , de centre  $a_2$  et d'angle  $2\pi/7$ . Comme elle transforme  $a_3$  en  $a$ , elle envoie le triangle d'inflexions  $a_3b_3c_3$  sur le triangle  $abc$ . Comme  $\sigma'$  laisse invariant  $a_3b_3c_3$ , sa conjuguée  $\sigma = r\sigma'r^{-1}$  va laisser invariant  $abc$ . Mais, cette conjuguée est la rotation de  $2\pi/3$  de centre  $r(e) = e'$ , où  $e'$  est le centre du triangle  $a_1c_5b_6$ .

Le second point fixe de  $\sigma$  est alors le transformé de  $\epsilon$  par  $r$ . Il s'agit du point  $e''$ , centre du triangle  $a_7b_2c_3$  (en effet,  $r$  transforme  $a_4$  en  $a_7$  et  $a$  en  $a_1$  et on utilise l'alignement de  $\epsilon$  avec  $a$  et  $a_4$ ).

Comme le triangle  $abc$  est invariant par les rotations de centre  $a$  et d'ordre 7, les 14 transformés de  $e'$  et  $e''$  par ces rotations sont les centres des rotations conservant  $abc$  (il semble y avoir 28 rotations, deux pour chaque centre, mais on n'oubliera pas que chaque rotation a deux points fixes).

### 4.9.5 Involutions

L'analyse des valeurs et vecteurs propres de  $\tau$  (voir Annexe 2) montre que les 21 involutions ont chacune 4 points fixes. La question est de les trouver, par exemple pour  $\tau$ , symétrie par rapport à  $f$ .

Pour cela il suffit de préciser l'action de  $\tau$  sur les inflexions. On a, de manière évidente,  $\tau(a) = a_1$  et  $\tau(c) = c_1$  et il en résulte  $\tau(b) = b_1$  (par conservation des triangles d'inflexions). On montre ensuite  $\tau(a_2) = a_7$  et  $\tau(b_2) = b_7$ , d'où  $\tau(c_2) = c_7$ . L'étape suivante consiste à noter qu'on a  $\tau(a_3) = c_4$ ,  $\tau(b_3) = a_4$  et  $\tau(c_3) = b_4$  et enfin  $\tau(b_6) = a_5$ ,  $\tau(a_6) = c_5$  et  $\tau(c_6) = b_5$ .

Cela permet de déterminer les autres points fixes en utilisant 4.12 :

- Le point noir  $f'$  entre  $b$  et  $b_1$  sur l'arc rouge. La symétrie par rapport à  $f'$  échange  $b$  et  $b_1$  ainsi que  $c_7$  et  $c_2$  (seuls points immédiatement voisins de  $d'$ ). Cela suffit à affirmer qu'elle est égale à  $\tau$  en vertu de 4.12.
- Le milieu  $f''$  de  $b_4c_3$  (qu'on regarde avec le  $b_4$  du bas). La symétrie par rapport à  $f''$  échange, outre les deux cités,  $a_6$  et  $c_5$ .
- Enfin, le milieu  $f'''$  de  $b_5$  (regardé en haut) et  $c_6$ . La symétrie par rapport à  $f'''$  échange aussi  $a_3$  et  $c_4$ .

---

<sup>23</sup>Comme il y a 8 triangles, le stabilisateur de chacun est d'ordre 21 et il contient 14 éléments d'ordre 3.

## 5 Références

[Bavard] Christophe Bavard, *La surface de Klein*, Journal de maths des élèves de l'ENS Lyon, Volume 1 (1993), numéro 1, [www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num1/artCBavard/artCBavard.pdf](http://www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num1/artCBavard/artCBavard.pdf)

[Coxeter-Moser] H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser *Generators and relations for discrete groups*, Springer, 1957.

[Douady] Régine et Adrien Douady, *Algèbre et théories galoisiennes, vol. II*, Cedic, 1979.

[Fischer] Gerd Fischer, *Plane algebraic curves*, AMS, 2001.

