L'expérimentation en mathématiques

La science ne nous apprend rien,
c'est l'expérience qui nous apprend quelque chose.
R. Feynman

Introduction

Je remercie les organisateurs du colloque de la Copirelem de m'avoir invité à faire cette conférence. Initialement, la demande qui m'avait été faite était de parler de modélisation et d'expérimentation en mathématiques, mais, après réflexion, j'ai choisi de n'aborder ici que la question de l'expérimentation. J'ai choisi cette option pour deux raisons. D'abord, le temps qui m'est imparti me semble trop court pour aborder valablement les deux questions et, même si toutes deux m'intéressent, j'ai choisi celle qui me faisait le plus envie. Ensuite, en y réfléchissant bien, je ne suis pas sûr que ces deux notions, qui sont évidemment corrélées dans les sciences expérimentales, soient forcément liées en mathématiques. Je verrais plutôt la modélisation comme l'une des réponses à la question : pourquoi faire des mathématiques, tandis que l'expérimentation serait, elle, l'une des réponses à la question : comment faire des mathématiques.

Il me semble que parmi les raisons de faire des mathématiques, et partant, de les enseigner, l'une des plus importantes, la plus importante sans doute vis-à-vis du monde extérieur, est à chercher dans leurs innombrables applications, à des niveaux et dans des domaines variés. C'est tout cela que j'ai envie d'englober dans le mot modélisation : la description du réel au moyen des mathématiques. Cette utilité des mathématiques est fondamentale à l'école primaire et elle est assez bien reconnue, chacun comprenant bien qu'il lui sera utile de savoir "compter" dans la plupart des situations de la vie courante, ou encore d'être familier avec les objets géométriques les plus élémentaires. Elle est peut-être moins évidente au collège et au lycée où l'apport des mathématiques n'est pas toujours clair (je pense ici à l'utilisation de l'algèbre et à l'apprentissage de la démonstration, notamment en géométrie). Ce qui est évident, en tous cas, c'est qu'au niveau de l'enseignement supérieur scientifique et technologique, les mathématiques sont un outil indispensable et qu'il est d'un intérêt capital pour le pays que le système scolaire forme suffisamment de chercheurs, d'ingénieurs, de techniciens dotés d'un bagage mathématique important. Si je n'aborde pas ce point ici, ce n'est donc pas parce que je pense qu'il est mineur, mais parce que je me sens peu qualifié pour en parler, car les mathématiques que je pratique, comme chercheur, n'ont pas d'applications – pas encore ? – à ma connaissance et je suis donc mal placé pour développer ce point. J'ai cependant essayé de faire cela, dans une conférence prononcée devant la régionale d'Alsace de l'APMEP en 2003. Je renvoie le lecteur qui souhaiterait connaître ma position sur ce point à l'article de *L'Ouvert* issu de cette conférence (numéro 109 d'avril 2004).

Mais, à côté de cette raison utilitaire, l'enseignement et la pratique des mathématiques ont une autre raison d'être : ils contribuent à former les citoyens au raisonnement et à la réflexion, donc à leur donner les outils pour comprendre le monde et le regarder avec un esprit critique. C'est à ce deuxième aspect que renvoie la question : comment faire des mathématiques. En effet, on peut tout à fait enseigner les mathématiques de manière rigide, formelle, contraignante et insipide. On le voit trop souvent dans les classes, à tous les niveaux[1], et c'est d'ailleurs souvent ainsi que le grand public les perçoit. Je pense qu'on ne remplit pas alors l'objectif d'apprendre à raisonner, à penser, en un mot. Pour éviter cette dérive, l'une des solutions essentielles me semble être de revenir à la vocation première des mathématiques et de leur enseignement, qui est de poser[2] et de résoudre des problèmes. C'est dans ce cadre que j'évoquerai l'expérimentation, comme méthode de recherche et d'investigation. Je vais même faire de ce principe la première d'une longue série de maximes[3] que je soumets à votre réflexion :

0.1 Maxime. *Faire des mathématiques, c'est poser et – si possible – résoudre des problèmes.*

Un mot sur les raisons de ma présence parmi vous. Comme vous le savez peut-être, je n'ai aucune expérience de l'enseignement en formation des professeurs des écoles[4], même si j'ai beaucoup parlé depuis quinze ans, avec des formateurs PE de l'IUFM de Versailles et d'ailleurs. Ma légitimité (s'il en est

[1] Y compris dans l'enseignement supérieur.

[2] De manière provocatrice, sans doute parce que c'est ce je sais le mieux faire, j'ai envie de dire que c'est cela le plus important, battant en brèche une tradition séculaire de l'enseignement des mathématiques, qui ne sort que rarement du : “montrer que”.

[3] Ces maximes n'ont aucune valeur prescriptive : elles me permettent seulement de préciser ma propre vision des choses.

[4] Hormis au niveau de la licence pluridisciplinaire d'Orsay que j'ai mise en place et où j'ai enseigné pendant sept ans, mais il s'agit d'une licence, donc quelque chose qui se situe avant la formation des PE proprement dite.

une !) est donc à chercher ailleurs. J'imagine qu'elle réside dans mon statut de chercheur, donc de créateur (modeste) de mathématiques et dans ma longue expérience d'enseignant. En vérité, sur ce thème de l'expérimentation, ce que je peux savoir des pratiques de l'école et de la formation des maîtres du primaire, semble indiquer que je vais prêcher nombre de convaincus et enfoncer beaucoup de portes ouvertes, en prônant une pratique qui est probablement la vôtre depuis belle lurette. J'espère simplement que vous ne m'en tiendrez pas rigueur.

1 Faire des mathématiques

1.1 Introduction

Mon point de départ est le document d'accompagnement des programmes de mathématiques de l'école primaire[5], et précisément le paragraphe qui concerne les "problèmes pour chercher". Je cite le document en question :

[Il s'agit] de véritables problèmes de recherche, pour lesquels [les élèves] ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problème qui est privilégiée, dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter.

Je souscris tout à fait à cette vision de l'activité de recherche, qui est voisine de ma propre pratique, non seulement dans ma fonction de chercheur, mais aussi, mais surtout, dans mon activité quotidienne d'enseignant. En particulier j'utilise systématiquement, pour résoudre des problèmes, une méthode que je n'hésite pas à qualifier d'expérimentale. J'appelle ici problème une question mathématique, en général ouverte, soit que je me la soit posée tout seul, soit qu'elle me l'ait été par un collègue ou un étudiant[6].

J'essaierai dans ce qui suit de décrire de façon générale cette méthode

[5] Voir aussi [Arsac], [Kuntz], [Massola] entre autres.

[6] Je n'entends donc pas du tout ici le mot problème au sens scolaire du terme comme un problème de Bac ou un problème de CAPES. D'une certaine façon, ces problèmes là sont (en général) le contraire de vrais problèmes car les élèves qui les résolvent n'ont ni à se poser les questions, ni à faire preuve d'initiative pour les résoudre, mais au contraire à se couler dans la pensée de l'auteur du problème en appliquant les techniques adéquates. Attention, je ne dis pas que de tels problèmes ne sont pas utiles. Ils ont pour fonction de vérifier les acquisitions d'un certain nombre de techniques et de modes de raisonnements sans lesquels on ne peut pas faire de mathématiques. Mais ce n'est pas de cela dont je parle aujourd'hui.

expérimentale et de l'illustrer par des exemples concrets. Comme je l'ai dit plus haut, je ne fais pas ici de lien direct avec l'activité de modélisation. Il se trouve que, ni ma recherche, ni l'essentiel de mon enseignement, ne se situent dans le domaine des mathématiques appliquées et les exemples que je prendrai viendront donc des mathématiques pures (arithmétique, géométrie, analyse, géométrie algébrique). Il me semble que cela ne fait que renforcer ma thèse : la méthode expérimentale est universelle en mathématiques, qu'elles soient appliquées ou non.

En discutant avec Hélène Gispert à propos de nos conférences respectives, un fait nous a frappés tous deux : le souci de prôner une méthode expérimentale dans l'enseignement des mathématiques, qui apparaît dans le document d'accompagnement cité ci-dessus, est quelque chose de nouveau dans les programmes, même au niveau de l'école primaire. La question qui se pose est donc de savoir à quelle visée, notamment sociale, répond cette nouvelle demande. On peut penser que la perte d'importance des techniques opératoires, liée à l'évolution technologique y est pour beaucoup. En tous cas, il est clair que les nécessités économiques d'aujourd'hui et la structure de la société n'ont rien à voir avec celles de la fin du XIX-ième siècle, ni même avec celles des années 1950. Peut-être certains pourraient-ils en prendre conscience ...

1.2 Quelques problèmes

Au commencement, il y a une situation, de nature mathématique ou au moins mathématisable (ce pourrait être une situation de la vie courante, dans ce cas il y a d'abord une phase de modélisation). Cette situation peut donner lieu à un ou des problèmes. Je vais, tout au long de cet exposé, étudier plusieurs problèmes qui illustreront mes propos en me servant de fils conducteurs[7] (et je vous en laisserai quelques autres à dérouler vous mêmes). Je les énumère ici, *grosso modo* dans un ordre de difficulté croissante. Tous sauf les deux derniers sont des questions que j'ai rencontrées dans mon enseignement. Certains sont élémentaires, d'autres moins, ils sont formulés de manière plus ou moins vague, mais on verra que l'approche est similaire dans tous les cas. J'ai choisi de privilégier l'authenticité en sélectionnant des problèmes que j'ai vraiment rencontrés[8]. En contrepartie, ils ne concernent pas nécessairement l'école primaire, mais la démarche devrait être valable à n'importe quel niveau.

[7] Dans l'exposé oral, j'ai abordé seulement les problèmes 2,3,4,6,10,11.

[8] Et j'ai dû me censurer pour ne pas en proposer de nombreux autres ; les problèmes sont comme les têtes de l'Hydre de Lerne : on en résout un, il en surgit dix autres !

1.2.1 Aire maximum

Parmi les triangles (ou les polygones) inscrits dans un cercle (fig. 1), quels sont ceux qui ont la plus grande aire (ou le plus grand périmètre) ?

1.2.2 Les aires égales

On considère un triangle ABC (fig. 2). Quels sont les points M du plan qui vérifient l'égalité d'aires $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AMC)$? Variante : quels sont les points du plan qui sont tels que le rapport d'aires $\mathcal{A}(AMB)/\mathcal{A}(AMC)$ soit une constante positive donnée ?

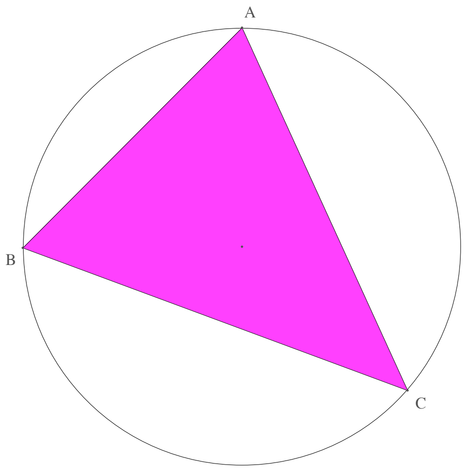


Figure 1

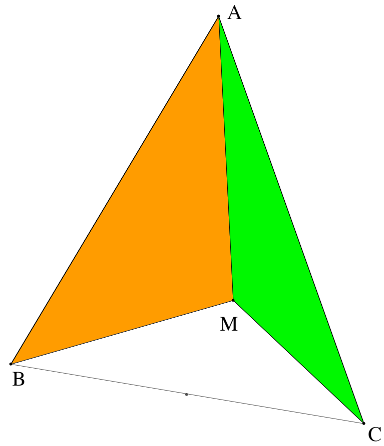


Figure 2

1.2.3 La longueur du segment mobile

Soit ABC un triangle rectangle en A, P un point de l'hypoténuse et M, N ses projetés orthogonaux sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement (voir fig. 3 ci-dessous). Pour quelle position du point P la longueur MN est-elle minimale ?

1.2.4 Sommes et différences de carrés

Tous les entiers ne sont pas des carrés parfaits, mais de nombreuses questions d'arithmétique consistent à essayer de représenter les entiers à l'aide des carrés. Par exemple : tout entier naturel est-il somme de deux carrés (ou de plus de deux) ? est-il différence de deux carrés ? est-il de la forme $x^2 + 5y^2$? de la forme $x^2 + dy^2$ avec d entier > 0 fixé ?

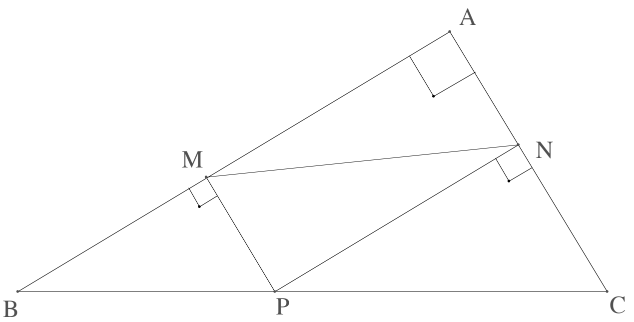


Figure 3

1.2.5 Les développements décimaux

On considère un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ et on effectue la division euclidienne de p par q en base 10, en écrivant aussi les chiffres derrière la virgule. On obtient un développement décimal. Que peut-on dire de ce développement ?

1.2.6 Les fractions égyptiennes

Les anciens égyptiens utilisaient des fractions, mais seulement de numérateur 1, c'est-à-dire de la forme $\frac{1}{n}\cdot$ Bien sûr, tout nombre rationnel s'écrit comme somme de fractions égyptiennes : il suffit de répéter la même fraction :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}, \qquad (p \text{ fois})$$

mais on peut se demander si tout rationnel positif peut s'écrire comme somme finie de fractions égyptiennes de dénominateurs *tous différents*. Il y a de nombreuses variantes de ce problème, par exemple : peut-on écrire 1 comme somme de deux ou trois ou quatre ou ... fractions égyptiennes distinctes, cf. par exemple [Arsac].

1.2.7 Sommes de nombres consécutifs

Il s'agit de dire quels sont les entiers naturels qui sont sommes (d'un nombre quelconque ≥ 2) d'entiers consécutifs[9].

[9] Il y a de nombreuses variantes de ce problème. J'emprunte la formulation proposée, avec un nombre quelconque d'entiers, à Michèle Artigue, cf. [Artigue]. Le problème peut être posé avec des sommes de trois entiers consécutifs (cf. [Ermel]), ou de quatre, ou ...

1.2.8 Les diviseurs

La question des nombres admettant beaucoup de diviseurs est très ancienne. Il semble bien que le choix des babyloniens d'utiliser la base de numération 60 soit lié au fait que ce nombre a beaucoup de diviseurs. De même, Platon choisit le nombre de $5040 = 7!$ pour la population idéale de sa République parce que ce nombre est divisible par tous les nombres de 1 à 12, sauf 11, ce qui est censé faciliter la répartition des tâches entre les habitants.

Comme 60, comme 5040, certains nombres ont beaucoup de diviseurs relativement à leur taille. Que peut-on dire à ce sujet ?

1.2.9 Le reste de la série

Il s'agit d'un exercice qu'on trouve dans certains manuels de terminale S. On étudie la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Le lecteur aura reconnu le développement en série de $\operatorname{Arctan} 1 = \pi/4$. L'exercice permet de montrer, en utilisant le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique, que la suite (u_n) converge effectivement vers $\pi/4$ et qu'on a, plus précisément :

$$r_n = \left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2n+3}.$$

La question est de savoir si cette majoration du reste est optimale ou non, ou encore de trouver un équivalent de r_n.

1.2.10 Les suites logistiques

Cet exemple est l'occasion de parler de modélisation et précisément du modèle dit "logistique à temps discret" d'évolution de populations. Dans ce modèle, la population est bornée et si on appelle u_n le rapport entre la population au temps (discret) n et la population maximum, on a une relation de récurrence $u_{n+1} = \mu\, u_n(1-u_n)$, avec $0 \leq u_0 \leq 1$ et $0 \leq \mu \leq 4$. La question est d'étudier le comportement d'une telle suite.

1.2.11 Les médiatrices hyperboliques

Chacun sait que les hauteurs, médiatrices, etc. d'un triangle sont concourantes en géométrie euclidienne, mais qu'en est-il en géométrie non euclidienne (par exemple en géométrie hyperbolique) ?

