Cabri et le chemin des huit vertus

Daniel Perrin

Voir, Penser, Dire, Agir,
Travailler, S'appliquer, Se concentrer, Méditer.

Le chemin des huit vertus
vers le Nirvana

Introduction

De même qu'il y a huit vertus censées mener au Nirvana, de même on peut (en comptant bien !) repérer huit vertus de Cabri qui ne manqueront pas de nous mener au paradis des mathématiciens et, plus modestement, serviront de trame à cet exposé.

Les huit vertus de Cabri

• Dessiner, • Illustrer, • Explorer, • Conjecturer,
• Éliminer, • Vérifier, • Prouver, • Poser des problèmes.

Quelques principes

Pour moi, faire des mathématiques, c'est poser et – si possible – résoudre des problèmes et je préconise pour cela une méthode [1] "expérimentale". Elle consiste à examiner un exemple, un cas particulier, à le faire varier, de façon à repérer les phénomènes, avec le souci de **généraliser** ce qu'on y observe. L'objectif de cette méthode est de produire des conjectures, puis, peut-être, des démonstrations. Il est clair que, dans la phase expérimentale, l'utilisation des logiciels de calcul ou de géométrie est un atout précieux, mais on verra qu'au-delà de cette phase, ils peuvent aussi rendre de grands services dans la phase de recherche d'une démonstration.

1. Voir ma page web http ://www.math.u-psud.fr/∼perrin/ à la rubrique conférences.

Quelques précisions en guise d'avertissement

• Je vais parler de l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique, et précisément de Cabri, dont je suis un utilisateur assidu, dans toute ma pratique mathématique actuelle (écriture de livres, conférences, enseignement, etc.) J'ai privilégié dans ce texte l'authenticité : j'ai vraiment utilisé Cabri dans les situations que je vais décrire et de la manière que je vais indiquer (ou presque...). Certains exemples sont très élémentaires, d'autres moins. Cela me permettra de détailler certains points ou au contraire de passer rapidement sur d'autres.

Le lecteur ne dispose dans ce texte que de figures statiques. Il ne manquera pas de faire lui-même les figures qu'il souhaite animer.

• J'utilise Cabri, mais je ne lui ai pas juré fidélité éternelle et la plupart des choses que je vais dire pourraient se transposer à un autre logiciel. Yves Martin, dont je parlerai plus loin, qui était un véritable expert de Cabri et mon maître en ce domaine, l'a d'ailleurs abandonné pour utiliser CaR Metal. De plus, je suis loin d'être un expert et mon but n'est pas de le devenir. Ce que je voudrais montrer, c'est au contraire comment un utilisateur ordinaire peut tirer profit d'un tel logiciel pour faire des mathématiques.

• Je vais parler presque exclusivement de géométrie plane. Certes, la géométrie dans l'espace est essentielle elle aussi, mais je suis moins familier avec les logiciels de géométrie dans l'espace.

• Enfin, bien entendu, utiliser un logiciel de géométrie ne dispense pas de faire des mathématiques, bien au contraire. On verra tout au long de l'exposé quelle aide le logiciel peut apporter au mathématicien, mais aussi qu'il peut être une source de nouveaux problèmes.

1 Cabri pour dessiner

C'est l'usage le plus évident, mais il me semble pertinent d'insister sur les points suivants.

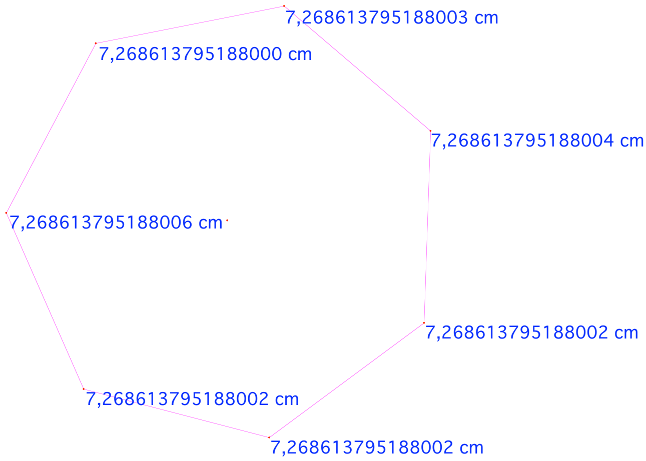
1.1 Cabri permet de faire des figures exactes