[Gramain] André Gramain, *Topologie des surfaces*, PUF, 1971.

[Hartshorne] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[Kitagawa] J.-M. Kitagawa *The eightfold path to Nirvana*, p. 88-101 of *Great religions in the world*, M. Severy ed., National Geographic Society, 1971.

[Klein] Felix Klein, *Über die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen*, Math. Ann. **14** (1879), 428-471. (Œuvres, Tome III, p. 90-136.

[Levy] Silvio Levy ed. *The eightfold way*, Cambridge University Press, 1999.

[Perrin1] Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[Perrin2] Daniel Perrin, *Mathématiques d'École*, Cassini, 2005.

[Perrin3] Daniel Perrin, *Géométrie projective, applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes*, en préparation.

[Reyssat] Éric Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Birkhäuser, 1989.

[Serre] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF, 1970.

## 6 Annexes

### 6.1 Annexe 1 : un contre-exemple

Voici un exemple d'une quartique  $C$ , avec un automorphisme d'ordre 3, noté  $\sigma$ , et trois inflexions  $a, b, c$  échangées par  $\sigma$ , dans lequel les tangentes inflexionnelles ne sont pas les côtés du triangle  $abc$ .

On considère la courbe d'équation :

$$F(X, Y, T) = X^3Y - X^3T + Y^3T - Y^3X + T^3X - T^3Y \\ + B(X^2Y^2 + Y^2T^2 + T^2X^2 - 2X^2YT - 2Y^2TX - 2T^2XY).$$

Il est clair que  $C$  est invariante par la permutation des coordonnées  $\sigma(x, y, t) = (y, t, x)$ . Les points  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$  et  $c = (0, 0, 1)$  sont permutés par  $\sigma$ . On considère le point  $c = (0, 0, 1)$  et on l'étudie dans le plan affine  $t = 1$ . L'équation devient  $f(x, y) = x - y + B(x - y)^2 + g(x, y)$  où  $g$  est formé de termes de degré  $\geq 3$ . On a donc une inflexion, avec tangente  $y = x$ . Par permutation, les points  $a$  et  $b$  sont aussi des inflexions, mais les tangentes inflexionnelles ne sont pas les côtés du triangle  $x = y = t = 0$  (ce sont les "bissectrices"  $y = t$ ,  $t = x$ ,  $x = y$ ).

Pour  $B = 3$  (et donc pour presque tout  $B$ ) on vérifie que la courbe  $C$  est lisse (par exemple à l'aide du logiciel Macaulay en calculant l'idéal engendré par les dérivées partielles de  $F$ ).

## 6.2 Annexe 2 : le calcul de $\tau$

### 6.2.1 Chercher $\tau$

On se souvient que  $\tau$  est l'avatar complexe de la symétrie d'axe  $Ox$ . Il normalise donc la rotation de  $2\pi/3$ , dans son nouvel habit, évidemment, c'est-

à-dire vérifie<sup>24</sup>  $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ . Comme on a  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$ , un

calcul facile montre que cela impose que  $\tau$  est de la forme  $\tau = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \mu & \nu & \lambda \\ \nu & \lambda & \mu \end{pmatrix}$ .

On suppose de plus que  $\tau$  est une involution :  $\tau^2 = \text{Id}$ , ce qui fournit les deux relations  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ,  $\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0$ . En élevant  $\lambda + \mu + \nu$  au carré, on trouve  $\lambda + \mu + \nu = \pm 1$ .

On impose de plus que le déterminant de  $\tau$  soit égal à 1. On a  $\det \tau = 3\lambda\mu\nu - \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3$ . Un calcul de fonctions symétriques à partir de  $(\lambda + \mu + \nu)^3$  montre que cela signifie qu'on a  $\lambda + \mu + \nu = -1$ .

Il reste à imposer que  $\tau$  conserve  $K$ , ce qui conduit à 6 relations. En particulier on obtient, en identifiant les termes en  $X^4$  la relation (A) :

<sup>24</sup>A priori, à un scalaire près, mais il nous suffit de trouver un  $\tau$  convenable.