1.2.12 Relations entre les racines de l'unité

Il s'agit d'un problème ouvert sur lequel je travaille actuellement avec Myriam Déchamps. C'est un problème d'analyse harmonique, mais qui a une forte connotation d'algèbre et de géométrie algébrique. Le problème porte sur les racines n-ièmes de l'unité (1, $\zeta = e^{2i\pi/n}$, ζ^2, ... ζ^{n-1}) et il consiste à étudier ce qu'on appelle les quasi-relations entre ces racines, c'est-à-dire les relations de la forme :

$$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1} = 0$$

avec des coefficients a_i qui ne peuvent valoir (toute la difficulté est là !) que $0, 1$ ou -1. La question essentielle est de déterminer ou d'estimer le nombre de telles quasi-relations en fonction de n.

2 La démarche expérimentale

Face à une situation comme celles évoquées ci-dessus, plus ou moins vague, avec des questions qui peuvent être très imprécises (voir par exemple 1.2.8 ou 1.2.10), je propose une méthode d'investigation systématique, que je n'hésite pas à désigner sous le nom de méthode expérimentale. Elle comprend plusieurs étapes, à répéter éventuellement :

- expérience,
- observation de l'expérience,
- formulation de conjectures,
- tentative de preuve,
- contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples,
- formulation de nouvelles conjectures,
- nouvelle tentative de preuve, etc.

2.1 L'expérience

Il n'est sans doute pas inutile d'expliquer un peu plus en détail ce que peut signifier ce recours à l'expérience[10] et quel est son intérêt. Fondamentalement, cela signifie que, face à un problème général, on va regarder d'abord un cas

[10] Après tout, on ne range pas ordinairement les mathématiques parmi les sciences expérimentales et il subsiste d'ailleurs une différence fondamentale entre les deux domaines, car si la découverte en mathématiques peut être largement expérimentale, la validation reste la démonstration. Mais c'est la part que représente celle-ci qui est discutable. Martin Andler (cf. [Andler]) dit que les mathématiques consistent en 45% d'observation, 45% de démarche expérimentale et 10% de démonstration. Je ne dirais sans doute pas exactement les choses comme lui, mais cela me paraît essentiellement juste.

particulier, *a priori* plus simple, plus facile à examiner, plus aisément calculable, et le faire varier éventuellement. On examine ce qui se passe dans ce cas, on y repère des phénomènes, avec toujours en tête l'idée de **généraliser** ce que l'expérience nous aura montré.

On peut résumer cette démarche sous forme d'une maxime :

2.1 Maxime. *Les mathématiques sont aussi une science expérimentale et une science d'observation.*

Dans le choix des cas particuliers à étudier, il convient d'éviter certains cas triviaux, qui ne méritent pas un examen approfondi. Attention, le mot trivial dépend évidemment des connaissances de chacun, il n'a pas le même sens pour un élève de l'école primaire et pour un chercheur confirmé[11], mais ce qui est commun à tous c'est l'idée de regarder **le premier exemple non trivial**, le premier que l'on ne comprend[12] pas complètement[13].

Peut-être n'est-il pas inutile de donner quelques indications sur ce que j'entends par exemple trivial (et de noter qu'on peut parfois remettre en question cette appellation). Dans le problème des diviseurs, il est clair que les nombres premiers sont très mauvais (ils n'ont qu'eux-mêmes et 1 comme diviseurs) et on va donc les écarter. De même, s'il s'agit de représenter les entiers à l'aide de carrés, les carrés parfaits sont triviaux[14] (puisqu'on a $a^2 = a^2 \pm 0^2$). Les fractions $1/n$ sont déjà égyptiennes et leur décomposition est toute trouvée (quoiqu'on puisse aussi en chercher d'autres décompositions ...).

Un deuxième point est plus subtil. En fait, ce que l'on espère de l'exemple que l'on a choisi d'étudier, c'est qu'il soit un exemple **générique**, c'est-à-dire un exemple où les comportements observés vont s'étendre au cas général. Mais il arrive souvent que, même si l'exemple est non trivial, il soit cependant trop particulier, et qu'il induise une généralisation incorrecte. J'ai rencontré au moins deux exemples de ce type en recherche. Dans l'un d'eux, il y a quelques années, il a fallu revenir à la charge plusieurs fois, avec des exemples

[11] Par exemple, quand j'examine le problème de savoir si les nombres $n^2 + n + 11$ sont tous premiers, posé par [Sauter] et repris dans [Froger], je ne peux pas m'empêcher de reconnaître une question liée aux anneaux d'entiers des corps $\mathbf{Q}(i\sqrt{d})$ et cela me permet d'en envisager deux variantes avec 17 et 41 au lieu de 11. Cela étant, il y a beaucoup de questions sur ce thème pour lequelles je n'ai pas de réponse et donc où je dois expérimenter : comment construire des n tels que le nombre soit non premier, etc.

[12] L'expérience montre qu'on a souvent intérêt à revenir sur des exemples qu'on jugeait initialement trop simples !

[13] Dans mon domaine de recherche, la théorie des courbes gauches, le premier exemple non trivial est celui de la cubique gauche. Lorsque j'animais un groupe de travail pour des étudiants de DEA, ils avaient très vite compris que s'ils voulaient me faire plaisir, il fallait réussir à caser la cubique gauche dans chaque exposé ...

[14] Sauf si l'on souhaite les écrire comme somme de deux carrés non nuls ...

de plus en plus complexes, avant de comprendre vraiment ce qui se passait ; dans l'autre, tout récent, qui concerne le problème 1.2.12, l'étude du cas $n = pq$, qui donne une formule magnifique, m'a induit à penser que les cas suivants se comportaient de la même façon, ce qui est malheureusement faux, même pour le cas pqr.

2.2 Maxime. *Pour trouver un exemple générique, on commence par étudier le premier exemple non trivial*[15].

Cet aspect expérimental est lié à la technologie dont on dispose. Dans les exemples ci-dessus j'utiliserai papier et crayon (dans tous les exemples, mais notamment 1.2.4, 1.2.5, 1.2.7, 1.2.8), une calculatrice évoluée (exemples 1.2.5, 1.2.6, 1.2.8, 1.2.9, 1.2.10), un ordinateur, avec notamment le logiciel Cabri (1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.11) et le logiciel de calcul formel Macaulay (1.2.12).

2.2 Les conjectures

C'est l'un des moments les plus amusants de la recherche, l'un de ceux où l'on peut donner libre cours à son imagination. Il m'est impossible d'évoquer cette phase du travail de recherche sans citer Alexandre Grothendieck, l'un des plus grands mathématiciens du XX-ème siècle :

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".

Je n'ai jamais rencontré Grothendieck, mais je souscris absolument à sa façon de voir les choses et je me reconnais comme son disciple sur ce point. J'ai moi-même la conjecture facile, comme vous le verrez (mon collègue Robin Hartshorne parle de conjectures "au sens de Daniel") et la plupart de mes conjectures ne vivent que ce que vivent les roses, et encore[16]. Je vais maintenant examiner cette phase sur les divers exemples évoqués ci-dessus. Sur ce sujet, la maxime que je propose est :

2.3 Maxime. *Il faut for-mu-ler.*

[15] Mais on reste conscient que le chemin peut être long.

[16] L'un des principaux intérêts de l'expérience, notamment grâce aux moyens modernes, c'est justement de repérer très vite les conjectures fausses, c'est-à-dire les fausses pistes.

Cela signifie qu'il faut dire ce qu'on voit dans l'expérience, et si possible tout ce qu'on voit et rien que ce qu'on voit.

2.2.1 Aire maximum

L'outil d'expérimentation est Cabri, ou un autre logiciel de géométrie, qui permet d'afficher l'aire du triangle inscrit et de regarder comment elle varie. Ici, la conjecture est vite trouvée :

2.4 Conjecture. *Les triangles inscrits dans un cercle qui sont d'aire maximum sont les triangles équilatéraux.*

2.2.2 Les aires égales

C'est la même méthode. On fait varier M et, là encore, une conjecture se dégage assez vite, car on voit apparaître la médiane issue de A. On propose :

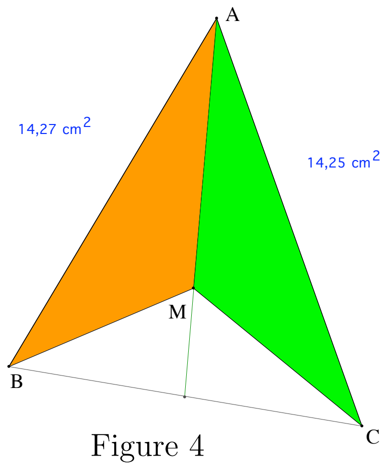


Figure 4

2.5 Conjecture. *Les aires de AMB et AMC sont égales si et seulement si M est sur la médiane de ABC issue de A.*

2.2.3 La longueur du segment mobile

Ce problème a été proposé par Mireille Sauter, cf. [Sauter], et repris dans sa classe de cinquième par Magali Froger (cf. [Froger]). Une première remarque c'est que la bonne conjecture, dans une vraie classe, et sans utilisation de logiciel de géométrie, n'est pas si évidente à se dégager : les élèves pensent d'abord au milieu de $[BC]$, puis à la bissectrice. Ces conjectures ne résistent pas à l'utilisation de Géoplan, avec lequel la conjecture émerge très vite :

2.6 Conjecture. *Le minimum de MN est atteint lorsque P est le projeté orthogonal de A sur (BC).*

Cet exemple est révélateur de l'un des intérêts principaux de l'expérimentation qui est la fermeture des fausses pistes. C'est notamment le cas avec les logiciels de géométrie. Quand on étudie un problème de géométrie (ouvert, bien entendu), on cherche souvent à établir des résultats intermédiaires et, avec Cabri, il est très facile de savoir rapidement si telle propriété que semble suggérer la figure est robuste ou non : il suffit de bouger les données. Dans le même ordre d'idée, les macros du type "lieu géométrique" sont aussi précieuses, soit qu'elles montrent aussitôt la nature du lieu (par exemple, un cercle, une droite, une conique), soit, au contraire, qu'elles montrent un lieu qui n'est manifestement pas une courbe usuelle (au sens moderne et donc restrictif du terme : plus personne ne connaît les courbes "remarquables" de nos ancêtres). Un bon exemple de ce style est donné par le problème suivant.

On considère un cercle Γ*, un point* A *et une longueur* l*. Un point* M *décrit* Γ*, on appelle* H *le milieu de* $[AM]$ *et on construit* P *vérifiant* $\widehat{MHP} = \pi/2$ *et* $HP = l$*. Quel est le lieu de* P *?*

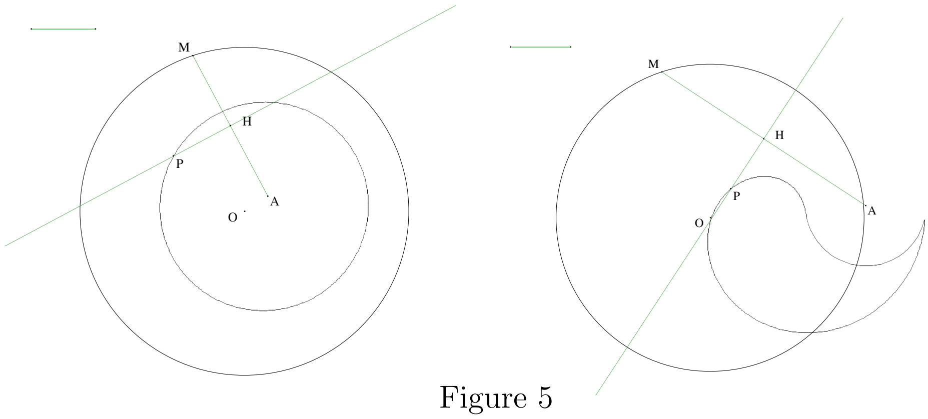


Figure 5

En faisant tracer le lieu par Cabri, et en déplaçant le point A, on voit que, pour certaines positions, il s'agit d'une courbe qu'une droite coupe en 4 points, ce qui permet de subodorer une courbe algébrique de degré ≥ 4, que l'on ne pourra atteindre que par le calcul.

Cela vaut bien une nouvelle maxime :

2.7 Maxime. *Un des intérêts de l'expérience, parfois, c'est de se rendre compte que le problème est difficile.*

2.2.4 Les sommes ou différences de carrés

C'est typiquement un problème où l'expérience est importante et parfois décisive. La première chose à faire pour pouvoir travailler est de disposer d'une liste des carrés (disons de 0 à 144). Voilà la liste :

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.$$

Ensuite, si l'on cherche quels sont les entiers différences[17] de deux carrés, on peut faire une première liste en retranchant deux carrés consécutifs, puis deux carrés sous-consécutifs, etc. Voilà ce qu'on obtient :

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$$

$$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44$$

$$9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63$$

$$16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80...$$

L'observation fait apparaître plusieurs faits :

- il semble qu'on atteint tous les nombres impairs,
- il semble qu'on atteint aussi tous les multiples de 4,
- en revanche il semble bien que l'on n'atteint pas les multiples de 2 qui ne sont pas multiples de 4.

La conjecture est donc la suivante :

2.8 Conjecture. *Les entiers n qui sont différences de deux carrés d'entiers sont les nombres impairs et les nombres multiples de* 4.

Pour les sommes de deux carrés, les choses sont plus compliquées. On voit facilement que certains nombres n'en sont pas : $3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19$, etc. Ensuite, les choses dépendent beaucoup des connaissances de l'expérimentateur ! Je conseille au lecteur de faire l'expérience : s'il ne connaît pas la réponse à la question des deux carrés, qu'il essaie donc de produire une conjecture permettant de décider si un entier est, ou non, somme de deux carrés. Il pourra alors s'assurer expérimentalement de sa solidité. S'il est plus savant, il pourra essayer avec les entiers sommes de trois carrés, ou ceux de la forme $x^2 + 5y^2$, voire d'autres.

2.2.5 Les développements décimaux

Commençons par le commencement. On calcule $1/2 = 0,5$, puis $1/3 = 0,3333\ldots333\ldots$. Rien que sur ces deux exemples, on voit déjà qu'il y a deux sortes de développements, certains sont finis, d'autres infinis. On continue avec $1/4 = 0,25$ puis $1/5 = 0,2$ et $1/6 = 0,1666\ldots666\ldots$. Le premier exemple non trivial, qui, on l'a vu, doit être l'objet de toute notre

[17] Ce n'est sans doute pas le problème le plus naturel, mais c'est le plus facile !

attention, est $1/7$ car on y voit apparaître une période non triviale : $1/7 = 0,142857\,142857\ldots$. On peut poursuivre l'expérience avec beaucoup d'autres exemples. Ici les choses sont très différentes selon que l'on fait les divisions à la main ou avec une calculatrice. La calculatrice permet de déceler de nombreux phénomènes, mais pas nécessairement de comprendre ce qui se passe[18]. Si on a le courage de faire la division à la main, en revanche, on comprend aussitôt le pourquoi de la périodicité. Dans le cas de $1/7$ par exemple, comme il n'y a que 6 restes possibles dans une division d'un nombre par 7 qui ne tombe pas juste (1, 2, 3, 4, 5, 6), on est sûr qu'au bout de 6 divisions au plus on va retomber sur une qui a déjà été vue (dans le cas de la division de 1 par 7 les restes apparaissent dans l'ordre[19] $1, 3, 2, 6, 4, 5$). On a donc trouvé (et essentiellement prouvé) un théorème :

2.9 Théorème. *Le développement décimal du rationnel p/q est périodique avec une période de longueur $\leq q - 1$.*

Si l'on est vraiment très imprudent, on peut se hasarder à prédire que la longueur de la période est toujours $q - 1$, mais comme les expériences déjà effectuées contredisent cette conjecture ...

2.2.6 Les fractions égyptiennes

Nous nous limiterons ici au cas des rationnels plus petits que 1, voir 4.7 pour le cas général.

On peut commencer par les fractions les plus simples : $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, etc. On trouve rapidement des expressions égyptiennes pour chacun de ces cas :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \ \ \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ \ \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \ \ \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}.$$

Pour trois d'entre elles, on avait une fraction a/b plus grande que $1/2$. On a donc déjà pris $1/2$ parmi les égyptiennes et, par chance, ce qui restait : $a/b - 1/2$ était une fraction égyptienne. Pour $2/5$, qui est $< 1/2$, on a utilisé $1/3$. Cela conduit d'abord à proposer la conjecture :

2.10 Conjecture. *Tout rationnel positif plus petit que* 1 *est somme d'un nombre fini de fractions égyptiennes distinctes.*

De plus, cela nous donne une idée pour trouver ces fractions : on prend comme première fraction égyptienne la plus grande possible. Et si la différence

[18]Et elle est vite limitée. Par exemple, on ne voit pas d'emblée la période des dix-septièmes, même sur une bonne calculatrice.