Je n'ai jamais vraiment cru à l'adage, qui ressortit sans doute à la même fable que le renard et les raisins, qui affirme que la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses [2]. Je trouve au contraire que pouvoir faire

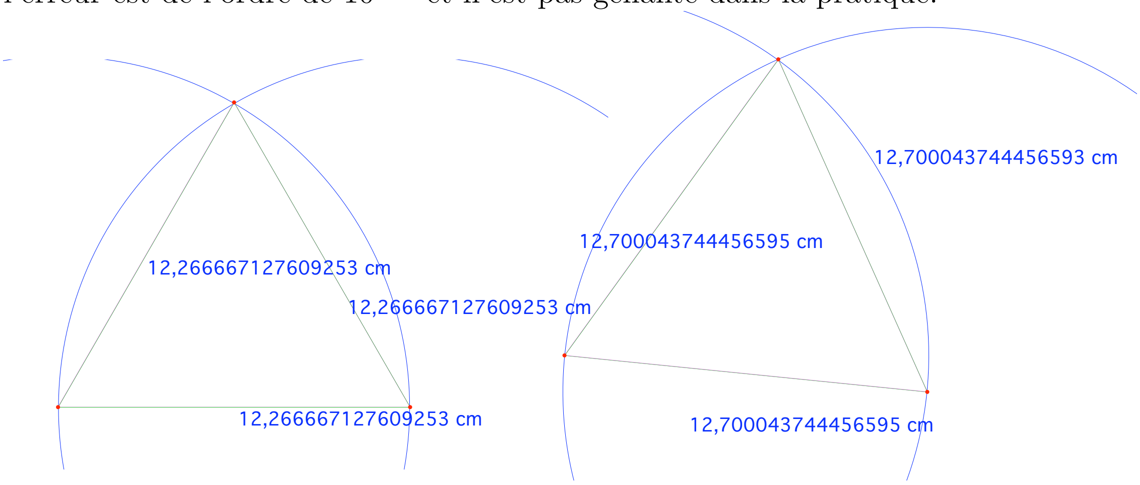
2. Je suis un peu trop péremptoire ici. Dans certaines situations, notamment celles d'un raisonnement par l'absurde, on fait effectivement une figure fausse exprès. Exemple : pour montrer la réciproque du théorème de l'angle inscrit, on prend un point M non situé

sans effort des figures correctes permet de faire de la géométrie de manière beaucoup plus confortable.

Je voudrais juste mettre un petit bémol : attention tout de même, Cabri, comme la plus belle fille du monde, ne peut donner que ce qu'il a. En particulier, même s'il dispose d'une macro polygone régulier, on ne peut lui demander de faire un vrai heptagone régulier (car celui-ci est non constructible).



Pire, il ne peut même pas faire un triangle équilatéral vraiment exact (car il travaille sur un plan discret formé de pixels). Cependant, dans les deux cas, l'erreur est de l'ordre de 10^{-18} et n'est pas gênante dans la pratique.

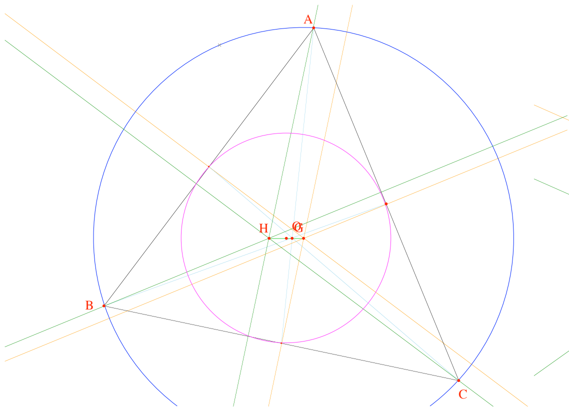


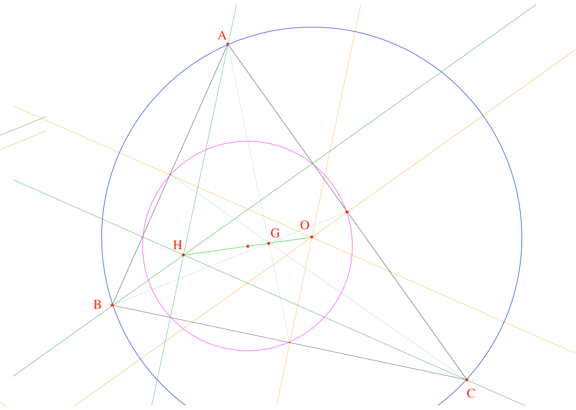
1.2 L'aspect dynamique

C'est, bien entendu, le point fort des logiciels du même nom. Nous en verrons des applications conséquentes plus loin, mais un premier aspect relève du dessin : le côté dynamique permet de rendre lisible les figures. La figure classique ci-dessous concerne la droite et le cercle d'Euler. La première figure