$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$  et en identifiant ceux en  $X^3Y$  la relation (B) :

$$\lambda^3\nu + \mu^3\lambda + \nu^3\mu + 3(\mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2 + \lambda^2\mu^2) = 1.$$

Or, en écrivant  $(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) = 0$  on trouve (en tenant compte de (A))  $\lambda^3\nu + \mu^3\lambda + \nu^3\mu = \lambda\mu\nu$  et en calculant  $(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)^2 = 0$  on trouve  $\mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2 + \lambda^2\mu^2 + 2\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu) = 0$ , d'où  $\mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2 + \lambda^2\mu^2 = 2\lambda\mu\nu$ . La relation (B) impose alors  $7\lambda\mu\nu = 1$  et il en résulte que  $\lambda, \mu, \nu$  sont les trois racines de l'équation  $X^3 + X^2 - \frac{1}{7} = 0$ . On note que ces racines sont réelles.

**6.1 Remarque.** La relation  $\lambda + \mu + \nu = -1$  montre que  $\tau$  laisse stable la bitangente  $X + Y + T = 0$ .

### 6.2.2 Calculs dans $\mathbf{Q}(\zeta)$

Nous allons identifier l'équation précédente en termes de racines septièmes de l'unité.

Le groupe de Galois de l'extension  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\zeta)$  est le groupe  $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$ . Il contient deux sous-groupes, l'un d'ordre 3, qui correspond aux carrés de  $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$  : 1, 2, 4, l'autre d'ordre 2 :  $\{1, -1\}$ . Le corps fixe du premier est de degré 2 engendré par  $\alpha = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$  (ou  $\bar{\alpha} = \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^3$ ). On a  $\alpha + \bar{\alpha} = -1$  et  $\alpha\bar{\alpha} = 2$ , de sorte que  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  sont les racines de  $x^2 + x + 2 = 0$ . On a donc :

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

Le corps fixe du sous-groupe d'ordre 2 (engendré par la conjugaison complexe :  $\zeta \mapsto \zeta^{-1} = \bar{\zeta}$ ) est de degré 3. Il contient les trois éléments :

$$\lambda' = \frac{i}{\sqrt{7}}(\zeta - \zeta^{-1}), \quad \mu' = \frac{i}{\sqrt{7}}(\zeta^2 - \zeta^{-2}), \quad \nu' = \frac{i}{\sqrt{7}}(\zeta^{-3} - \zeta^3),$$

permutés par le sous-groupe d'ordre 3. Ces nombres sont racines d'une équation de degré 3 à coefficients dans  $\mathbf{Q}$  que l'on trouve en calculant :  $\lambda' + \mu' + \nu' = -1$ ,  $\mu'\nu' + \nu'\lambda' + \lambda'\mu' = 0$  et  $\lambda'\mu'\nu' = \frac{1}{7}$ . Ces nombres sont donc les racines de l'équation  $X^3 + X^2 - \frac{1}{7} = 0$  et on a bien les valeurs de  $\lambda, \mu, \nu$  annoncées dans le texte.

### 6.2.3 Réciproque

Il reste à montrer que toutes les relations exprimant l'invariance de  $K$  sont bien vérifiées, et notamment la relation (A). Pour cela, on note que l'équation

du troisième degré implique  $\lambda^3 = -\lambda^2 + \frac{1}{7}$ , ce qui conduit à  $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = -\frac{1}{7} - (\lambda^2\mu + \mu^2\nu + \nu^2\lambda)$ . On calcule cette dernière expression à partir des valeurs explicites de  $\lambda, \mu, \nu$ , on trouve  $\lambda^2\mu + \mu^2\nu + \nu^2\lambda = -\frac{1}{7}$  et le résultat s'ensuit.