[19]Question : pourquoi cet ordre ?

n'est pas égyptienne comme pour $\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$? Eh bien, on recommence avec la fraction obtenue : $\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231}$ et c'est gagné.

2.2.7 Les sommes d'entiers consécutifs

C'est un problème qui peut être utilisé à l'école primaire ou en formation des PE, au moins dans ses variantes avec trois ou quatre entiers. Ce que je propose, comme d'habitude, c'est de faire l'expérience, en commençant par le cas le plus simple, celui de deux entiers consécutifs. On obtient successivement[20] $0 + 1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 4 = 7$, $4 + 5 = 9$, etc. Il n'est pas besoin d'observer beaucoup cette liste pour voir qu'on obtient tous les nombres impairs. On continue, avec les sommes de trois entiers consécutifs : $0+1+2 = 3$, $1+2+3 = 6$, $2+3+4 = 9$, $3+4+5 = 12$, etc. Là encore on voit aussitôt que l'on obtient tous les multiples de 3. La conjecture, dans ce cas particulier est donc bien claire. On se frappe la tête en disant *Eureka* et on insiste, avec quatre entiers, en se disant qu'on va obtenir les multiples de 4 : $0+1+2+3 = 6$, $1+2+3+4 = 10$, $2+3+4+5 = 14$, $3+4+5+6 = 18$, etc. Ah, c'est raté, ce ne sont pas les multiples de 4, mais ils vont cependant de 4 en 4. Si on regarde bien les nombres obtenus, on a, là encore une conjecture : on obtient les nombres pairs, mais pas multiples de 4.

Pour le cas général, y a deux problèmes :

- Pour un n fixé, quelles sont les sommes de n entiers consécutifs ?
- Quels sont les entiers qui sont sommes d'entiers consécutifs ?

Le lecteur traitera sans peine le premier des deux problèmes en distinguant les cas n pair et n impair.

Pour le second, il faut prolonger un peu l'expérience. Fixons nous une borne raisonnable pour essayer d'y voir clair, disons les nombres ≤ 30. Avec les sommes de cinq entiers consécutifs (dont on constate encore qu'elles vont de 5 en 5), on attrape $10, 15, 20, 25, 30$, les sommes de six nombres redonnent des nombres impairs, celles de sept donnent 28 qu'on retrouve avec 8, et c'est tout car la plus petite somme de 9 nombres consécutifs : $0+1+2+\cdots+8 = 36$ dépasse 30. Si on fait le bilan, on voit qu'on a trouvé tous les entiers ≤ 30, à l'exception de $2, 4, 8$ et 16. Moi, moi, m'sieur, j'ai une conjecture :

2.11 Conjecture. *Tous les entiers, à l'exception des puissances de* 2*, sont sommes d'au moins deux entiers consécutifs.*

[20] Le lecteur enlèvera le nombre 0 s'il le souhaite.

2.2.8 Les diviseurs

C'est un problème posé de manière très vague et il n'est déjà pas évident de dégager des questions. Avant de pouvoir se poser des questions sur le nombre de diviseurs, encore faut-il être capable de le calculer :

• Comment calculer le nombre $d(n)$ de diviseurs d'un entier n ?

Là, l'expérience indique assez vite la méthode, au moins si l'on pense à décomposer n en produit de facteurs premiers, ce qui est bien naturel pour un problème de diviseurs. Les nombres premiers n'ont que deux diviseurs, les nombres de la forme pq en ont 4, les nombres de la forme p^2 en ont 3, etc. Plus généralement, si on a $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, il s'agit de dire combien ce nombre a de diviseurs. Bien entendu, si on connaît le résultat, c'est évident, mais sinon, cela peut ne pas l'être. On peut commencer[21] par le cas des entiers n sans facteurs carrés : $n = p_1 p_2 \cdots p_r$. Une expérience intéressante est celle de $n = 30 = 2 \times 3 \times 5$. On énumère les diviseurs en les ordonnant[22] selon le nombre de facteurs premiers, il y en a $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ (on n'oublie pas les diviseurs 1 et 30). Pour $210 = 2\times 3\times 5\times 7$ on a, de même, $1+4+6+4+1 = 16$. Même si la méthode ne donne pas une explication de la conjecture, on voit bien apparaître un 2^r.

On regardera ensuite le cas opposé, celui d'une puissance de nombre premier, par exemple 2^α. Là, on voit très vite qu'il y a $\alpha + 1$ diviseurs. On peut encore[23] regarder le cas $p^\alpha q^\beta$. En mettant tout ensemble on finira par obtenir, avec un peu d'obstination :

2.12 Conjecture. *L'entier $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ a $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ diviseurs.*

• Cette première question n'est qu'un hors-d'œuvre, mais c'est un outil indispensable pour la suite. Les vraies questions suivantes vont porter, pour un entier n donné, sur le (ou les) nombre $T(n) \leq n$ qui admet le plus de diviseurs. Nous n'aborderons pas plus avant ce problème, que le lecteur pourra explorer lui-même (voir quelques indications en 4.5).

[21] Réduire ses ambitions est quelque chose qu'un chercheur fait très naturellement et que je résumerais volontiers en un proverbe : faute de grives on mange des merles. Je me souviens avoir été très agacé en lisant le livre – par ailleurs passionnant – de Lakatos : Preuves et réfutations, devant son refus de formuler des résultats, partiels peut-être, mais sûrs, par exemple le fait que la formule d'Euler est vraie pour un polyèdre convexe.

[22] Ordonner les choses pour ne pas en oublier est une idée importante, et pas seulement en mathématiques.

[23] Bien entendu, cela dépend de l'intuition de chacun, mais il n'y a pas de raison d'empêcher les élèves de faire une expérience supplémentaire s'ils en éprouvent le besoin.

2.2.9 Le reste de la série

La formule de la somme de la suite géométrique :

$$1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} = \frac{1 + (-1)^n t^{2n+2}}{1 + t^2}$$

donne, en intégrant de 0 à 1, la formule annoncée en 1.2.9 :

$$u_n - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

Il s'agit donc d'estimer l'intégrale $r_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$. Pour cela, on peut encadrer le dénominateur entre 1 et 2, ce qui nous conduit à l'encadrement :

$$\frac{1}{2(2n+3)} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{2n+2}\, dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \leq \int_0^1 t^{2n+2}\, dt = \frac{1}{2n+3}\cdot$$

C'est déjà très satisfaisant car on voit que u_n converge bien vers $\pi/4$ et que la convergence est bien de l'ordre de $1/n$. Mais, il reste une question : r_n est-il équivalent à $\dfrac{1}{2n+3}$, $\dfrac{1}{2(2n+3)}$, à quelque chose d'intermédiaire, voire à rien du tout[24] ? Mon expérience est qu'il est difficile de démontrer quelque chose quand on ne sait pas ce qu'il faut démontrer ! Pour se faire une idée, on a ici un outil excellent avec les calculatrices. On calcule explicitement soit la différence entre $\pi/4$ et la somme u_n (avec la fonction Σ de la TI-Voyage 200), soit une valeur approchée de l'intégrale (avec la fonction $\int$), avec un n tel que $2n+3$ soit voisin de 1000 ($n = 499$). On trouve, dans les deux cas[25] $0,0004999995$, ce qui est, à très peu près, égal à $\dfrac{1}{2(2n+3)}\cdot$ C'est donc la borne inférieure de l'intervalle qui semble être l'équivalent et il n'y a plus qu'à prouver la conjecture :

2.13 Conjecture. *La suite* $r_n = \left|1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} - \dfrac{\pi}{4}\right|$ *est équivalente à* $\dfrac{1}{2(2n+3)}$.

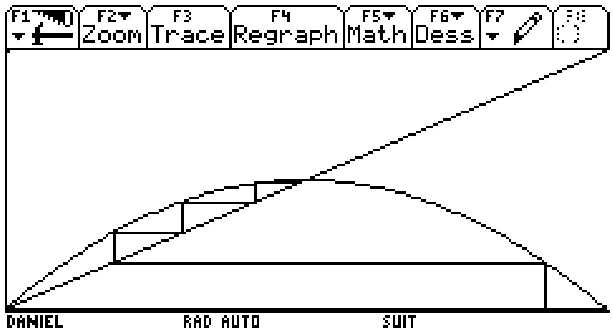
[24]En fait, si l'on est astucieux et qu'on multiplie l'intégrale par $2n+3$, une intégration par parties permet de trouver directement la limite $1/2$

[25]Respectivement en 14 secondes et 25 secondes.

2.2.10 Les suites logistiques

Les calculatrices actuelles sont une aide précieuse pour étudier de telles suites. On peut faire quelques expériences avec $\mu = 0,5$ et des valeurs initiales variées dans $[0,1]$, disons $u_0 = 0,1$, $u_0 = 0,2$, ..., $u_0 = 0,9$ par exemple. La suite semble être décroissante et converger vers 0 et cela semble être toujours le cas si l'on répète l'expérience avec des valeurs $\mu < 1$. Pour $\mu = 2$ en revanche (voir ci-dessous écran 1), la suite semble croître (au moins à partir du deuxième terme) et converger vers $0,5$ et cela semble vrai encore pour $\mu = 1,3$ ou $1,7$. Si l'on est à la fois paresseux et optimiste, on peut faire une conjecture "à la Daniel" :

2.14 Conjecture. *La suite (u_n) est monotone et converge*[26].



Écran 1

2.2.11 Les médiatrices hyperboliques

Un mot pour justifier ce choix de la géométrie hyperbolique. Mon objectif est de mettre le lecteur en situation d'élève, en lui proposant de se confronter à une situation sur laquelle, contrairement peut-être aux autres problèmes, il ne connaît pas tout d'avance. Dans cette situation l'expérimentation prend tout son sens, comme moyen de familiarisation avec le domaine. Un moyen merveilleux pour cela, que je ne peux que recommander au lecteur, consiste à utiliser les macros mises en place par Yves Martin, voir [Martin] ou :
http ://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Formateurs/Yves/these.html.

La géométrie hyperbolique est l'une des deux principales géométries non euclidiennes (l'autre est la géométrie elliptique). On renvoie à la thèse d'Yves Martin pour toutes précisions, y compris historiques, sur le sujet. Dans ces géométries, le postulat d'Euclide *(par tout point passe une parallèle et une*

[26]Quand on est instruit, on sait que la limite est un des points fixes de la fonction $f(x) = \mu x(1-x)$ c'est-à-dire 0 ou $(\mu-1)/\mu$.

seule à une droite donnée) n'est pas vérifié (en géométrie hyperbolique il en passe plusieurs en général). Cette géométrie peut se représenter dans des modèles situés dans le plan ou l'espace euclidien, mais jamais de façon totalement satisfaisante. Dans ce qui suit, nous travaillerons dans le modèle du disque de Poincaré (le plan est un disque ouvert et les droites sont des arcs de cercle orthogonaux au bord du disque). Il s'agit d'un modèle conforme (les angles[27] sont conservés), mais pas isométrique (les longueurs ne le sont pas).

Notre principe de départ est d'expérimenter sans crainte dans ce modèle, grâce aux outils implantés par Yves Martin (droites, perpendiculaires, milieu, médiatrice, distance, etc.). L'expérience, en faisant bouger les sommets du triangle, semble mener à la conjecture (voir fig. 6 pour les médianes et fig. 7 pour les médiatrices) :

2.15 Conjecture. *Les médianes, les médiatrices, les hauteurs, les bissectrices d'un triangle hyperbolique sont concourantes.*

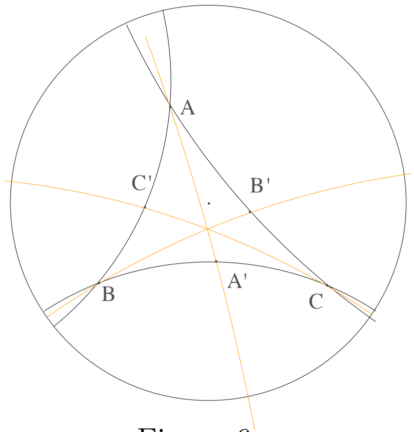


Figure 6

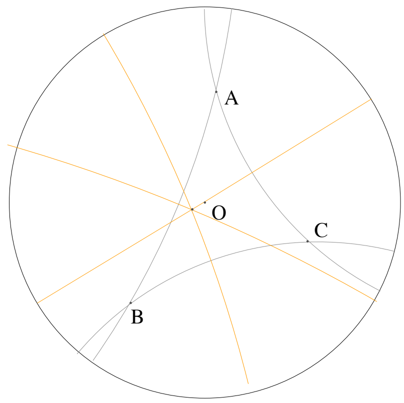


Figure 7

2.2.12 Les racines de l'unité

Cet exemple n'a pas vraiment d'intérêt en lui-même, d'autant que la méthode évoquée ne permet pas de traiter le problème général[28]. Il n'est là que pour montrer comment j'utilise la méthode expérimentale dans ma pratique de recherche.

Ici, les premiers exemples non triviaux concernent les cas $n = 6 = 2 \times 3$, $n = 15 = 3 \times 5$. La première chose que nous avons faite est de dénombrer

[27] L'angle de deux droites hyperboliques est l'angle des tangentes aux arcs.

[28] La recherche c'est une succession de tentatives avortées, avec, parfois, un essai réussi.

pour $n = 6$ et 15 les quasi-relations. Le calcul à la main est laborieux, mais on y arrive[29] et on trouve respectivement 45 et 447.

En fait, on connaît des relations de base $A_i, B_j, C_k, \ldots$ (qui correspondent aux sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$), et les relations que l'on cherche s'écrivent comme combinaisons linéaires de celles-ci avec des coefficients $a_i, b_j, c_k, \ldots$ vérifiant $a_i + b_j + c_k + \cdots = 0, 1$ ou -1. L'idée, pour aborder ce problème est de l'interpréter comme un problème de géométrie algébrique : déterminer le degré de la variété algébrique définie par les (?) équations $(a_i + b_j + c_k + \cdots)(a_i + b_j + c_k + \cdots - 1)(a_i + b_j + c_k + \cdots + 1) = 0$.

Le logiciel Macaulay permet de faire ce type de calcul et les premières expériences redonnent bien les nombres 45 et 447. Pour calculer le cas général, dans le cas de deux facteurs pq, il suffit de considérer la variété définie par les équations $(a_i + b_j)^3 = 0$, avec $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, q$ et de calculer son degré. Il y a des techniques pour faire cela (les bases de Gröbner). Il faut calculer ce qu'on appelle l'idéal initial de la variété (pour un certain ordre des variables), ce qui revient à produire une liste de monômes. L'expérience, avec Macaulay, dans le cas $pq = 15$, donne les monômes suivants (on appelle a, b, c, d, e les variables a_i et x, y, z les variables b_j et on les range dans cet ordre) :

$$y^5, x^3y^3, x^4y, x^5, ey^3, ex^2y, ex^3, e^2y, e^2x, e^3, dy^3, dx^2y, dx^3, d^2y, d^2x, d^3$$

$$cy^3, cx^2y, cx^3, c^2y, c^2x, c^3, by^3, bx^2y, bx^3, b^2y, b^2x, b^3, ay^3, ax^2y, ax^3, a^2y, a^2x, a^3.$$

C'est là qu'intervient le processus de généralisation. Si on observe cette liste on note d'abord l'absence de la variable z (la dernière des b_j). On voit ensuite apparaître les éléments suivants :

$$b_j^5, b_j^4 b_k, b_j^3 b_k^3, a_i b_j^3, a_i b_j^2 b_k, a_i^2 b_j, a_i^3$$

où les indices des variables a (resp. b) varient de 1 à p (resp. 1 à $q - 1$) et où l'on a $j < k$ lorsque ces indices apparaissent.

2.16 Conjecture. *L'idéal initial est engendré par tous ces monômes.*

2.3 Des preuves ?

Nous venons d'obtenir, pour chaque problème, une ou plusieurs conjectures qu'il s'agit maintenant de prouver. C'est une phase moins exaltante, qui peut être souvent longue et pénible, mais qui est nécessaire cependant.

[29]Pour $105 = 3 \times 5 \times 7$ en revanche, le calcul est à peu près impossible à faire à la main car le résultat est supérieur à 10^{17}.