sur le cercle, on suppose l'angle $\widehat{AMB}$ égal à $\widehat{APB}$ avec P sur le cercle et on trouve une contradiction. Il m'est d'ailleurs arrivé récemment d'être em...bêté parce que Cabri refusait de faire une figure fausse.

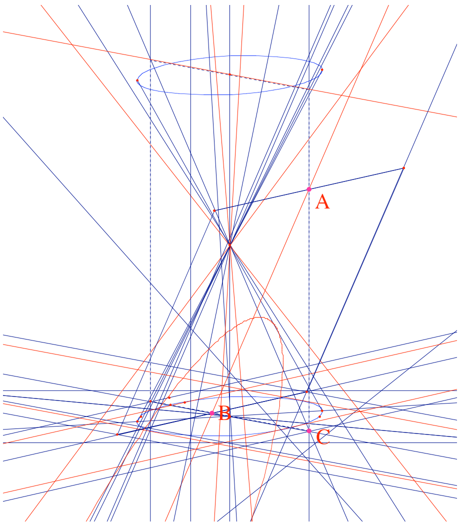
est pratiquement illisible, la seconde, obtenue par un simple déplacement du point A, l'est beaucoup plus.

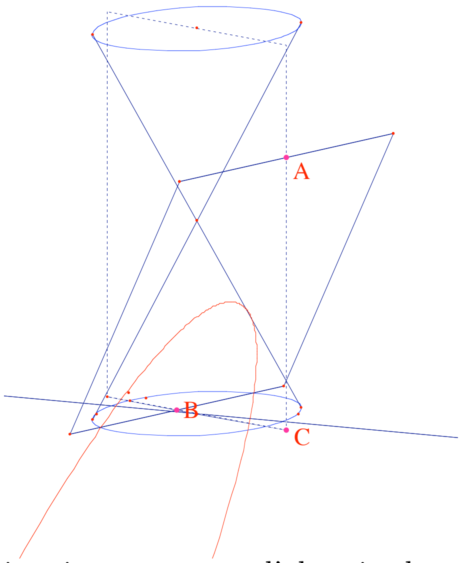




Lorsqu'on réalise des figures complexes à la main, si le résultat n'est pas à la hauteur de nos attentes, il n'y a plus qu'à recommencer [3]. Avec Cabri, même le plus maladroit est sûr de parvenir à une figure satisfaisante.

1.3 D'autres attraits





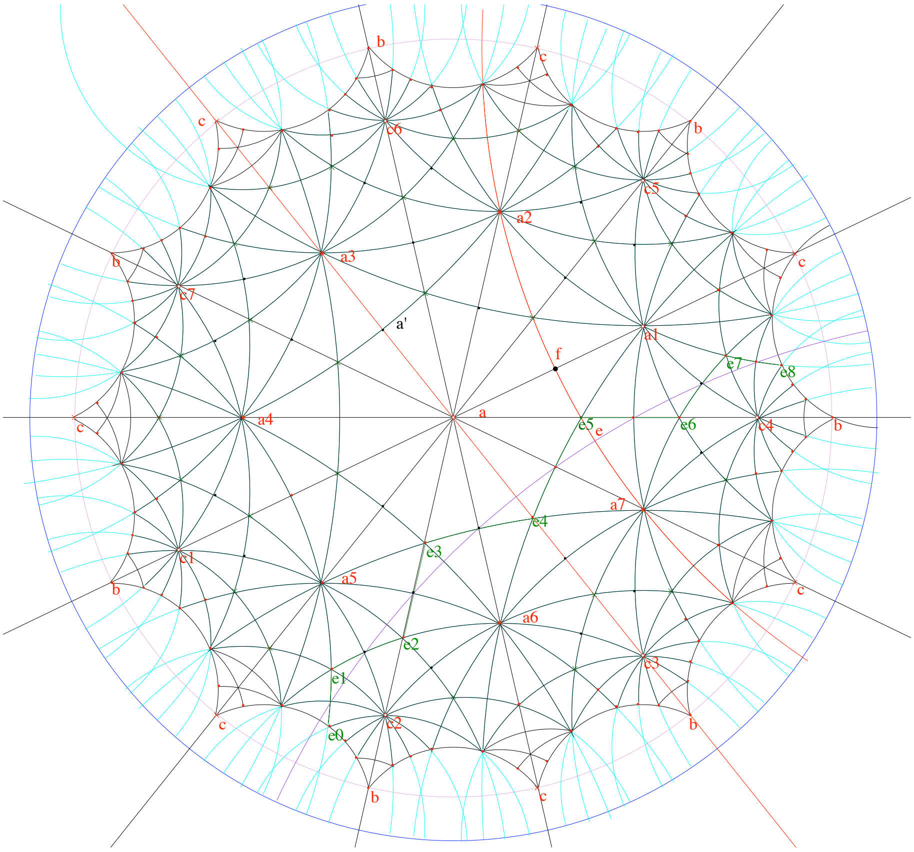
Parmi les fonctionnalités de Cabri qui permettent d'obtenir des dessins lisibles et agréables, citons encore la palette de couleurs, les différentes épaisseurs de traits, la possibilité de masquer certaines lignes de construc-