#### 6.2.4 Valeurs propres et vecteurs propres

Comme  $\tau$  est une involution de déterminant 1 distincte de Id, les valeurs propres de  $\tau$  sont 1 (simple) et  $-1$  (double) (ce que confirme un calcul direct du polynôme caractéristique). Les vecteurs propres relatifs à  $-1$  forment un plan vectoriel, donc une droite projective qui coupe  $K$  en 4 points qui sont donc fixés par  $\tau$ .

En ce qui concerne la valeur propre 1 on a le résultat suivant :

**6.2 Lemme.** *Le point  $m$  de  $\mathbf{P}^2$  correspondant à la droite propre de  $\tau$  relative à la valeur propre 1 n'est pas sur  $K$ .*

*Démonstration.* Si on ajoute les équations donnant la droite propre, on voit qu'on a  $x + y + t = 0$ , autrement dit  $m$  est sur la bitangente  $X + Y + T = 0$ . Mais c'est impossible car  $m$  est réel ( $\tau$  et la valeur propre le sont) et on a vu que les contacts de la bitangente sont les points  $(1, j, j^2)$  et  $(1, j^2, j)$ .

En définitive,  $\tau$  admet 4 points fixes sur  $K$ , alignés.

### 6.3 Annexe 3 : les bitangentes

#### 6.3.1 Quelques remarques

Le lemme suivant va permettre de tester si une droite est bitangente à une quartique :

**6.3 Lemme.** *Soit  $P(X) = AX^4 + BX^3 + CX^2 + DX + E$  un polynôme à coefficients complexes. On suppose  $A \neq 0$ . Alors  $P$  est un carré dans  $\mathbf{C}[X]$  si et seulement si on a les deux relations :*

$$4ABC = B^3 + 8A^2D \quad \text{et} \quad EB^2 = AD^2.$$

*La condition est identique pour le polynôme homogénéisé  $P^\sharp(X, T)$ .*

*Démonstration.* Si  $P(X) = (uX^2 + vX + w)^2 = Q(X)^2$  on vérifie les relations. Réciproquement, si on a les relations, on pose  $u = \sqrt{A}$  et  $w = \sqrt{E}$ , le signe étant choisi pour avoir  $\sqrt{A}D = \sqrt{E}B$ . On prend alors  $v = B/2\sqrt{A}$  et on vérifie qu'on a  $P = Q^2$ .

**6.4 Corollaire.** *Les droites  $X + jY + j^2T$  et  $X + j^2Y + jT$  ne sont pas bitangentes à  $K$ .*

*Démonstration.* On résout en  $X$ , par exemple  $X = -jY - j^2T$  pour la première, et on reporte dans l'équation de  $K$ . On trouve :

$$Y^4 + (3j - 1)Y^3T + 3j^2Y^2T^2 + (j + 1)YT^3 + j^2T^4 = 0$$

et ce polynôme n'est pas un carré en vertu de ce qui précède.

### 6.3.2 Les bitangentes de la quartique de Klein

**6.5 Proposition.** *La quartique de Klein admet au moins 28 bitangentes.*

*Démonstration.* On a vu que le groupe d'automorphismes  $G$  de  $K$  est de cardinal 168 et qu'il opère sur les bitangentes. On considère la bitangente  $D$  d'équation  $X + Y + T = 0$ . On sait que son stabilisateur  $H$  contient le groupe à 6 éléments  $\langle \sigma, \tau \rangle$ . Il est donc de cardinal multiple de 6. Par ailleurs, l'orbite de  $D$  contient les droites  $\rho^i(D)$  pour  $i = 0, \dots, 6$ . Ces 7 droites sont distinctes. On peut le voir soit sur leurs équations (de la forme  $\zeta^4X + \zeta^2Y + \zeta T = 0$ ), soit en notant que le stabilisateur de  $D$  sous  $\langle \rho \rangle$  est réduit à l'identité. L'orbite de  $D$  étant de cardinal  $\geq 7$ , son stabilisateur  $H$  est d'indice  $\geq 7$  et, son cardinal, qui divise 168 en étant multiple de 6 est 6, 12 ou 24, l'orbite de  $D$  étant alors de cardinal 28, 14 ou 7.