En effet, l'expérience montre que les conjectures, même celles qui semblent bien solides, peuvent être fausses, et la preuve reste le meilleur moyen de se convaincre (et accessoirement de convaincre les autres) de la véracité d'une affirmation. Voici un exemple spectaculaire que j'emprunte à [Delahaye]. Il s'agit de savoir si le *pgcd* de $n^{17}+9$ et de $(n+1)^{17}+9$ est toujours égal à 1 comme l'expérience semble le montrer pour $n = 0, 1, 2, 3$. Un petit programme le confirme pour $n \leq 100$, voire $n \leq 1000$ et on peut le vérifier pour $n \leq 10^{51}$. Pourtant, ce n'est pas vrai : il y a un contre exemple pour

$$n = 8\,424\,432\,925\,592\,889\,329\,288\,197\,322\,308\,900\,672\,459\,420\,460\,792\,433.$$

La liste de conjectures qui précède n'est pas du tout homogène, à aucun point de vue. Certaines sont évidemment vraies, d'autres évidemment fausses, d'autres sont beaucoup plus subtiles et pour certaines, la réponse peut n'être nullement évidente. Ce qui m'intéresse dans la phase des premières tentatives de preuve, c'est de voir en quoi l'expérience initiale peut être (ou non) une aide à la démonstration.

Je traite maintenant les exemples ci-dessus ; attention, il ne faut pas croire tout ce qu'on vous dit ...

2.3.1 Aire maximum

Si on observe, toujours avec Cabri, la situation d'un triangle ABC inscrit et si on fixe le côté $[BC]$, on s'aperçoit vite[30] que la hauteur AH est maximale quand A est sur la médiatrice de $[BC]$, autrement dit quand le triangle est isocèle en A (fig. 8). Cela permet de montrer la conjecture. En effet, si un triangle n'est pas équilatéral, il est non isocèle par rapport à l'un de ses sommets, donc il n'est pas maximal. Il en résulte que c'est l'équilatéral qui réalise le maximum. Vous n'êtes pas d'accord ?

[30] Ce n'est pas aussi facile à démontrer, mais, est-ce si essentiel pour de jeunes élèves ?

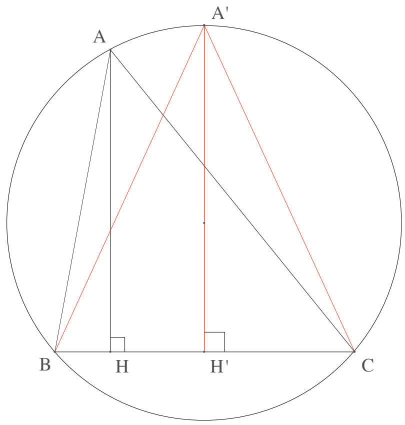


Figure 8

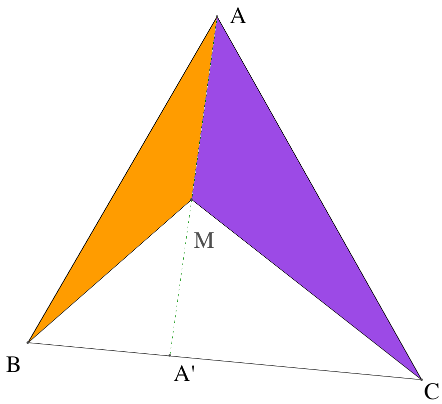


Figure 9

2.3.2 Aires égales

Là encore, la preuve de la conjecture est facile : on regarde le point d'intersection A' de (AM) et de (BC). On montre facilement (c'est le lemme du chevron, voir fig. 9, qui résulte par exemple de la formule $base \times hauteur/2$, cf. [ME]) que l'on a $\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC} = \dfrac{A'B}{A'C}$, de sorte que les aires sont égales si et seulement si le point A' est milieu de $[BC]$, donc si (AM) est la médiane issue de A.

2.3.3 La longueur du segment mobile

Dans le cas proposé en 1.2.3, la preuve (pour un expert) est bien claire. Le quadrilatère $AMPN$ est un rectangle, donc ses diagonales sont égales et il revient au même de minimiser MN ou AP, mais pour AP, avec A fixe et P se déplaçant sur (BC), le minimum est atteint quand P est le projeté, c'est bien connu.

Soit, mais comme je l'ai dit plus haut, l'une des fonctions d'un mathématicien est de poser des problèmes. En regardant cette situation, je n'ai pas pu m'empêcher de me poser la question : et si le triangle ABC n'est pas rectangle ? J'ai donc couru à mon ordinateur et Cabri m'a très rapidement montré que le minimum était encore atteint au projeté H de A. J'ai été un peu surpris et j'ai essayé de comprendre pourquoi. Cette fois l'argument du rectangle tombe à l'eau. Bien sûr, le point H réalise toujours le minimum de AP, mais AP ce n'est plus MN comme je l'ai vérifié aussitôt. Tout de même, en les faisant afficher tous les deux (avec ABC fixe, mais P variable) j'ai constaté qu'ils semblaient varier de conserve. Petite expérience pour en être sûr, j'ai fait afficher le rapport MN/AP et j'ai constaté qu'il était constant.

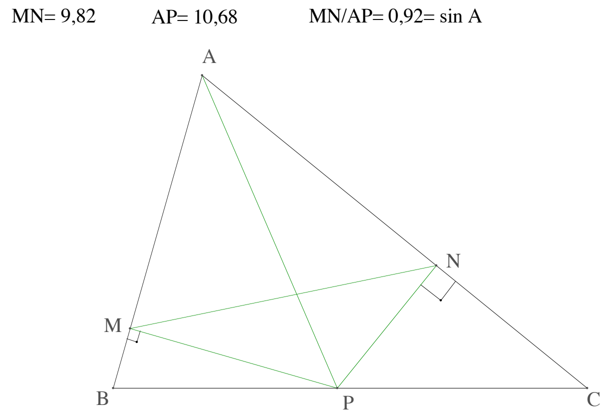


Figure 10

Déjà, cela explique le résultat constaté, puisque les longueurs AP et MN sont alors minimales en même temps, de sorte que c'est bien H qui réalise le minimum. Il reste à comprendre pourquoi ce rapport est constant. Là, s'agissant de rapport, une foule d'idées arrivent (similitude, lignes trigonométriques, etc.). En bougeant le point A, on peut faire quelques observations nouvelles. Bien entendu, on retrouve que le rapport vaut 1 quand le triangle est rectangle, car c'est la situation initiale, mais on note aussi qu'il est toujours < 1 sinon et qu'il est d'autant plus petit que l'angle en A est petit (ou au contraire très obtus). Cela fait penser au sinus de l'angle en A et il suffit de faire afficher ce sinus pour en avoir confirmation.

On a donc obtenu une nouvelle conjecture :

2.17 Conjecture. *Dans la situation de 1.2.3 (mais avec ABC quelconque), on a* $MN/AP = \sin \widehat{A}$.

Au vu des indications de Cabri, je croyais dur comme fer à cette conjecture, mais il restait à la prouver. C'est joli, mais pas tout à fait évident, et je la laisse au lecteur, qui trouvera une indication en annexe.

2.3.4 Les différences de carrés

Il s'agit de savoir quels sont les nombres qui sont différences de deux carrés. L'expérience a fourni la conjecture 2.8 et elle permet aussi de la démontrer, au moins dès qu'on dispose de l'écriture et du calcul algébrique. En effet, si on compulse la liste, on voit qu'on atteint, par exemple, le nombre impair 11 (c'est-à-dire $2p+1$ avec $p = 5$) comme différence de $36 = 6^2$ moins $25 = 5^2$. Il n'est pas besoin d'être grand clerc pour voir ce qu'il faut vérifier :

$2p+1 = (p+1)^2 - p^2$, c'est bien vrai ! On peut même dire ça (à l'école primaire ou au début du collège) sans disposer de l'écriture algébrique : il suffit de noter qu'un nombre impair s'écrit comme somme de deux entiers consécutifs (ses deux "moitiés") et qu'il est alors aussi différence de leurs carrés. On trouve cela grâce à l'expérience, que l'on peut poursuivre autant qu'on veut pour s'assurer de la validité du résultat. Pour en donner une preuve convaincante, il y a une jolie méthode géométrique qui consiste à dessiner deux carrés de côtés p et $p+1$ l'un dans l'autre, cf. fig. 11. De même, on obtient $20 = 4 \times 5$ comme différence de $36 = 6^2$ moins $16 = 4^2$ et on voit aussitôt que c'est bien une formule générale : $4p = (p+1)^2 - (p-1)^2$ (et là aussi, il y a une preuve géométrique, cf. fig. 12).

Je voudrais insister fortement sur cet exemple. Toute mon expérience de chercheur m'apprend que cette méthode, qui consiste à induire d'un cas particulier une formule générale (ou un théorème général) est un outil fondamental de découverte. Il y a en arithmétique, en algèbre, des dizaines de formules[31] que l'on peut trouver ainsi. C'est notamment ainsi que j'ai cru trouver une formule générale dans le problème 1.2.12 ! Pourtant, je ne suis pas sûr que cette procédure ait vraiment droit de cité dans nos classes. C'est peut-être le cas au niveau de l'enseignement primaire, ça l'est beaucoup moins au niveau du collège et du lycée, et au niveau de l'enseignement supérieur, sauf dans de rares exceptions, cette procédure n'est que rarement employée[32].

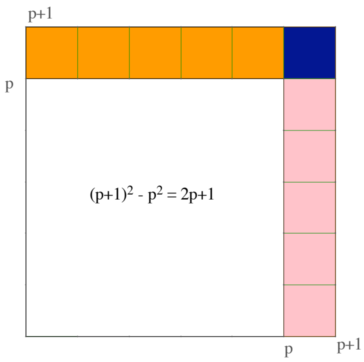


Figure 11

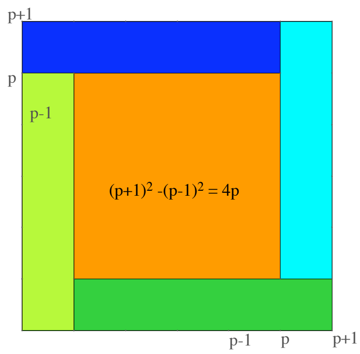


Figure 12

Il reste à vérifier que les nombres pairs non multiples de 4 ne sont pas de la forme $x^2 - y^2$. C'est facile en distinguant selon les parités de x et y. Bien

[31]Un exemple simple est celui de la somme des n premiers cubes, au moins si l'on connaît la somme des n premiers entiers.

[32]Je parle par expérience, notamment celle de la licence pluridisciplinaire. Lorsqu'on suggère à des étudiants de regarder des cas particuliers pour se faire une idée, ils oscillent entre deux attitudes : l'incompréhension *mais, qu'est-ce qu'il me veut !* et la réprobation *mais, on n'a pas le droit !*

entendu, selon la culture des gens, le mot “congruence” peut être utilisé.

Pour en finir avec les différences de carrés, l'expérience montre encore autre chose : certains nombres sont atteints plusieurs fois, par exemple $15 = 64-49 = 16-1$. Cela pose une nouvelle question : lorsqu'un nombre s'écrit sous la forme $x^2 - y^2$, de combien de façons est-ce posssible ? Là, il faut sans doute utiliser de nouveaux outils, un peu plus sophistiqués (notamment la décomposition en produit de facteurs premiers[33]) et on n'est pas loin du problème des diviseurs. Si j'ai bien compris la philosophie du document d'accompagnement des programmes, on sort des “problèmes pour chercher” et on aborde les “problèmes pour apprendre”.

2.3.5 Les fractions égyptiennes

La conjecture proposée semble particulièrement solide et l'algorithme indiqué aussi. Pour avancer sur ce problème, il est bien agréable de disposer d'une bonne calculatrice, programmable et capable de travailler en mode formel (donc avec des fractions et pas des nombres décimaux). En effet, on tombe très vite sur des fractions de grands dénominateurs qu'il devient pénible de calculer à la main. Par exemple on trouve :

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}.$$

Il est facile d'écrire un petit programme qui fait le travail à notre place. Voilà un exemple sur TI-Voyage 200 :

```
egypte()
Prgm
Local r,p,n
Prompt r
1/r → p
While p-entPréc(p)>0
entPréc(p)+1  → n
Disp 1/n
r-1/n  → r
Disp r
1/r  → p
EndWhile
EndPrgm
```

[33]Car une première constatation est que les nombres premiers semblent n'apparaître qu'une fois.

L'affichage des fractions intermédiaires (Disp r) n'est pas indispensable, mais il fournit la démonstration de la propriété. En effet, ce qu'il faut voir c'est pourquoi l'algorithme "termine" comme disent les anglo-saxons. Or, c'est bien clair sur les fractions intermédiaires, par exemple pour $4/17$ on trouve successivement $3/85 = 4/17 - 1/5$ puis $2/2465 = 3/85 - 1/29$. On peut multiplier les expériences (avec un programme ce n'est pas fatigant !) et on constate que les numérateurs des fractions décroissent, de sorte qu'ils finissent nécessairement par aboutir à 1 comme souhaité. Cet argument expérimental est parfaitement convaincant pour tout le monde (y compris pour moi). Si l'on veut une "vraie" démonstration il reste à le mettre en forme. Pour un mathématicien c'est facile car tous les ingrédients sont apparus et il reste à traduire les propriétés (par exemple, que signifie retrancher le plus grand $1/n$ possible, mais si l'on a écrit le programme on a déjà explicité cette propriété) et à faire une récurrence. Je fais cette preuve pour convaincre le lecteur qu'elle n'est pas difficile.

On a un rationnel $r = \dfrac{p}{q}$, *écrit sous forme de fraction irrréductible. On cherche la plus grande fraction égyptienne* $1/n$ *telle que* $\dfrac{1}{n} \leq r$. *Cela revient à chercher le plus petit* $n \geq 1/r$ *(c'est donc la partie entière de* $1/r$ *plus un, sauf si* r *est déjà égyptienne). Un tel* n *vérifie* $n \geq 1/r > n - 1$, *soit,* $pn \geq q > pn - p$. *Si on calcule alors* $\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{n}$, *on trouve* $\dfrac{np - q}{qn}$ *et on voit que le numérateur est bien* $< p$ *comme annoncé.*

L'expérience m'a montré pourtant que pour beaucoup des étudiants (scientifiques, mais pas très matheux) que j'avais en licence pluridisciplinaire, écrire cette preuve, avec la manipulation des fractions et des inégalités, a été franchement difficile[34]. C'est une difficulté qu'il ne faut pas sous-estimer. La question de l'apprentissage de ce type de techniques et son lien avec les problèmes n'est pas évidente. Quand j'essaie d'analyser comment je fais un calcul comme le précédent, la chose qui me semble essentielle, c'est que j'ai confiance en les mathématiques : ayant vu l'algorithme fonctionner, je suis sûr que la preuve va marcher. D'une certaine manière, je peux alors cesser de réfléchir et laisser le calcul se faire tout seul, en traduisant simplement l'algorithme. Cette confiance est souvent ce qui manque à nos étudiants.

2.3.6 Les entiers consécutifs

Il y a plusieurs preuves (ou arguments) à donner, selon qu'on se fixe le nombre d'entiers ou non. Notons que l'on peut prouver, en tous cas, l'une

[34]Il faut dire que j'avais donné ce texte en "devoir-maison", rédigé de manière un peu formelle (voir [ME] p. 91) et c'est sans doute une explication de leurs difficultés.

de nos observations : les sommes de k entiers consécutifs vont de k en k. En effet, si l'on observe par exemple la somme des 6 entiers $3+4+5+6+7+8$ et la suivante : $4+5+6+7+8+9$, on voit qu'on remplace simplement le 3 par 9 qui est $3+6$. C'est bien entendu un phénomène général, facile à prouver si l'on utilise des lettres : si notre somme est $a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+k-1)$, la suivante, qui est $(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+k-1)+(a+k)$, s'obtient en remplaçant a par $a+k$, ce qui augmente bien la somme de k. Cela permet de répondre, au moins dans chaque cas particulier, à la question des sommes de k consécutifs.