3. Cela peut être une méthode d'éducation : on raconte que le duc de Wellington (dit le duc de fer) s'entraînait à recommencer des châteaux de cartes qui s'écroulaient toujours, juste pour se forger le caractère.

tions (sans toutefois les perdre). La figure ci-dessus [4] sur les sections coniques donne un bel exemple de cette dernière possibilité.

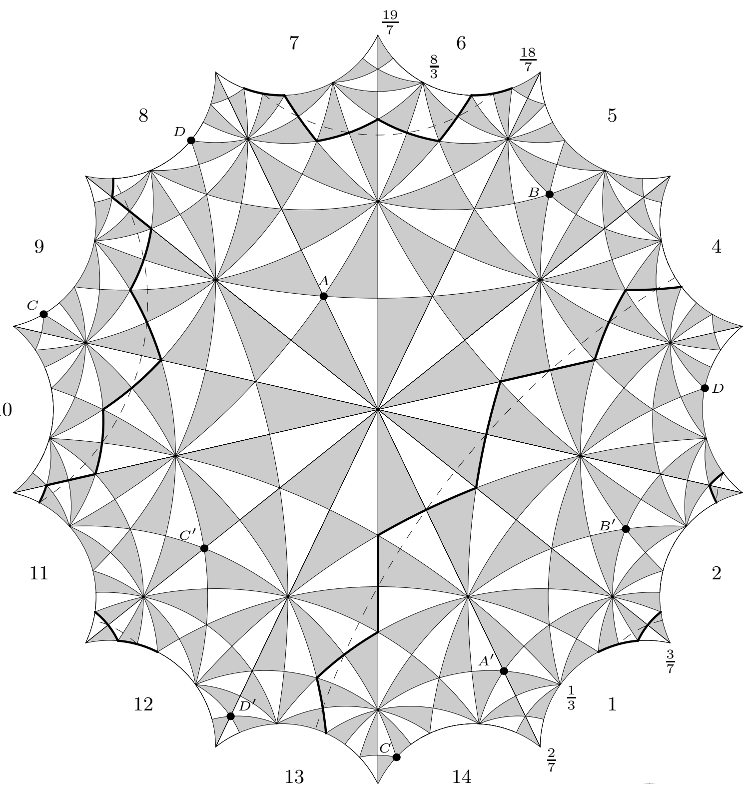
1.4 Un bel exemple

La figure suivante est la représentation hyperbolique de la surface de Klein [5]. Même avec Cabri, même avec les macros d'Yves Martin, cette construction m'a pris un certain temps, mais sans doute incomparablement moins qu'il n'en a fallu à Klein pour réaliser la figure originelle.



4. Due à Martin Acosta.

5. Voir ma page web à la rubrique conférences. Cette surface est si belle qu'on lui a même érigé une statue, appelée *The eightfold way*, au MSRI (Mathematical Sciences Research Institute) à Berkeley. Ce titre fait justement allusion au fameux chemin des huit vertus que l'on voit d'ailleurs sur la figure ci-dessus.