Si l'orbite n'avait que 7 éléments, elle contiendrait exactement les  $\rho^i(D)$ , pour  $i = 0, 1, \dots, 6$ . Or, elle contient aussi  $\tau\rho(D)$  qui est la droite  $uX + vY + wT$  avec  $u = \lambda\zeta^4 + \mu\zeta^2 + \nu\zeta$ ,  $v = \mu\zeta^4 + \nu\zeta^2 + \lambda\zeta$  et  $w = \nu\zeta^4 + \lambda\zeta^2 + \mu\zeta$  (notations de 6.2.2). On vérifie que cette droite est différente des  $\rho^i(D)$  (sinon le rapport  $u/v$  serait une racine septième de 1, or, à  $\frac{i}{\sqrt{7}}$  près, on a  $u = 2\zeta^{-2} - \zeta^3 - 1$  et  $v = 2\zeta^{-1} - \zeta^{-2} - 1$  et on vérifie que le rapport n'est pas une racine septième de l'unité.

Le cas d'une orbite  $\omega$  de 14 éléments est impossible. En effet, comme  $\sigma$  ne fixe que  $D$ , le groupe  $\langle \sigma \rangle$  découpe  $\omega - \{D\}$  en orbites de 3 éléments, ce qui est absurde puisque 3 ne divise pas 13.

En conclusion, l'orbite de  $D$  est de cardinal 28 et il y a donc au moins 28 bitangentes à  $K$ .

Il ne reste plus qu'à conclure :

**6.6 Théorème.** *La quartique de Klein admet exactement 28 bitangentes.*

*Démonstration.* Il reste à voir qu'elle a au plus 28 bitangentes. On montre ce résultat à la main, sans utiliser les formules de Plücker. On se place en

un point  $(a, b, 1)$  de la partie affine de  $K$ . On a donc  $a^3b + b^3 + a = 0$ . On écrit la tangente  $D$  en ce point sous la forme  $ux + vy + w$  avec  $u = 3a^2b + 1$ ,  $v = 3b^2 + a^3$  et  $w = 2a - a^3b = 3a + b^3$ . On coupe  $K$  par  $D$ . L'équation aux  $x$  d'intersection est de la forme  $(x - a)^2(Ax^2 + Bx + C) = 0$ , avec  $A = uv^2$ ,  $B = wv^2 + u^3 + 2auv^2$  et  $a^2C = w^3$ . Ces coefficients sont des polynômes en  $a, b$  de degrés respectifs 9, 10 et 10. Dire que  $D$  est une bitangente c'est dire que le discriminant  $\Delta = B^2 - 4AC$  est nul. En homogénéisant, on trouve que les points de contacts des bitangentes sont donnés par deux équations homogènes en  $(a, b, c)$  : l'équation  $F = 0$  de la quartique et le discriminant  $\Delta = 0$ . Comme  $\Delta$  est de degré 20, il y a 80 points d'intersection. Mais, en regardant le point  $(0, 0, 1)$ , on s'aperçoit que les 24 inflexions sont aussi dans l'intersection de  $F$  et de  $\Delta$ . Il reste donc 56 points d'intersections pour les vraies bitangentes : il y a donc (au plus) 28 bitangentes.

#### 6.4 Annexe 4 : Le plongement dans $\mathfrak{S}_8$ et l'isomorphisme avec $PSL(2, \mathbf{F}_7)$

Le groupe  $G$  opère sur les huit triangles d'inflexions de  $K$  que nous avons précisé en 4.9.2 et qui ont pour numéros  $1, \dots, 7, \infty$  (rappelons qu'on a posé  $a = a_\infty, b = b_\infty$  et  $c = c_\infty$ ). Cette opération donne un homomorphisme de  $G$  dans  $\mathfrak{S}_8$  qui est injectif puisque  $G$  est simple. On peut aisément décrire les images des générateurs de  $G$  grâce aux calculs effectués plus haut.