Pour le problème général, il faut regarder encore de plus près les sommes et se souvenir un peu du jeune Gauss. Quand on regarde la somme ci-dessus : $3+4+5+6+7+8$ on peut évidemment additionner tout bêtement, mais on peut aussi regrouper les termes deux à deux : $5+6=11$, $4+7$ qui fait la même chose, puisqu'on ajoute à 6 ce qu'on enlève à 5, et $3+8$: on obtient 3×11. On peut multiplier l'expérience, au moins si k est pair, $k=2l$. En regroupant les termes deux à deux, à partir du milieu, on voit que la somme est somme de l termes, tous égaux à la somme de deux entiers consécutifs, donc à un nombre impair. Ah, cela dit déjà quelque chose : les sommes (dans le cas où k est pair) ont un facteur impair : ce ne sont donc pas des puissances de 2.

Et si k est impair ? Regardons par exemple $4+5+6+7+8$. Bien entendu, les choses ne sont plus les mêmes, mais quand on a une idée qui marche aussi bien que la précédente, on n'a de cesse que de la faire marcher dans tous les cas. Ici, il y a un nombre au milieu : 6, mais on peut ensuite regrouper de part et d'autre : $5+7=2\times 6$, $4+8=2\times 6$, en tout, on a un certain nombre de fois le nombre médian, mais ce nombre de fois est impair (car le médian est tout seul). On retrouve donc encore le fait qu'une somme d'entiers consécutifs a un diviseur impair, donc que ce ne peut être une puissance de 2.

Bien entendu, il reste à montrer que cette condition nécessaire est suffisante. Pour cela, on prend un exemple ! Considérons le nombre 124 (ce n'est pas une puissance de 2, c'est 4×31). Il s'agit de le trouver comme somme de nombres consécutifs. L'exemple ci-dessus indique comment faire : si on prend 8 nombres consécutifs, regroupés deux par deux, on a vu que la somme c'est quatre fois la somme des deux centraux. Or, on veut avoir 31 au centre. Facile, c'est $15+16$ et on en déduit :

$$124 = 12+13+14+15+16+17+18+19.$$

On a gagné ? Pas tout à fait encore, regardons l'exemple suivant : $56=7\times 8$. Si on essaie d'appliquer la méthode précédente, on doit écrire 7 comme somme de deux nombres consécutifs : $7=3+4$, puis écrire 8 fois cette somme en diminuant d'un côté et en augmentant de l'autre. Aïe, on tombe rapidement dans le vide si on diminue 3. Alors ? Alors on réfléchit et on regarde les exemples précédents. En fait, ce problème qu'on a avec 56, on l'a déjà avec 28. Pourtant, on a vu que 28 est dans la liste, comme somme de 7 nombres : $28 = 1+2+3+4+5+6+7$ et cet exemple donne la méthode : pour 56 il faut prendre la somme de 7 nombres consécutifs, celui du milieu étant égal à 8.

Ces deux exemples permettent de produire une démonstration formelle si on sait bien les lire. En effet, comme n a un facteur impair on écrit $n = (2p+1)k$ (avec $p \geq 1$) et on distingue selon que p est $\leq k$ ou $\geq k$. Dans le premier cas on applique la méthode 124, dans le second la méthode 56.

2.3.7 Le reste de la série

Maintenant qu'on a une conjecture qui affirme que $r_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$ doit être équivalent à $\dfrac{1}{2(2n+3)}$, on calcule la différence $r_n - \dfrac{1}{2(2n+3)}$ en interprétant la fraction comme la moitié de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{2n+2}\,dt$ (c'est ainsi qu'elle est apparue). On trouve :

$$r_n - \frac{1}{2(2n+3)} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{2n+2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt$$

et il reste à voir que cette intégrale est un $o(1/n)$. Il y a plusieurs méthodes pour faire cela : soit couper en deux l'intégrale en un point $a \in]0,1[$, soit intégrer par parties en posant $u = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dv = t^{2n+2}dt$, soit, plus simple encore, minorer le dénominateur par 1. On trouve :

$$0 \leq r_n - \frac{1}{2(2n+3)} \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (t^{2n+2} - t^{2n+4})\,dt = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}.$$

Peu importe la technique (classique) d'analyse, mais mon expérience, sur ce problème, c'est qu'avant d'avoir fait l'expérience pour déterminer que l'équivalent était $\dfrac{1}{2(2n+3)}$ et pas $\dfrac{1}{2n+3}$, j'étais comme l'âne de Buridan à me demander lequel j'allais essayer de prouver et à ne pouvoir me résoudre à me lancer des calculs qui risquaient d'être inutiles si mon choix était mauvais. Bref, il s'agit d'un élément psychologique, mais qui a joué un rôle important[35]. Cela mérite bien une nouvelle maxime :

[35] En fait, on montre plus généralement que, pour une série alternée $\sum_n (-1)^n v_n$ dont le terme général est "convexe" (i.e. vérifie $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n \geq 0$) et tel que v_{n+1}/v_n tend

2.18 Maxime. *Souvent, quand on a trouvé ce qu'il fallait démontrer, le plus dur est fait.*

2.3.8 La suite logistique

La machine nous a dévoilé le comportement de la suite, au moins pour $\mu \leq 2$, donc le plus dur est fait, si l'on en croit la maxime 2.18. Si on pose $\tau = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$, la formule $u_{n+1} - u_n = \mu u_n(\tau - u_n)$ permet effectivement de montrer que, si μ est ≤ 1, la suite décroît et tend vers 0 et que, si μ est compris entre 1 et 2, elle est croissante (au moins à partir du deuxième terme) et converge vers τ.

En revanche, pour $\mu > 2$, les choses sont moins simples et l'on ne parvient plus à prouver ni la monotonie, ni le fait que u_n reste inférieur à sa limite supposée τ.

2.3.9 Les médiatrices hyperboliques

C'est encore un exemple où l'on peut induire la preuve à la fois de l'expérience et de l'analogie euclidienne. Montrons par exemple que les médiatrices sont concourantes. Bien entendu, il faut connaître quelques propriétés des médiatrices hyperboliques, mais ce sont presque les mêmes qu'en euclidien.

En particulier un point M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si on a $MA = MB$ comme on le vérifie aisément avec la macro Cabri "distance hyperbolique" d'Yves Martin.

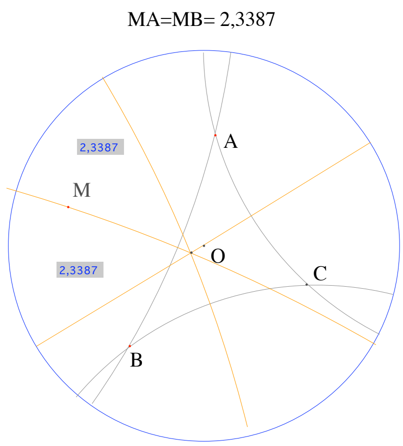


Figure 13

Dans ce cas, la preuve coule de source : on prend le point O, intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. On a donc $OA = OB$ et $OA = AC$, donc $OB = OC$, de sorte que O est aussi sur la médiatrice de $[BC]$.

vers 1 à l'infini, le reste est toujours équivalent à $v_n/2$. Je pense que j'ai connu ce résultat dans une vie antérieure, mais je l'avais totalement oublié.

2.4 Critique des preuves et retour à l'expérience

C'est ici que mon métier de chercheur m'apporte une autre vision de la démarche mathématique. En effet, j'y ai appris à être méfiant en ce qui concerne les preuves, les miennes et celles des autres, et à les mettre systématiquement en doute. Reprenons donc une nouvelle fois certaines de nos situations. Il n'y a pas de problèmes pour les entiers de la forme $x^2 - y^2$, ni pour les fractions égyptiennes, ni pour l'aire maximum (la démonstration est un peu fausse, certes, mais le résultat est correct[36]). En revanche, dans plusieurs autres cas, notre conjecture était incorrecte et donc la "démonstration" proposée aussi.

2.4.1 Aires égales

Revenons sur la situation des triangles d'aires égales et bougeons un peu plus sérieusement le point M dans le plan, en lui permettant, en particulier, de s'extirper de l'angle en A. On s'aperçoit bien vite qu'il semble y avoir d'autres positions dans laquelle les aires sont égales. Et pourtant, nous avions écrit une preuve, non ? Alors, cette preuve n'en était pas vraiment une ? Non, et ici, on voit aisément où est l'erreur : avant de parler du point A', intersection de (AM) et de (BC), encore faut-il s'assurer que ces droites se coupent.

En effet, si M est sur la parallèle à (BC) passant par A, on vérifie qu'on a aussi $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AMC)$ (c'est ce que j'appelle le lemme du trapèze, évident encore avec la formule *base* $\times$ *hauteur* !).

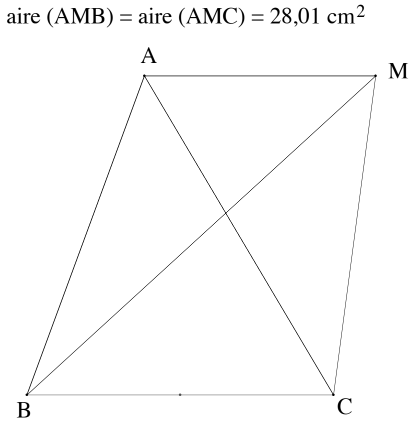


Figure 14

Ici, à bien regarder la figure et ses variantes, on a donc fini par montrer un théorème :

[36] C'est encore une question intéressante. Les collègues pointilleux auront noté que la preuve présuppose l'existence d'un triangle d'aire maximum, ce qui n'est pas évident *a priori*. Alors, elle est fausse ? Ce n'est pas ce que je dirais, car un argument de compacité montre aussitôt l'existence de ce maximum. Certes, le mot fera peur à bon nombre d'étudiants, mais la chose, elle, est bien naturelle.

2.19 Théorème. *Les aires de AMB et AMC sont égales si M et sur la médiane issue de A ou sur la parallèle à (BC) passant par A.*

Ce type d'exemple est fondamental en formation des maîtres (je pense ici plutôt aux futurs professeurs de mathématiques) car il montre deux choses essentielles, dont nous allons faire deux nouvelles maximes. En premier lieu, dans l'exemple ci-dessus, l'expérience initiale avait été menée avec trop de désinvolture pour être satisfaisante :

2.20 Maxime. *En mathématiques, comme dans les autres les sciences, si l'on utilise l'expérience, elle doit être menée sérieusement.*

Cet exemple montre aussi quelle est la raison d'être de la rigueur, qu'on impose souvent sans discussion aux élèves :

2.21 Maxime. *Si une preuve n'est pas rigoureuse, on court le risque qu'elle soit fausse et, pire, que le résultat annoncé soit faux.*

2.4.2 Errare humanum est

Sur ce sujet de l'erreur et de la rigueur, mon expérience de chercheur, c'est qu'une preuve, réputée soigneuse, soi-disant rigoureuse, considérée comme telle par les experts, peut parfois ne pas l'être autant qu'on le croit. Une des raisons qui fait qu'une erreur peut intervenir tient à la volonté, souvent très forte, du chercheur de parvenir au résultat qu'il convoite. Il **veut** à tout prix prouver son théorème ! Cela peut le conduire à une attitude simplificatrice par rapport à la réalité. Il faut bien comprendre que cette volonté de simplifier est un puissant moteur de découverte, mais qu'elle crée un obstacle lorsque la situation se révèle vraiment plus complexe qu'on ne l'avait imaginé. J'ai une petite histoire, que j'espère instructive, à raconter à ce sujet.

Il y a quelques années, nous travaillions, Mireille Martin-Deschamps et moi-même, sur le schéma de Hilbert des courbes gauches de degré d et genre g (un objet, noté $H_{d,g}$, peu importe ce que signifie ce symbole) et nous avions cru prouver que $H_{d,g}$ n'était **"presque" jamais connexe**. La démonstration était écrite, soumise à une excellente revue, contrôlée par un rapporteur, acceptée, mais heureusement pas encore parue (voir [MDP1] et [MDP2]) ! Pourtant, en étudiant plus à fond un exemple précis, le premier exemple non trivial : $H_{4,0}$, nous avons montré qu'il était connexe, contrairement à ce que nous affirmions. Il nous a fallu quelques jours pour admettre notre erreur et quelque temps encore pour comprendre où était la faute dans la démonstration.

L'intérêt de cette erreur c'est qu'elle était révélatrice d'une conception erronée sur l'objet en question, fondée sur une connaissance trop fragmentaire des exemples. La preuve en est que, passant d'un extrême à l'autre, nous pensons maintenant que le schéma de Hilbert est **toujours** connexe.

Le lecteur mauvais coucheur pourra m'objecter que, si notre démonstration était fausse, c'est que nous n'avions pas été suffisamment rigoureux et il sera d'autant plus enclin à le faire, que, du haut de ses connaissances mathématiques, il aura décelé les entorses à la rigueur commises dans les pseudo-démonstrations ci-dessus. Certes, en théorie c'est vrai. Mais je lui rappellerai, avant qu'il ne me jette la première pierre, que d'autres ont été aussi confrontés à cette difficulté : lorsqu'on propose une preuve, en étant à son niveau de compétence (et pas cent coudées au-dessus, ce qui est souvent le cas en situation d'enseignement), il est bien difficile d'assurer que cette preuve est vraiment correcte. Ainsi, récemment, les premières versions des démonstrations du théorème de Fermat par Andrew Wiles ou de la conjecture de Ramanujan par Laurent Lafforgue étaient toutes deux entachées d'erreurs, que leurs auteurs ont mis plusieurs mois à corriger.

Fort de ma propre expérience et instruit par celles de mes illustres collègues, je suis beaucoup plus circonspect maintenant, et d'avant d'être certain d'un résultat, je préfère le confronter à l'expérience. Cela donne encore une maxime, frappée au coin du bon sens :

2.22 Maxime. *Deux expériences valent mieux qu'une démonstration fausse.*

2.4.3 Médiatrices hyperboliques

L'exemple précédent doit nous mettre la puce à l'oreille : dans notre preuve du concours des médiatrices hyperboliques, nous avons défini le point O comme l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. Et si, comme dans l'exemple ci-dessus, elles ne se coupaient pas[37] ?

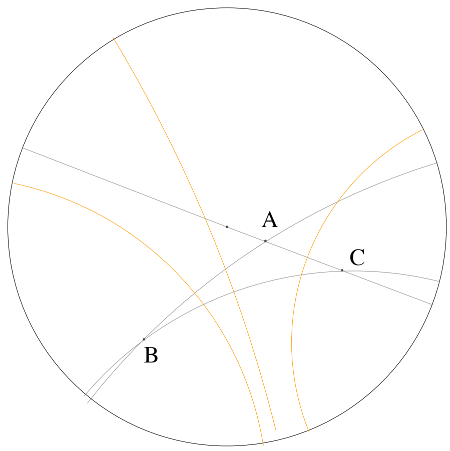


Figure 15

De fait, l'expérience montre que si le triangle est suffisamment aplati, elles ne se coupent pas : notre conjecture, là encore, est fausse !

[37] Pour le mauvais coucheur de tout à l'heure : aviez-vous vraiment vérifié, en euclidien, que les médiatrices se coupaient ? Et la rigueur, alors ?

Déceler une erreur dans une démonstration est un des moments les plus difficiles dans la vie d'un chercheur et je n'ai toujours pas acquis le détachement qui serait nécessaire pour vivre ce genre de moment avec sérénité. Avec l'expérience j'ai cependant appris quelques petites choses. D'abord, je me récite ce que dit à ce sujet A. Grothendieck :

Mais il arrive aussi que cette image [de la situation] *est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. ... Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse est souvent marqué par une tension croissante au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction, d'abord vague, puis de plus en plus criante jusqu'au moment où elle éclate avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense.*

Et il ajoute plus loin, ce qui vaut bien une maxime :

2.23 Maxime. *La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.*

Il a raison, et l'exemple du schéma de Hilbert a bien montré comment la découverte de l'erreur est décisive pour remettre en cause une conception erronée, mais c'est dur à supporter tout de même ! Cependant, une des petites choses que j'ai apprises en trente années de recherche c'est :

2.24 Maxime. *Il ne faut pas jeter le bébé avec l'eau du bain.*

Cette maxime, que nul ne contestera, peut revêtir deux significations. La première, c'est que, lorsqu'on s'aperçoit qu'une démonstration est fausse, avant de se faire hara-kiri, on peut d'abord essayer de la réparer[38], en vertu de la maxime :

2.25 Maxime. *Démonstration fausse ne signifie pas toujours idée fausse.*

D'une certaine façon, c'est ce que nous avons fait dans le problème des aires égales où la découverte de l'erreur contenait en germe le moyen de la surmonter.