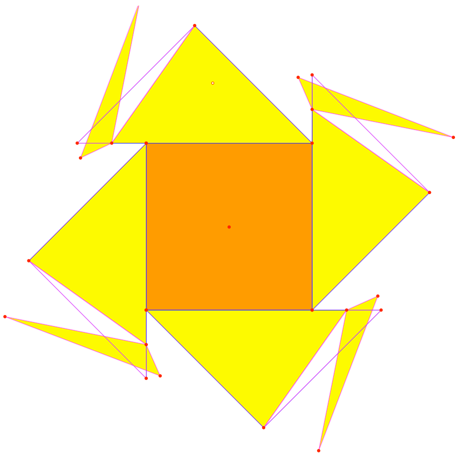
La figure originelle de Klein

2 Cabri pour illustrer

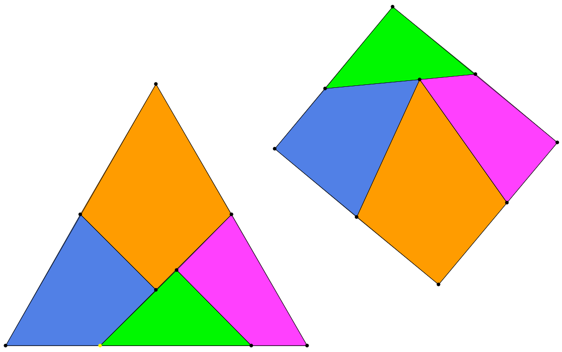
J'entends ce mot au sens de **faire voir**, au sens propre, des phénomènes mathématiques. C'est un aspect essentiel, notamment d'un point de vue pédagogique. Cela permet notamment, sur des points où l'on ne souhaite pas passer tout son temps, de donner rapidement un aperçu visuel de la situation. J'en donne ici quelques exemples. Il y en a des centaines.

2.1 Visualiser les déplacements

L'aspect dynamique permet de montrer vraiment le déplacement des figures. Ainsi, dans l'exemple qui suit (la méthode d'Abul-Wafa pour passer de trois carrés à un carré), le déplacement des petits triangles à l'aide de la souris est une aide incomparable pour comprendre le découpage.



La méthode d'Abul-Wafa

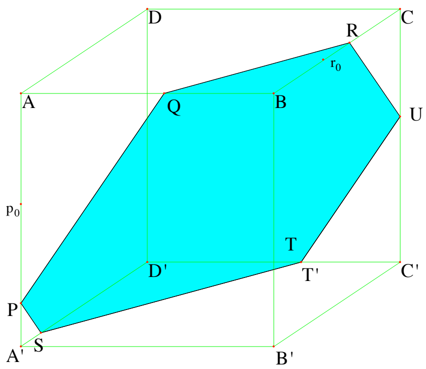


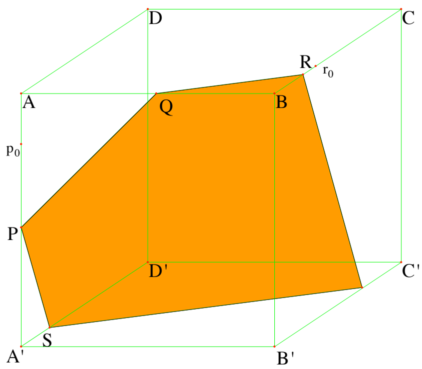
Le découpage de Dudeney

2.2 Faire varier les paramètres

Là encore c'est l'aspect dynamique qui domine. Lorsqu'on considère le découpage de Dudeney ci-dessus (qui passe d'un triangle équilatéral à un rectangle), le fait d'avoir la possibilité de faire varier le point de découpe de la base du triangle équilatéral permet de se convaincre de l'existence d'un carré et un seul dans ses transformés.

De même, dans le dessin d'une section de cube, on peut faire varier les paramètres de façon à obtenir à volonté tel ou tel type de section (hexagone, pentagone, quadrilatère, triangle).