On obtient ainsi,  $\rho = (\infty)(1234567)$ ,  $\tau = (\infty 1)(27)(34)(56)$  et  $\sigma' = (\infty 71)(264)(3)(5)$ ,  $\gamma = (\infty 135)(2674)$ . Un corollaire de ce calcul est l'autre description algébrique de  $G$  :

**6.7 Théorème.** *Le groupe  $G$  est isomorphe à  $PSL(2, \mathbf{F}_7)$ .*

*Démonstration.* On fait opérer  $PSL := PSL(2, \mathbf{F}_7)$  sur la droite projective  $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_7)$  formée des points  $1, 2, \dots, 7, \infty$  par homographie. Cela signifie que la matrice  $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  opère sur la droite projective par la formule  $u(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , avec les conventions usuelles sur le point à l'infini. On obtient ainsi un plongement de  $PSL$  dans  $\mathfrak{S}_8$ .

On considère alors<sup>25</sup> les deux éléments  $\tau$  et  $\sigma'$  de  $PSL$  donnés par :  $\tau_1(z) = \frac{-z + 2}{-z + 1}$  et  $\sigma'_1 = \frac{1}{-z + 1}$ . On vérifie que les permutations associées à  $\tau$  et  $\tau_1$  (resp. à  $\sigma'$  et  $\sigma'_1$ ) sont les mêmes. Mais les éléments  $\tau$  et  $\sigma'$  étant d'ordres 2 et 3 et leur produit d'ordre 7, ces éléments engendrent  $G$ , et de

<sup>25</sup>Bien entendu, on a déterminé ces éléments à partir de leur effet présumé sur les points  $0, 1, \infty$ .

même pour  $\tau_1, \sigma_1$  et  $PSL$ . En effet, si  $H$  est le sous-groupe engendré, son ordre est multiple de 42 et il est donc d'indice  $\leq 4$  dans  $G$ . Le groupe  $G$  opère alors transitivement sur  $G/H$  par translation, ce qui donne un homomorphisme de  $G$  dans  $\mathfrak{S}(G/H)$ . Vu les cardinaux, cet homomorphisme ne peut être injectif et, puisque  $G$  est simple, il est nécessairement trivial, ce qui implique  $H = G$ .

Il en résulte que les images (injectives) de  $PSL$  et de  $G$  dans  $\mathfrak{S}_8$ , qui sont engendrées par les mêmes permutations, sont égales et que ces groupes sont isomorphes.

**6.8 Remarque.** On peut aussi décrire les symétries axiales en termes de permutations : on a  $s_{(ae)} = (\infty)(4)(17)(26)(35)$ ,  $s_{(af)} = (\infty)(1)(27)(36)(45)$  et  $s_{(ef)} = (\infty 1)(2)(35)(46)(7)$ . Cela permet de montrer que dans le groupe d'ordre 336 il y a d'autres éléments négatifs que les symétries axiales, par exemple  $s_{(ae)}s_{(af)}s_{(ef)} = (\infty 7634521)$  est un élément d'ordre 8.

## 6.5 Quelques questions supplémentaires sur le groupe

Maintenant que la structure de  $G$  est élucidée, on peut en achever la description.

### 6.5.1 Les éléments de $G$

**6.9 Proposition.** *Les 168 éléments de  $G$  se répartissent en 5 classes de conjugaison : 48 éléments d'ordre 7, 56 d'ordre 3, 21 d'ordre 2, 42 d'ordre 4 et le neutre.*

*Démonstration.* On a précisé plus haut le nombre d'éléments d'ordres 2, 3, 7. Pour continuer, le plus simple est peut-être d'utiliser la variante  $G = PSL(2, \mathbf{F}_7)$ . On y repère des éléments  $\rho, \sigma, \tau$  d'ordres 7, 3, 2 (on n'oubliera pas qu'on travaille modulo  $\pm \text{Id}$ ) :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre facilement que le centralisateur de  $\rho$  est  $\langle \rho \rangle$  et celui de  $\sigma$ ,  $\langle \sigma \rangle$ , ce qui donne les cardinaux des classes de conjugaison. Pour  $\tau$ , le centralisateur est d'ordre 8. Il contient deux éléments d'ordre 4 :  $\begin{pmatrix} 2 & -2\epsilon \\ 2\epsilon & 2 \end{pmatrix}$  avec  $\epsilon = \pm 1$  et quatre d'ordre 2 en plus de  $\tau$  (par exemple  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ) et

les variantes changées de signes). Cette répartition des ordres des éléments montre que ce centralisateur est isomorphe au groupe diédral  $\mathbf{D}_4$ .