La situation est parfois plus grave. En particulier, dans l'exemple des médiatrices hyperboliques, comme le dit Grothendieck, c'est à une complète remise en question de notre vision des choses que nous sommes conduits. Cependant, la maxime 2.24 s'applique tout de même, mais il faut d'abord

[38] Je me souviens encore de la première fois où, jeune chercheur, je me suis aperçu qu'une de mes preuves était fausse. J'en ai été déprimé pour plusieurs semaines, jusqu'à ce que, en désespoir de cause, j'aille la soumettre à mon patron de thèse qui l'a réparée en quelques minutes !

réparer la conjecture avant de penser à produire une nouvelle démonstration.

Ce n'est pas totalement évident. Bien sûr, on pourrait dire que les médiatrices sont concourantes ou parallèles, au sens bête où elles ne se coupent pas, mais cette notion est beaucoup trop faible en hyperbolique (il y a une flopée de droites passant par le milieu de $[BC]$ et parallèles aux deux autres médiatrices en ce sens). La question est donc de trouver ce qui va remplacer le parallélisme. C'est encore l'analogie euclidienne qui donne la solution. En euclidien, lorsque deux droites du plan sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. En hyperbolique, l'expérience montre aussitôt que c'est faux : si on a deux droites D, D', parallèles au sens bête, une droite perpendiculaire à l'une n'est pas, en général, perpendiculaire à l'autre (cf. fig. 16 : la droite L est perpendiculaire à D mais pas à D', et moins encore à D''). Je dis "en général" car il existe tout de même une perpendiculaire commune, mais elle est unique. Bien entendu, si l'on prend trois droites D, D', D'' parallèles au sens bête, elles ont, deux à deux, des perpendiculaires communes distinctes en général, comme le montre, une fois de plus, l'expérience (cf. fig. 16, F est perpendiculaire commune à D, D' et E à D', D'').

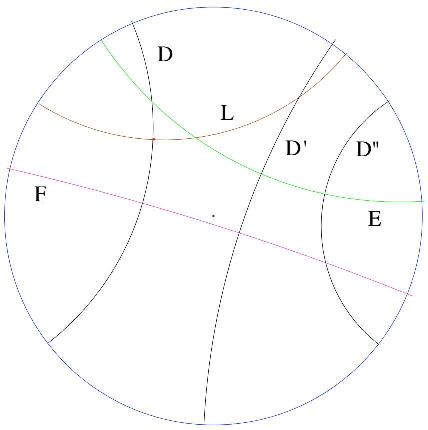


Figure 16

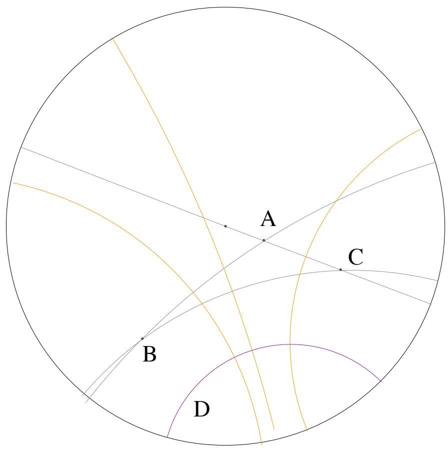


Figure 17

En revanche, si l'on regarde les trois médiatrices, dans le cas où elles ne sont pas concourantes, on constate qu'il y a une perpendiculaire commune aux trois (cf. fig. 17 : la droite D). On a donc une nouvelle conjecture :

2.26 Conjecture. *Les médiatrices d'un triangle hyperbolique sont concourantes, dans le plan hyperbolique ou sur le bord, ou admettent une perpendiculaire commune.*

L'énoncé semble vrai, et il l'est, mais il reste à le prouver. Il y a de nombreuses méthodes, certaines plus éclairantes que d'autres, cf. [Perrin2], mais, dans tous les cas, il faut quand même posséder un peu de technique[39].

Parmi les preuves possibles, il en est une que j'aime particulièrement car c'est une nouvelle illustration de la maxime sur le bébé et l'eau du bain. Elle consiste à reprendre la démonstration fausse vue ci-dessus et à essayer de la réparer. Lorsque les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en O, on a vu que O est équidistant de A, B, C et c'est cela qui prouve que O est sur la médiatrice de $[BC]$. Lorsque les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ ne se coupent pas, la propriété de remplacement c'est qu'elles admettent une perpendiculaire commune Ω. L'analogue, somme toute naturel, de l'assertion précédente, c'est que les points A, B, C sont alors équidistants de Ω. Cela vient du lemme suivant, qui remplace la caractérisation usuelle des points de la médiatrice, que l'on peut vérifier sans peine avec Cabri et que l'on démontre à l'aide de la symétrie par rapport à cette médiatrice :

2.27 Lemme. *Soient Ω une droite du plan hyperbolique et A, B deux points. Alors, Ω est perpendiculaire à la médiatrice de A, B si et seulement si A et B sont équidistants de Ω et situés du même côté de Ω.*

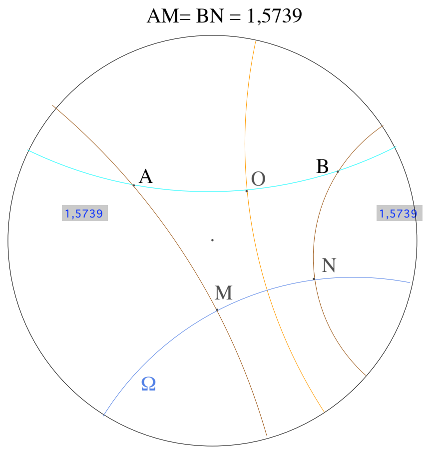


Figure 18

[39]Attention, tout ce que je suis en train d'expliquer à propos de l'expérimentation, n'exonère pas de devoir acquérir le bagage technique nécessaire pour traiter les problèmes. On ne fait pas de mathématiques sans cela. Mais inversement, la technique n'est pas suffisante. La métaphore classique à ce sujet, d'ailleurs convaincante, concerne le lien entre musique et virtuosité. On me permettra de préférer une image sportive, actualité oblige. Au football, beaucoup de joueurs ont une parfaite maîtrise technique. Mais, parmi ceux-là, les grands joueurs sont ceux qui mettent cette technique au service du jeu collectif : grâce au temps d'avance sur leurs adversaires qu'elle leur donne, ils peuvent lever la tête, ce qui leur permet de voir le jeu et de distribuer de bons ballons à leurs partenaires.

Ce lemme entraîne notre théorème. En effet, si Ω est la perpendiculaire commune aux médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$, les points A, B, C sont équidistants de Ω par le sens direct du lemme, et donc Ω est perpendiculaire aussi à la médiatrice de $[BC]$ par sa réciproque.

On renvoie le lecteur à l'annexe 4.9 pour d'autres précisions à ce sujet.

2.4.4 Une remarque didactique ?

Cette question de l'erreur est très importante dans la gestion des classes. Je pense qu'il ne peut exister de véritable recherche si l'erreur n'y est pas tolérée, voire reconnue comme un moteur. Pourtant cela n'est pas toujours naturel, ni pour le professeur[40], ni pour les élèves. Voilà ce que dit Magali Froger à propos des narrations de recherche de ses élèves (cf. [Froger] ; la classe de Magali est une très bonne classe du collège franco-allemand de Buc) :

Les élèves se censurent eux-mêmes. Ils gardent, inconsciemment sûrement, une idée de ce qu'ils peuvent écrire ou ne pas écrire dans leur compte-rendu. Conscients du fait que leur professeur et leurs parents attendent beaucoup d'eux, les élèves ne veulent pas décevoir et n'acceptent pas de montrer qu'ils font des erreurs.

Et elle ajoute, plus loin, cette remarque plus fondamentale encore :

Les élèves étant habitués à trouver les réponses aux exercices presque instantanément, pour eux le mauvais élève cherche parce qu'il ne trouve pas[41]*, alors que le bon élève trouve la solution immédiatement. La recherche est donc, pour eux, synonyme d'échec.*

En conclusion, il me semble que tout professeur devrait garder en permanence dans un coin de sa tête deux maximes, la maxime 2.25 et la suivante :

2.28 Maxime. *On peut avoir une idée fausse sans pour autant être stupide.*

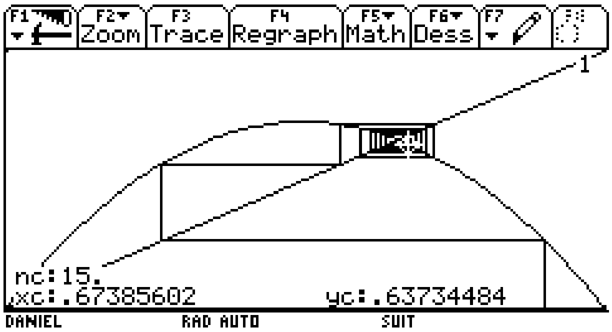
2.4.5 La suite logistique

Bien entendu, dans ce cas, nous étions bien conscients d'avoir été très optimistes. De fait, si on effectue quelques expériences supplémentaires, on voit apparaître de nouveaux phénomènes :

• Pour $\mu = 3$, la suite converge encore vers τ, mais elle n'est plus monotone (elle est “en escargot”). Plus généralement, cela semble être le cas pour μ compris entre 2 et 3 (l'écran 2 correspond à $\mu = 2,9$).

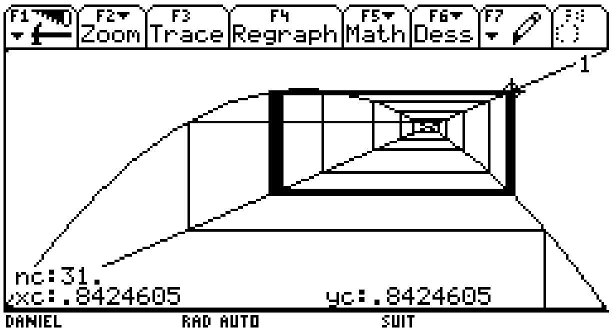
[40] Et c'est l'une des carences de la formation des maîtres, à mon avis.

[41] André Revuz dit que ce que la recherche peut apporter de plus important pour l'enseignement c'est la constatation que la principale occupation d'un mathématicien est de sécher.



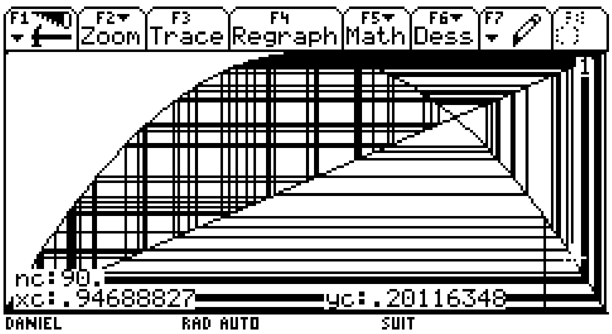
Écran 2

• Pour $\mu = 3{,}2$, la suite ne converge plus, mais on a toutefois ce qu'on appelle un cycle attractif, une suite de 2 valeurs dont la suite se rapproche de manière périodique : $0,7994$, $0,5130$. Pour $\mu = 3{,}5$ (écran 3) on a cette fois un cycle attractif d'ordre 4 : $0,8749$, $0,3828$, $0,8269$, $0,5008$.



Écran 3

• Enfin, pour $\mu = 4$ c'est l'horreur, si l'on trace le graphe de la suite, l'écran de la calculatrice se noircit rapidement, ce qui indique que la suite semble remplir tout le segment $[0,1]$, autrement dit que l'ensemble des valeurs u_n est partout dense dans $[0,1]$. C'est ce qu'on appelle le cas **chaotique**.



Écran 4

Dans les trois premières situations, il y a une conjecture claire et stable (elle ne dépend pas du point de départ dans $[0,1]$) et il s'agit de la montrer, en précisant dans quel domaine de variation du paramètre μ elle est vraie. Dans le dernier cas, les choses sont plus difficiles. Là, on atteint d'ailleurs une des limites de l'expérimentation. En effet, si l'on voit bien le comportement générique de la suite (elle est partout dense), il y a d'autres phénomènes (des points stationnaires, des points périodiques, etc.) que la calculatrice ne permet pas vraiment de déceler. Par exemple, si on prend $u_0 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$, on montre facilement par le calcul que la suite est périodique de période 2. Si l'on tabule la suite avec cette valeur initiale, tout semble bien se passer au départ, la suite prend alternativement les valeurs $0,9045$ et $0,3454$, mais à partir du neuvième coup elle déraille et retrouve le comportement générique de remplissage du segment. La raison est simple, en mode tabulation, la calculatrice prend une valeur approchée, qui n'est donc pas exactement la valeur périodique et l'erreur, minime au départ, augmente un peu à chaque itération. Bien entendu, on peut forcer la machine à calculer en mode formel, mais encore faut-il avoir trouvé la valeur de départ, et l'expérience ne peut pas vraiment la donner. On est ici en présence d'un cas où l'expérience, si elle montre clairement ce qui se passe dans le cas générique, ne permet pas de traiter les cas particuliers intéressants : il faut bien que les mathématiciens aient encore quelque chose à faire !

2.4.6 Les racines de l'unité

Dans le problème des relations, la conjecture était que l'idéal initial de la variété définie par les $(a_i+b_j)^3$ était engendré par les éléments $b_i^5, b_i^4b_j, b_i^3b_j^3, a_ib_j^3$, $a_ib_j^2b_k, a_i^2b_j, a_i^3$. Une tentative pour le prouver ayant échoué, nous avons raffiné l'expérience en utilisant, au lieu de $a, b, c, d, e; x, y, z$, un peu plus de variables : $a, b, c, d, e, f; x, y, z, u, v$. Le début de l'idéal initial est alors :

$$u^5, t^3u^3, t^4u, t^5, z^3u^3, z^3t^2u, z^3t^3, z^4u, z^4t, z^5, y^3u^3, y^3t^2u, y^3t^3, y^3z^2u, y^3z^2t,$$

$$y^3z^3, y^4u, y^4t, y^4z, y^5, x^3u^3, x^3t^2u, x^3t^3, x^3z^2u, x^3z^2t, x^3z^3, x^3y^2u,$$

$$x^3y^2t, x^3y^2z, x^3y^3, x^4u, x^4t, x^4z, x^4y, x^5$$

et il apparaît aussitôt qu'il y a un type de générateurs qui avait été oublié[42] : z^3t^2u, c'est-à-dire $b_i^3b_j^2b_k$. Avec ces générateurs en plus, on peut montrer qu'on a bien l'idéal initial et calculer son degré dans le cas pq (on trouve : $3^p + 3^q + 2^{p+q} - 2(2^p + 2^q) + 1$ et on s'empresse de vérifier ce nombre avec des exemples).

[42]Bien entendu, cet oubli est dû au fait que le nombre de variables x, y, z était insuffisant. C'est l'une des limites de l'expérimentation, qui peut amener à multiplier les expériences. Par bonheur, ici, rien d'autre n'avait été omis.

2.29 Maxime. *La* **vérification** *est un aspect essentiel de l'expérimentation.*

Nous avions cru pouvoir déterminer de la même manière le nombre de relations dans le cas général en calculant de degré de l'idéal engendré par les $(a_i + b_j + c_k + \cdots)^3$, mais, hélas, c'est faux (il y a beaucoup trop de générateurs dans cet idéal dès que le nombre de facteurs est ≥ 3). Vite, vite, il faut réciter la prière à Grothendieck ...

2.5 De nouvelles questions

Les mathématiques sont un éternel recommencement. À peine a-t-on fini de résoudre un problème que d'autres surgissent. On en a vu déjà quelques exemples ci-dessus et le lecteur en trouvera d'autres en annexe, qu'il complètera avec ses propres questions. J'évoque seulement ici l'exemple des développements décimaux, qui est une mine dans le registre : poser les problèmes (pour la résolution, s'adresser à notre service après-vente).

2.5.1 Les développements décimaux

L'expérience manuelle nous a permis de montrer :

Le développement décimal du rationnel p/q (écrit sous forme irréductible) est périodique, avec une période de longueur $\leq q-1$.