Un mot à ce propos. Sur ce thème, il est clair que la démonstration Cabri ne suffit pas. C'est un exercice très intéressant pour des élèves de dessiner à la main la section donnée par trois points [6]. Cependant, l'utilisation de Cabri

6. Et dans certains cas c'est assez rusé, voir le cas difficile p. 372 de [ME].

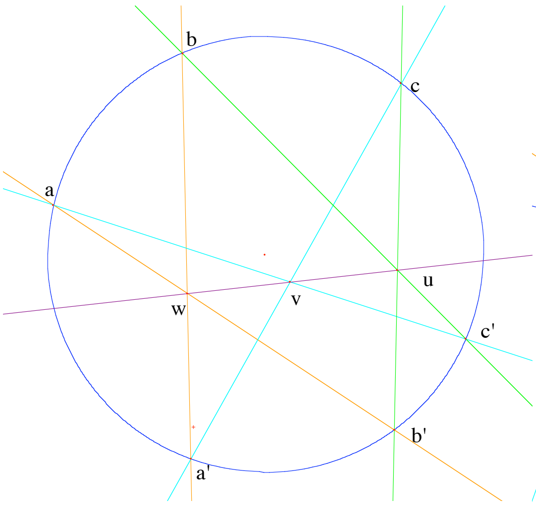
présente deux avantages :

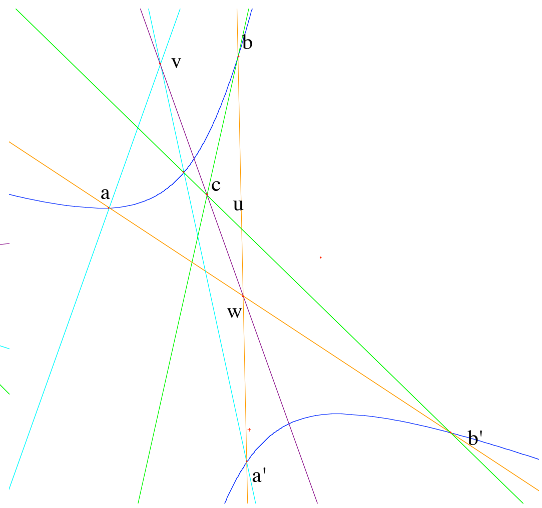
• Le premier est un gain de temps qui permet, lorsqu'on a étudié une section et qu'on ne veut pas passer encore longtemps à en examiner une autre, de montrer aux élèves l'ensemble des possibles.

• Le second, si l'on a au contraire envie de passer plus de temps sur ce problème, est de faire construire aux élèves une figure Cabri robuste, c'est-à-dire qui résiste au mouvement des points de base de la section. C'est un exercice qui nécessite d'avoir bien compris toute la procédure.

2.3 Le cas des coniques

On ne comprend l'unité de l'ensemble des sections coniques qu'en les faisant varier, soit comme dans la figure de Martin Acosta en tant que section d'un cône, soit simplement avec la macro Cabri qui les définit par cinq points, en déplaçant l'un d'entre eux. En particulier, on se convainc alors que le théorème de Pascal est bien un théorème projectif, puisqu'il résiste au changement du cercle initial en ellipse ou en hyperbole.

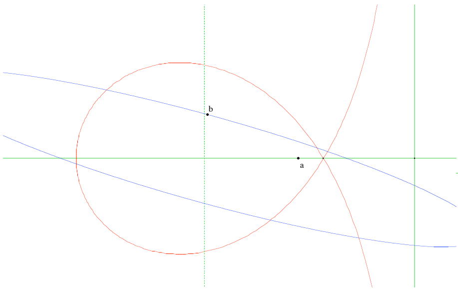


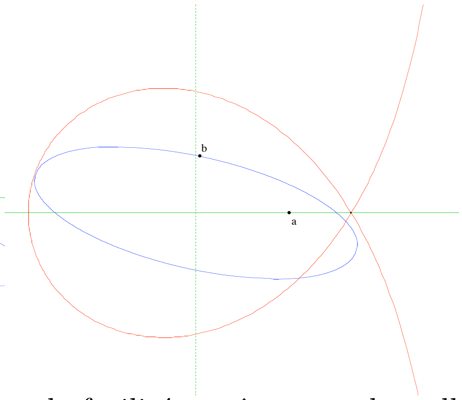


2.4 Pour aller plus loin

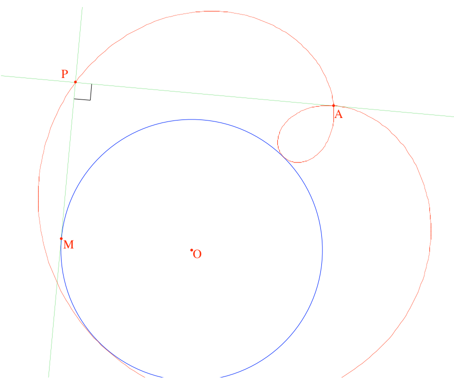
Il y a de nombreux thèmes de géométrie que l'on peut illustrer ainsi avec Cabri. En voici trois :