Si  $\gamma$  est un élément d'ordre 4, on note  $H$  son centralisateur. Il centralise aussi  $\gamma^2$  qui est une involution. Il est donc contenu dans  $\mathbf{D}_4$ . Mais, dans le groupe diédral, les éléments d'ordre 4 ne sont centralisés que par le groupe qu'ils engendrent. On a donc  $|H| = 4$  et la classe de  $\gamma$  est de cardinal 42. Comme on a  $48 + 56 + 21 + 42 + 1 = 168$ , le compte est bon.

### 6.5.2 Les sous-groupes de $G$

Les ordres possibles pour les sous-groupes de  $G$  sont, *a priori*, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 14, 21, 24, 28. En effet, il ne peut y avoir de sous-groupe de cardinal  $> 28$  sinon le groupe simple opérerait transitivement sur un ensemble de cardinal  $< 6$ , ce qui lui est interdit par sa simplicité. Les cas 14 et 28 sont interdits aussi. En effet, dans un tel sous-groupe  $H$ , le 7-Sylow serait distingué, donc  $H$  serait contenu dans le normalisateur du Sylow. Or le normalisateur d'un 7-Sylow est de cardinal 21, puisqu'il y a 8 sous-groupes de Sylow d'ordre 7.

En revanche, il y a des sous-groupes de cardinal 24. En effet, le groupe  $G = GL(3, \mathbf{F}_2)$  opère transitivement sur  $\mathbf{F}_2^3 - \{0\}$  qui est de cardinal 7 et le stabilisateur d'un élément est d'ordre 24. Précisément :

**6.10 Proposition.** *Soit  $a$  un point de  $\mathbf{F}_2^3 - \{0\}$  (ou de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_2)$ ), c'est la même chose !). Le sous-groupe  $H$  de  $GL(3, \mathbf{F}_2)$  qui fixe  $a$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_4$ .*

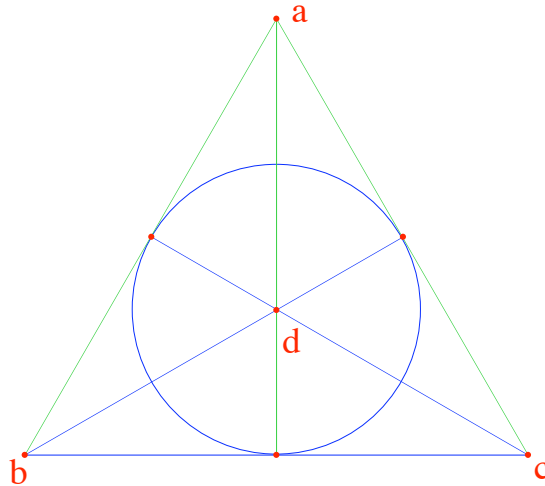


Figure 8: Le plan projectif sur  $\mathbf{F}_2$

*Démonstration.* La figure ci-dessus représente les 7 points et les 7 droites du plan projectif sur  $\mathbf{F}_2$ . Le sous-groupe  $H$  opère sur les quatre droites qui

ne contiennent pas  $a$  (droites bleues). On a ainsi un homomorphisme de  $H$  dans  $\mathfrak{S}_4$ . Cet homomorphisme est injectif. En effet, si  $h \in H$  laisse stable les droites bleues, les points  $b, c, d$  qui sont à l'intersection de telles droites sont fixes. Comme  $a, b, c, d$  est un repère de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_2)$ , c'est que  $h$  est l'identité.