Une expérimentation rudimentaire, dans laquelle la calculatrice est bien utile, montre que la longueur de la période n'est pas toujours[43] $q-1$ (pour $q = 3$ c'est 1, pour $q = 11$ c'est 2, pour $q = 13$ c'est 6), mais que cela arrive souvent (pour $q = 7, 17, 19$, par exemple). De plus, si on ouvre bien les yeux (c'est le "dire tout ce qu'on voit" vu précédemment), on constate que cette longueur est toujours un diviseur de $q-1$. Une première question est donc de prédire la longueur de période. Mais il y a bien d'autres questions qui surgissent dès qu'on étudie cette situation. D'abord, dans certains cas, comme 1/7, la période commence tout de suite, mais pour 1/28 on a une pré-période : $1/28 = 0,03\,571428\,571428\ldots$. Autre chose, si on examine les septièmes, on constate qu'ils ont tous la même suite de chiffres comme période, mais décalée : $1/7 = 0,142857\,142857\ldots$, $2/7 = 0,285714\,285714\ldots$, $3/7 = 0,428571\,428571\ldots$, $4/7 = 0,571428\,571428\ldots$, etc. Pourquoi ce phénomène ? Et que se passe-t-il dans les autres cas (les treizièmes, les quarante-et-unièmes par exemple) ? De plus, même si l'on est convaincu de l'existence de la période, comment faire pour la trouver explicitement lorsqu'elle excède la capacité de la calculatrice (par exemple pour les fractions de dénominateur 17 ou 19) ?

[43] Même si q est premier, ce qui pourrait être une première conjecture.

Dans ce cas, l'expérimentation est donc source de nombreuses questions, auxquelles nous laissons au lecteur le plaisir de trouver les réponses (il faut penser à la seule chose qu'on sache faire facilement avec les développements décimaux : multiplier par 10). Voir quelques indications en annexe.

3 En guise de conclusion

3.1 Quelques bémols

L'honnêteté intellectuelle m'oblige à dire que, si l'expérimentation est une méthode de recherche souvent fructueuse en mathématiques, ce n'est pas pour autant la panacée universelle. Il y a plusieurs raisons à cela.

• Dans certains cas, l'expérience est inutile, ou impossible. On a rencontré plus haut un exemple dans le cas de la suite logistique. À ce sujet, l'une des choses que j'ai apprises en utilisant les logiciels de calcul formel en recherche, c'est que, s'ils sont un outil extraordinaire pour explorer des zones qui seraient inaccessibles à la main, leur pouvoir n'est pas infini, tant s'en faut, et on arrive vite à leurs limites[44]. C'est le cas pour le problème des relations où le cas 105 est inaccessible à la machine. Le lecteur se convaincra que la calculatrice peut induire en erreur en regardant le comportement des suites $2^n/n^{20}$ (jusqu'à $n = 27$, cette suite semble décroître vers 0), voire $2^n/n^{500}$ (la calculatrice baisse rapidement les bras). Dans ce cas, même si notre intérêt se porte vraiment sur ces suites, il n'est pas interdit de faire une expérience plus simple, avec de plus petits exposants, pour comprendre ce qui se passe.

• Dans d'autres situations, l'expérience peut masquer la véritable nature des problèmes, en confinant l'observateur dans un cas trop particulier[45]. On a vu ci-dessus qu'il suffit parfois de raffiner l'expérience, mais ce n'est pas toujours possible.

Voici un exemple de ce phénomène que j'ai rencontré en recherche. Notre

[44]Par exemple, j'ai souvent été amené à faire calculer au logiciel Macaulay les mineurs d'une grosse matrice, disons les mineurs 8×8 d'une matrice 15×20, dont les coefficients sont des polynômes en plusieurs variables. Le logiciel y parvient, bien qu'il y en ait plus de 8×10^8, mais on est tout proche de la saturation. De plus, il est totalement impossible – et inutile – de les faire afficher, car cela dépasse les capacités d'affichage du logiciel et de la machine. On peut cependant calculer avec l'idéal engendré par ces mineurs, en faisant alors une confiance aveugle à la machine, situation un peu désagréable pour un mathématicien. Mais, une fois encore, cette expérience en aveugle permet de trouver les résultats qu'il reste évidemment ensuite à prouver directement, selon la maxime 2.18.

[45]Jean-Pierre Serre dit que, souvent, quand on ne parvient pas à prouver un théorème, c'est qu'on cherche à prouver un théorème trop facile, au sens où les hypothèses sont trop fortes et où elles cachent le point crucial de la question.

philosophie, pour étudier le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ déjà évoqué plus haut, était de le décomposer en des objets plus petits, notés $H_{\gamma,\rho}$, en pensant que ces objets eux, ne pouvaient plus être décomposés, en termes mathématiques, qu'ils étaient **irréductibles**. On sait maintenant que c'est très faux. En effet, ces objets sont repérés (entre autres) par un entier appelé largeur. Or, s'ils sont bien irréductibles en largeur ≤ 2 et aussi, avec une condition, en largeur 3, ils ne le sont jamais en largeur ≥ 4, donc dans une immense majorité des cas. La source de l'erreur c'est que les premiers exemples que nous avions examinés étaient tous en largeur ≤ 2. Je retiens plusieurs choses de cet exemple :

— Les exemples que l'on considère en premier sont souvent trop simples. C'est normal, ce sont les premiers qui viennent à l'esprit, ce sont les plus faciles à calculer, sinon les seuls. La volonté farouche de démontrer des théorèmes fait qu'on a tendance à prendre ces exemples particuliers pour argent comptant.

— Lorsqu'on se rend compte de la difficulté, passé le temps de la déprime, il reste à en tirer les conséquences, en se gardant de jeter le bébé avec l'eau du bain, cf. 2.24. En fait, dans notre cas, même si les $H_{\gamma,\rho}$ ne sont pas irréductibles, la méthode garde son intérêt, notamment parce qu'on dispose d'une méthode d'investigation de ces objets qui a des conséquences intéressantes sur l'objectif initial. Simplement, ici, comme souvent en mathématiques et ailleurs, les choses étaient plus complexes que nous ne l'avions pensé, mais cette mésestimation des difficultés est, à mon avis, un atout psychologique important pour la recherche : si le chercheur imaginait toutes les embûches du chemin avant de s'y engager, sans doute renoncerait-il souvent à l'emprunter.

• Une fois que le problème est circonscrit, qu'une bonne conjecture est trouvée, il reste à la prouver et l'expérience n'indique pas toujours comment. Sans aller chercher le théorème de Fermat ou l'hypothèse de Goldbach, pour montrer que tout nombre premier congru à 1 modulo 4 est somme de deux carrés (conjecture robuste s'il en est), il faut une idée supplémentaire, par exemple factoriser $x^2 + y^2$ en $(x + iy)(x - iy)$ dans les complexes et travailler dans l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ des entiers de Gauss, cf. [Perrin1] : l'imagination est indispensable pour faire vraiment des mathématiques. Mais la nécessité de l'expérience revient vite. En effet, ce problème et celui des nombres de la forme x^2+dy^2 conduisent à étudier ces nouveaux objets que sont les anneaux de nombres $\mathbf{Z}[i\sqrt{d}]$ et pour cela que fait-on ? On regarde des exemples[46] :

[46]Là encore, il y a une dialectique entre expérience et démonstration. Quand on étudie les anneaux d'entiers des corps $\mathbf{Q}(i\sqrt{d})$ on voit que neuf d'entre eux sont principaux ($d = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67$ et 163). La question, qui remonte essentiellement à Gauss, est

$d = 1, 2, 3, 5$, etc.

• Plus fondamentalement encore, il me semble l'objectif des mathématiques, comme de toute science, est de **comprendre** les phénomènes (voir par exemple ci-dessous 4.9) et la phase expérimentale, pour importante qu'elle soit, n'est que la première phase de cette connaissance, celle qui permet de rentrer dans les problèmes. Ce que j'entends ici par "comprendre" c'est être capable de ramener le champ étudié à quelques principes directeurs avec lesquels on peut aborder et résoudre toutes les questions qui se posent. Cependant, cet objectif est largement inaccessible, même dans les domaines qu'on maîtrise le mieux (je pense à l'arithmétique où le moindre problème peut se révéler redoutable ou à la géométrie où l'expert le plus confirmé peut sécher sur une question élémentaire).

En résumé, je propose encore deux maximes, pour modérer les opinions bien établies des uns et des autres ;

3.1 Maxime. *Quel que soit le problème, il se trouvera toujours un mathématicien (peut-être pas encore né !) qui n'aura nul besoin de recourir à l'expérience pour le traiter.*

3.2 Maxime. *Quel que soit le mathématicien, il y a toujours un problème pour lequel il aura besoin d'avoir recours à l'expérience*[47].

3.2 Plaidoyer

Comme je l'ai dit dans l'introduction, faire des mathématiques c'est, pour moi et pour beaucoup d'autres, poser et résoudre des problèmes. Il est clair que cela nécessite de posséder un bagage technique, d'autant plus important qu'on s'attaque à des problèmes difficiles, et je ne méprise pas la technique. Il est clair aussi que la validation ultime d'un résultat mathématique est la démonstration déductive : c'est notre chance d'avoir une méthode pour convaincre qui résiste au temps. Mais, mon sentiment est que l'enseignement des mathématiques se résume trop souvent à ces deux points, en négligeant la phase de recherche. C'est d'autant plus dommageable que cette phase est évidemment la plus passionnante. Lorsqu'on fait cette remarque à des

de savoir s'il n'y en a pas d'autres. L'expérience permet de le montrer si on borne d (par exemple $d \leq 10000$), mais le cas général est beaucoup plus difficile et n'a été résolu qu'en 1968.

[47]Même s'il ne le dit pas explicitement et, je dirais presque, même s'il n'en est pas conscient.

enseignants de collège ou de lycée[48], la réponse qui vient le plus souvent est la suivante : *Bien sûr, nous trouvons nous aussi que l'étude de problèmes ouverts est intéressante, mais elle est très coûteuse en temps et nous avons des programmes à boucler.* C'est vrai, mais on a vu que ces problèmes sont aussi l'occasion de mettre en œuvre les compétences techniques. De plus, je me demande souvent ce qui est le plus important, dans l'apprentissage des mathématiques, lorsqu'il s'adresse à tous[49] : est-ce la technique ? est-ce l'apprentissage de la démonstration ? J'ai plutôt tendance à répondre, avec de multiples précautions, que la capacité de chercher, d'observer, de faire des hypothèses, de raisonner, d'argumenter, de critiquer, de surmonter ses erreurs, est bien plus importante encore. C'est en ce sens que je développe ce plaidoyer pour l'expérimentation en mathématiques. Il me semble que notre enseignement n'utilise pas suffisamment cette possibilité d'accès, sauf peut-être l'enseignement élémentaire, mais cela, le lecteur le sait mieux que moi.

4 Annexe : quelques compléments

Dans ce paragraphe, je donne quelques pistes et quelques références sur ceux des problèmes dont la solution n'est pas évidente et je propose de nouvelles questions.

4.1 Aire maximale

Pour le triangle, dans le cas isocèle, on peut prouver le résultat par une méthode analytique (voir par exemple *Déclic* Terminale S, 1998, p. 153).

On montre plus généralement que le polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle qui admet la plus grande aire ou le plus grand périmètre est le polygone régulier. En exprimant cette aire ou ce périmètre en termes de sinus des angles au centre on se ramène à la concavité de la fonction sinus : si les angles au centre du polygone sont les α_i, $i = 1, \ldots, n$, il s'agit de montrer :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \leq \sin\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}{n} = \sin\frac{2\pi}{n}\cdot$$

[48]D'ailleurs, changeant de casquette, je pourrais tout à fait tenir ce langage à propos de mon propre cours d'intégration en licence.

[49]Ma réponse est un peu différente lorsqu'il s'agit de futurs scientifiques.

4.2 Aires égales

Pour la variante où l'on se donne le rapport d'aire $\lambda \neq 1$, on trouve deux droites passant par A et coupant (BC) en les points A' et A'' qui partagent $[BC]$ dans les rapports λ et $-\lambda$. On peut exprimer la condition en disant que B, C, A', A'' est une division harmonique et le cas d'égalité correspond au cas particulier où l'un des points A', A'' est à l'infini et l'autre au milieu de $[BC]$.

4.3 La longueur du segment mobile

Une indication : le quadrilatère $AMPN$ est convexe et "inscriptible" (c'est-à-dire que les quatre points sont cocycliques) et on sait qu'on a alors la relation de Ptolémée : $MN \times AP = AM \times NP + AN \times MP$. Après, il reste à se souvenir des formules de trigo ...

4.4 Développements décimaux

Et maintenant, une page de publicité. Le lecteur trouvera tous les détails sur ce problème dans le livre [ME].

Juste pour lui faire une bande annonce alléchante, voici la réponse à la question de la longueur de la période. On suppose que le rationnel $r = \frac{p}{q}$, disons < 1, écrit sous forme irréductible, a une période de longueur (minimum) n :

$$\frac{p}{q} = 0, a_1a_2 \dots a_na_1a_2 \dots a_n \dots$$

On multiplie alors par 10^n, ce qui a pour effet de sortir une période et on obtient $10^n r = a_1a_2 \dots a_n + r$, soit $r = \frac{p}{q} = \frac{a_1a_2 \dots a_n}{10^n - 1}$, ou encore

$$(10^n - 1)p = q(a_1a_2 \dots a_n).$$

Comme q est premier avec p, il divise $10^n - 1$ et on voit sans peine que n est le plus petit entier qui vérifie cette propriété (c'est-à-dire encore qui est tel que $10^n \equiv 1 \pmod{q}$).

4.5 Les diviseurs

C'est un problème passionnant, mais très difficile. Une fois établie la formule donnant $d(n)$ il reste une multitude de questions. Par exemple, en appelant $D(n)$ le nombre maximum de diviseurs pour un entier $\leq n$:

• Déterminer $D(n)$ pour $n = 100$, 2000, 10000. Comment aborder ce genre de problème ? Peut-on donner une réponse générale ?

On vérifie qu'on a $D(100) = 12$ (atteint pour $60, 72, 84, 90$), $D(2000) = 40$ (atteint pour 1680) et $D(10000) = 64$ (atteint pour 7560). Si on fixe un n pas trop grand, c'est un exercice qu'on peut poser à des collégiens ou des lycéens. C'est encore un endroit où l'expérimentation est très efficace, notamment pour éliminer des conjectures intermédiaires (exemple de conjecture fausse : si n est un produit de nombres premiers distincts $p_1p_2 \cdots p_r$, on a $D(n) = d(n) = 2^r$).

• Déterminer la suite des "champions de leur catégorie", c'est-à-dire les n qui sont tels que $d(n) = D(n)$. Ces nombres sont dits "largement composés". C'est le cas de $60, 72, 84, 90$ par exemple. Une condition un peu plus forte est d'avoir $d(n) > d(m)$ pour tous les $m < n$. Ces nombres-là sont dits "hautement composés", par exemple, 60, 1680, 5040, 7560 en sont. Ils sont étudiés dans [Ramanujan] qui donne la liste des 103 premiers nombres de ce type.

• Que peut-on dire de $d(n)$ quand n tend vers l'infini ?

Cette dernière question est assez bien étudiée dans la littérature (cf. [Hardy-Wright]).

4.6 Sommes de carrés

La première remarque, pas tout à fait évidente, mais qui remonte à Euclide, au moins dans un cas particulier, cf. [Weil], c'est que le produit de deux entiers de la forme $x^2 + dy^2$ en est un autre. La méthode moderne pour le voir est d'utiliser les nombres complexes et la formule $x^2 + dy^2 = (x + i\sqrt{d}\,y)(x - i\sqrt{d}\,y)$. Cela conduit à regarder en priorité quels sont les nombres **premiers** qui sont de cette forme, avec l'idée de les multiplier ensuite.

Le cas des sommes de deux carrés est bien connu. On montre qu'il y a deux sortes de nombres premiers, les bons, à savoir 2 et ceux qui sont congrus à 1 modulo 4, qui sont sommes de deux carrés, et les mauvais, ceux congrus à 3 modulo 4, qui ne le sont pas. Un entier n est somme de deux carrés si, dans sa décomposition en facteurs premiers, les mauvais nombres sont au carré, ou plus généralement à une puissance paire, cf. [Perrin1] ou [Samuel] ou [Stewart-Tall].

Pour les sommes de 3 carrés, il est clair là encore que tous les entiers n'en sont pas (par exemple 7). On montre que les mauvais entiers sont ceux de la forme $4^a(8b - 1)$. C'est un peu plus difficile, voir [Serre] p. 79.

En revanche, on montre que tout entier est somme de quatre carrés. Ce résultat, annoncé par Bachet au XVI-ième siècle a été prouvé par Lagrange un siècle plus tard. Voir [Serre] ou [Samuel] ou [Stewart-Tall].