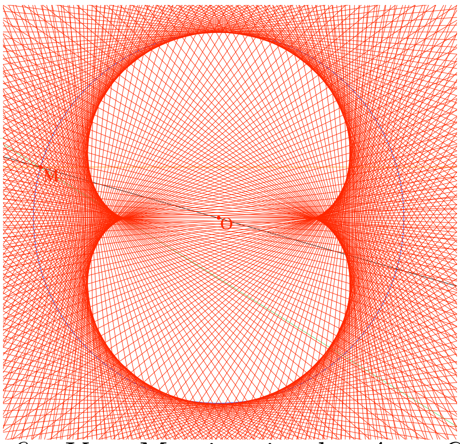
• Le théorème de Bézout sur l'intersection des courbes algébriques planes. On se limite ici au cas d'une conique et d'une cubique). En déplaçant le point a sur l'axe des x vers la gauche, le nombre de points d'intersection passe par toutes les valeurs de 6 à 0. En déplaçant convenablement b la conique devient une hyperbole et l'un des 6 points part à l'infini.



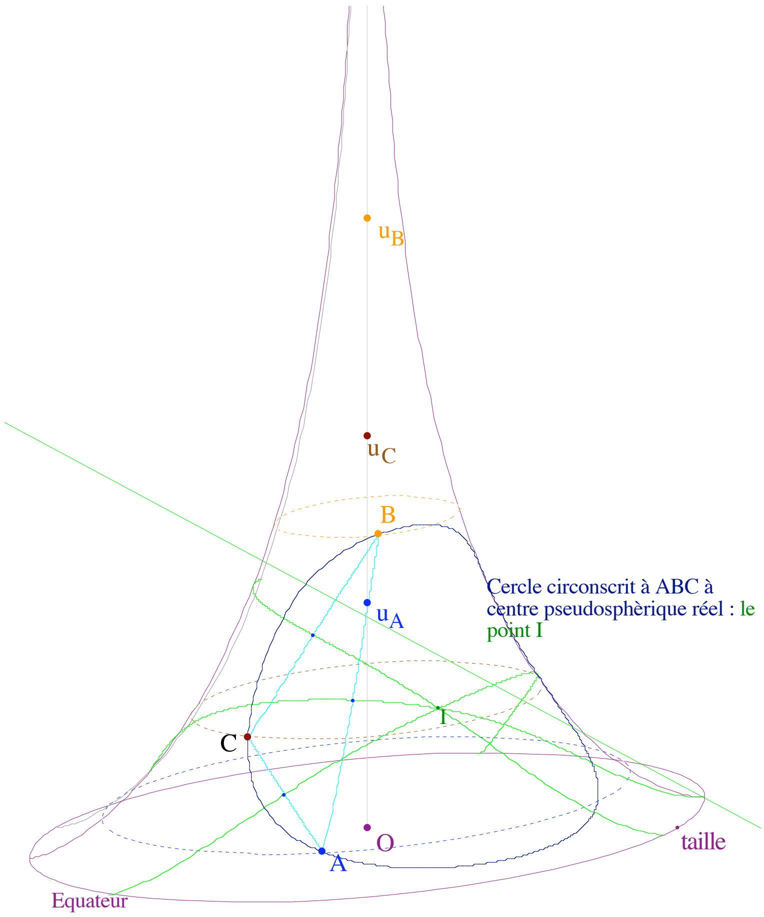


• L'un des charmes de Cabri est la facilité extrême avec laquelle on peut visualiser lieux et enveloppes. Voici deux exemples : le limaçon de Pascal et la néphroïde. Dans le cas du limaçon, en déplaçant le point a, on obtient toutes les formes possibles du limaçon (lisse, avec un rebroussement, avec un point double).