Pour les entiers de la forme $x^2 + 5y^2$, le résultat est plus amusant, et l'expérience est particulièrement intéressante. Imaginons un mathématicien, qui connaît le résultat pour les nombres de la forme $x^2 + y^2$. Le résultat de multiplicativité ne lui posant aucun problème, il va donc chercher, pour copier le cas des deux carrés, quels sont les bons nombres premiers, c'est-à-dire ceux qui sont de la forme $x^2 + 5y^2$. Il est facile de voir qu'il ne peut y avoir que 5 et les entiers congrus à la fois à 1 modulo 4 et à ± 1 modulo 5. Mais, là, l'expérience va lui montrer que, contrairement au cas de $x^2 + y^2$, il y a des phénomènes nouveaux. En effet, il y a des nombres premiers, comme 2 et 23, qui ne sont pas de la bonne forme, mais dont le produit l'est : ainsi on a $46 = 1^2 + 5 \times 3^2$. On montre que ces nombres premiers là, appelons les "moyens", sont 2 et les nombres congrus à 3 modulo 4 et à ± 2 modulo 5. Il y a enfin les mauvais, qui sont tous les autres. Le résultat final est le suivant : un entier est de la forme $x^2 + 5y^2$ si, dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, les mauvais nombres premiers sont à une puissance paire et si les moyens sont, au total, en nombre pair.

Le cas général des nombres $x^2 + dy^2$ est beaucoup plus difficile, cf. [Cox].

4.7 Les fractions égyptiennes

L'algorithme proposé résout le problème de l'écriture sous forme égyptienne des rationnels plus petits que 1. Pour atteindre un rationnel r plus grand que 1, il faut d'abord dépasser la partie entière de r, ce qui peut se faire grâce à la divergence de la série harmonique, voir [ME].

Il y a d'autres questions intéressantes. Par exemple, l'algorithme proposé permet de décomposer p/q en au plus p pas. Ce nombre est-il optimal[50] ? On méditera l'exemple suivant :

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225}.$$

Lorsqu'on examine des exemples de décompositions égyptiennes comme celui-ci, on est frappé par le fait que certains nombres ne font intervenir que de très petits dénominateurs, tandis que d'autres en mettent en jeu de très grands. Par ailleurs, on voit aisément que l'algorithme proposé est loin de donner la "plus petite" décomposition (au sens où les dénominateurs sont les

[50]La réponse est oui, car on montre facilement qu'il faut p pas pour décomposer p/q lorsque q est congru à 1 modulo $p!$.

plus petits). Par exemple, il donne :

$$\frac{2509}{2520} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{52} + \frac{1}{4680},$$

mais on a aussi :

$$\frac{2509}{2520} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}.$$

On voit qu'il reste de quoi occuper les longues soirées d'hiver !

4.8 La suite logistique

4.8.1 Le modèle

On appelle p_n la population au temps n (ce temps est un nombre **entier** de minutes ou de jours ou de toute autre unité). Pour des raisons qui dépendent de la situation (la quantité de nourriture, le manque de place, la présence de prédateurs, par exemple), il y a une valeur idéale pour cette population, une valeur d'équilibre e. On postule que si la population s'écarte de la valeur d'équilibre, elle tend à y revenir : si p_n est $> e$ (resp. $< e$), on a $p_{n+1} - p_n < 0$ (resp. > 0) et le retour de balancier est d'autant plus fort qu'on s'est plus écarté de e. En termes mathématiques, on va postuler[51] que le taux d'accroissement $\dfrac{p_{n+1} - p_n}{p_n}$ est proportionnel à l'écart $p_n - e$, avec un coefficient < 0 :

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = -k(p_n - e)$$

avec $k > 0$. Avec le choix opéré ci-dessus on a donc

$$p_{n+1} = (ek + 1)p_n - kp_n^2.$$

Si l'on veut éviter que la population ne devienne négative (ce qui est absurde !), il faut que p_n reste compris entre 0 et $M = \dfrac{ek+1}{k}\cdot$ Si on pose alors $u_n = p_n/M$, la relation de récurrence devient $u_{n+1} = \mu\, u_n(1 - u_n)$ avec $\mu = ek + 1$. Comme u_n doit rester compris entre 0 et 1, on vérifie qu'il faut que μ soit compris entre 0 et 4.

[51] On notera que ce n'est pas le seul modèle possible. On aurait pu aussi imposer la formule $p_{n+1} - p_n = -k(p_n - e)$ qui conduit à une suite arithmético-géométrique.

4.8.2 Les résultats

Le lecteur pourra montrer sans peine[52] les faits constatés expérimentalement ci-dessus : la suite est monotone et converge pour $0 \leq \mu \leq 2$, elle converge en escargot pour μ compris entre 2 et 3, elle a un cycle attractif d'ordre 2 pour $3 < \mu < \sqrt{6} + 1$, etc. Pour le cas $\mu = 4$, on le renvoie au texte d'une épreuve sur dossier de CAPES proposé dans la préparation d'Orsay annexé ci-dessous §4.8.3. Dans ce cas, il faut une nouvelle idée, c'est de noter que la relation de récurrence $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ n'est autre que la relation qui lie $\sin^2(2^{n+1}\theta)$ à $\sin^2 2^n\theta$. Cette idée permet de ramener le problème posé à celui de l'étude de la suite $2^n\theta$ (modulo 2π) qui est tout de même nettement plus simple. On a là une illustration d'une autre limite de la méthode expérimentale : il faut parfois sortir carrément du cadre initial d'un problème pour pouvoir mieux l'aborder : eh oui, de temps en temps, en mathématiques, il faut de l'imagination ! Pour ceux qui souhaitent en savoir plus sur ces suites, on renvoie au livre de [Devaney].

4.8.3 La suite logistique chaotique

Le texte suivant est utilisé en préparation au CAPES à Orsay.

On se propose d'étudier le comportement de la suite définie par une valeur initiale $u_0 \in \mathbf{R}$ *et par la relation de récurrence* $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$*. On pose* $f(x) = 4x(1 - x)$*.*

Exploration

1) À l'aide de la calculatrice, utilisée à la fois en modes numérique et graphique, observer le comportement de la suite (u_n) *(on prendra des valeurs initiales variées, certaines* > 1*, d'autres* < 0*, mais surtout des valeurs entre* 0 *et* 1*, dont certaines très voisines, et on regardera à chaque fois une cinquantaine de termes de la suite). Quelles remarques peut-on faire sur le comportement des suites obtenues ?*

Préliminaires

2) a) Étudier la fonction $f(x)$ *et tracer son graphe. Déterminer les réels* x *vérifiant* $f(x) = x$*.*

b) On suppose que la suite (u_n) *converge. Quelles peuvent être ses limites possibles ?*

c) Montrer que tout $x \in [0, 1]$ *peut s'écrire de manière unique sous la*

[52] Nouvelle illustration de la maxime 2.18.

forme $\sin^2\theta$ *avec* $\theta \in [0, \pi/2]$ *et qu'on a la relation :*

$$(*) \qquad \sin^2(2\theta) = 4\sin^2\theta\ (1 - \sin^2\theta) = f(\sin^2\theta).$$

d) On suppose qu'on a $u_0 = \sin^2\theta_0$*, avec* $\theta_0 \in [0, \pi/2]$*. Calculer* u_n*.*

e) Soient $x, y \in \mathbf{R}$*. Montrer qu'on a* $\sin^2 x = \sin^2 y$ *si et seulement si on a* $y = \pm x + k\pi$ *avec* $k \in \mathbf{Z}$*.*

Convergence

3) a) Donner des exemples de valeurs de u_0 *pour lesquelles la suite* (u_n) *est constante et égale à* 0 *ou à* $3/4$ *à partir du rang* $0, 1, 2, ...$

b) En utilisant les questions 2.c, 2.d, 2.e, déterminer toutes les valeurs de u_0 *(dites exceptionnelles) qui sont telles que la suite* (u_n) *soit constante à partir d'un certain rang.*

Périodicité

4) a) On s'intéresse maintenant aux valeurs de u_0 *qui sont telles que la suite soit périodique de période 2, c'est-à-dire telles que l'on ait* $u_{2n} = u_0$ *et* $u_{2n+1} = u_1$ *pour tout* n*, et* $u_1 \neq u_0$*. Montrez que ces valeurs sont les points fixes de la fonction* $x \mapsto f(f(x))$ *qui ne sont pas les points fixes de* f *et les déterminer.*

b) Un point $x \in [0, 1]$ *est dit périodique de période* n *pour* f *s'il vérifie* $f^n(x) = f \circ f \circ \cdots \circ f(x) = x$ *(n fois) et* $f^p(x) \neq x$ *pour* $p < n$*. Une suite dont la valeur initiale est un tel point est alors périodique de période* n*.*

On écrit $u_0 = \sin^2\theta_0$ *avec* $\theta_0 \in [0, \pi/2]$*. Caractériser les* θ_0 *tels que* u_0 *soit péridodique de période* n*. Donner des exemples de points de période* $3, 4, 5, \ldots$*. Vérifier à la calculatrice le comportement des suites associées.*

4.9 Médiatrices hyperboliques

4.9.1 Dans le modèle de Poincaré

Les résultats sont les suivants : comme on l'a conjecturé, les médiatrices d'un triangle hyperbolique sont "en pinceau", c'est-à-dire qu'elles sont concourantes, éventuellement sur le bord du disque de Poincaré, ou admettent une perpendiculaire commune. Il en est de même pour les hauteurs. En revanche, les médianes et les bissectrices intérieures sont vraiment concourantes.

Il y a de nombreuses démonstrations de ces propriétés, au moins dans le cas des médiatrices. On en a vu une ci-dessus. Une autre preuve consiste à interpréter la condition : "les trois droites D_1, D_2, D_3 sont en pinceau" comme “le produit des trois réflexions d’axes D_i est encore une réflexion”. C’est l’approche de [Bachmann].

4.9.2 Dans le modèle de Klein

Le mathématicien est comme l’ornithorynque : jamais content. Mieux qu’un résultat, il veut une démonstration. Mieux qu’une preuve, il veut comprendre ce qui se passe au fond des choses. Dans le cas qui nous intéresse, on voit apparaître, avec le lemme 2.27, une troublante analogie entre les points et les droites : un point (resp. une droite) est sur (resp. est perpendiculaire à) la médiatrice de A, B s’il (resp. si elle) est équidistant(e) de A et B. Un mathématicien un peu instruit ne pourra manquer de penser à une dualité point-droite ou une polarité en voyant ce phénomène. De fait, pour comprendre vraiment les théorèmes de géométrie hyperbolique et singulièrement le problème du concours des droites remarquables du triangle avec cette dualité sous-jacente, le mieux est sans doute de travailler dans le modèle de Klein (étendu) $\mathbf{P}$ plutôt que dans celui de Poincaré. Ce modèle n’est autre que le plan projectif réel muni d’une forme quadratique non dégénérée, c’est-à-dire d’une conique, par exemple un cercle. Les points du plan restreint $\mathbf{K}$, celui qui correspond au modèle de Poincaré sont encore les points intérieurs au disque, mais les droites sont cette fois les segments limités par le cercle qui joignent les points. Elles sont donc vraiment rectilignes, mais en contrepartie, ce modèle ne conserve pas les angles. Même si les “vrais” points sont seulement les points intérieurs, on a tout de même intérêt à conserver les autres, à cause de polarité par rapport à la conique. Ainsi, si deux droites se coupent à l’extérieur du disque, leur point d’intersection d n’est pas un “vrai” point, mais sa polaire D est une “vraie” droite, perpendiculaire commune aux deux droites initiales. Le résultat sur les médiatrices se ramène donc à dire qu’elles sont concourantes, soit dans $\mathbf{K}$, soit sur le bord, soit à l’extérieur.

Dans le cas des médiatrices, on peut rendre correcte la “démonstration” fausse vue ci-dessus dans le plan $\mathbf{P}$. En effet, dans ce plan, qui est un plan projectif, deux droites se coupent toujours, de sorte qu’on peut à bon droit considérer le point d’intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. De plus, on peut aussi étendre la définition de la distance (ou plutôt d’un avatar de celle-ci), de façon à ce que la médiatrice de deux points soit encore le lieu des points situés à égale “distance” de ces points. La démonstration devient alors parfaitement correcte.

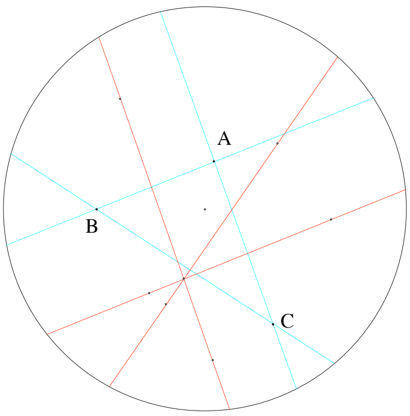


Figure 19

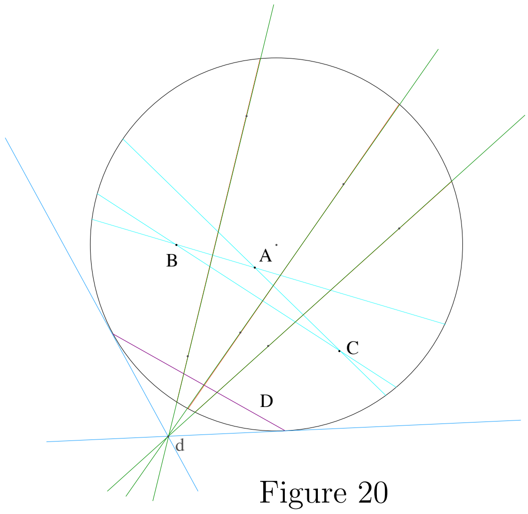


Figure 20

Sur ce thème, on renvoie à la thèse d'Yves Martin [Martin] et, à terme, au livre [Perrin2], en préparation. Le lecteur y verra encore d'autres preuves de ces théorèmes et notamment des preuves par le calcul d'une simplicité enfantine.

5 Références

[Andler] Andler M. *in* Colloque Mathématiques, Sciences expérimentales et d'observation à l'école primaire, Saint-Etienne, septembre 2005.

[Arsac] Arsac G., Germain G., Mante M. *Problème ouvert et situation problème*, brochure IREM de Lyon, 1991.

[Artigue] Artigue M. *L'intelligence du calcul*, Actes de l'université d'été de Saint-Flour, 2005.

[Bachmann] Bachmann F. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer, 1959.

[Cox] Cox D., *Primes of the form* $x^2 + ny^2$, J. Wiley and Sons, 1989.

[Delahaye] Delahaye J.-P., *Merveilleux nombres premiers*, Belin-Pour la Science, 2000.

[Devaney] Devaney R., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin, 1986.

[Ermel] (Collection) *Apprentissages mathématiques*, Hatier.

[Froger] Froger M., *Initier à la démarche scientifique en classe de 5e à l'aide des problèmes ouverts*, Mémoire PLC2, IUFM de Versailles, 2006.

[Hardy-Wright] Hardy G.H., Wright E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 5th edition, 1979.

[Kuntz] Kuntz G. (coordonné par) *Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques*,

http ://educmath.inrp.fr/Educmath/etudes/experimentation-math

[Martin] Martin Y., *Conception et mise en oeuvre de géométries non euclidiennes dans le cadre de la géométrie dynamique illustrées avec Cabri-Géomètre. Expérimentation en formation des maîtres*, thèse, Grenoble, 2003. Voir aussi : http ://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Formateurs/-Yves/these.html

[MDP1] Martin-Deschamps M., Perrin D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais connexe ni réduit*, Rapport de recherche du LMENS, 1995.

[MDP2] Martin-Deschamps M., Perrin D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4ème série, t. 29, 1996, p. 757-785.

[Massola] Massola J.-P., *Osons la difficulté*, PLOT, 13, 2006, p. 18-23.

[ME] Perrin D., *Mathématiques d'École*, Cassini, 2005.

[Perrin1] Perrin D., *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1995.

[Perrin2] Perrin D., *Géométrie projective et applications aux géométries euclidienne et non-euclidiennes*, en préparation.

[Ramanujan] Ramanujan S., *Highly Composite Numbers*, Proc. London Math. Soc., 2, XIV, 1915, p. 347-409.

[Samuel] Samuel P., *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1967.

[Sauter] Sauter M., *Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège*, Repères IREM, 39, p. 7-20.

[Serre] Serre J.-P., *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris, 1970.

[Stewart-Tall] Stewart I., Tall D.O., *Algebraic Number Theory*, Chapmann-Hall.

[Weil] Weil A., *Number Theory*, An approach through history, Birkhaüser.