• J'ai gardé le meilleur pour la fin. Yves Martin a implanté sur Cabri tous les modèles usuels de géométrie non euclidienne et notamment le modèle de Klein-Beltrami de la géométrie hyperbolique. Dans ce modèle, le plan est la pseudo-sphère, obtenue par rotation d'une tractrice autour de son asymptote. Cette surface, comme la vraie sphère, est de courbure constante, mais négative. Yves Martin a créé des macros permettant de tracer dans ce modèle des droites, des perpendiculaires, des médiatrices, des cercles et de faire la plupart des opérations de la géométrie en quelques clics. On reviendra plus loin sur l'importance de la création de macros pour explorer une situation inconnue. Dans le cas présent, le but est plus de visualisation que d'exploration : il faut être vicieux pour faire de la géométrie dans ce modèle alors que ceux de Klein et de Poincaré sont beaucoup plus commodes. Mais la pseudo-sphère est le seul modèle qui se plonge isométriquement [7] dans l'espace euclidien de dimension 3 et ce résultat théorique est magnifiquement illustré ici.



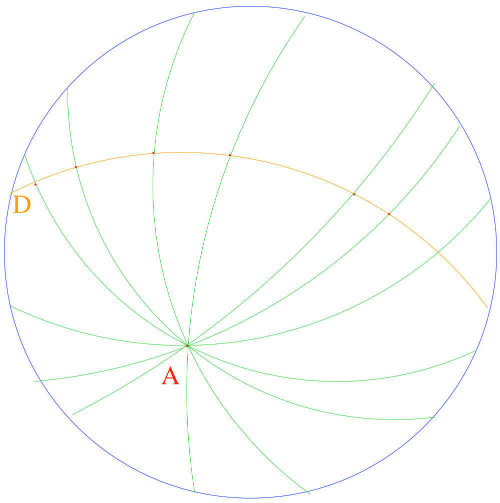
3 Cabri pour explorer

Cabri est un outil incomparable pour explorer un domaine inconnu. Je vais en donner ici trois exemples : les deux géométries non-euclidiennes usuelles (elliptique et hyperbolique) et l'étude de la suite logistique.

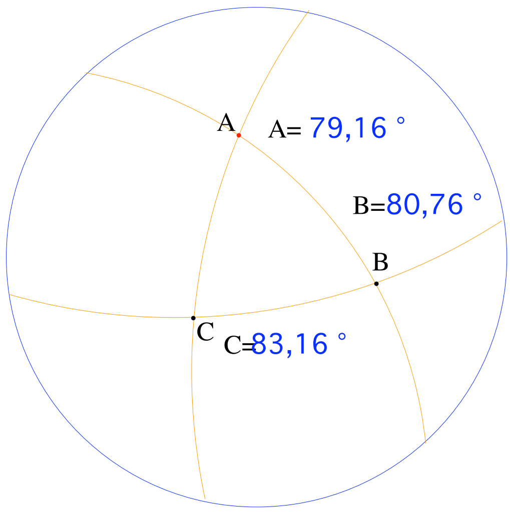
7. Au moins localement.

3.1 La géométrie elliptique

Un modèle du plan de la géométrie elliptique consiste en un disque fermé dont les points du bord diamétralement opposés sont identifiés. Les droites de ce plan sont des arcs de cercles à extrémités diamétralement opposées. On dispose, grâce aux travaux d'Yves Martin, de macros pour travailler dans ce modèle. Une manipulation élémentaire montre déjà un certain nombre de phénomènes : il n'y a pas de droites parallèles dans cette géométrie. En revanche, on a une notion d'angle, qui est compatible avec la notion euclidienne (le modèle est "conforme"), donc une notion d'orthogonalité.



Il n'y a pas de parallèles à D passant par A

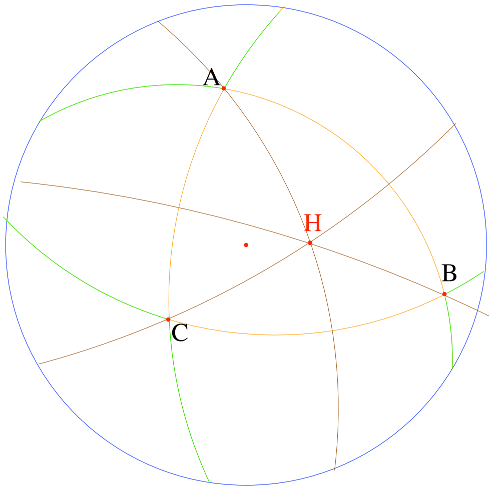


La somme des angles du triangle est $243,08$ degrés

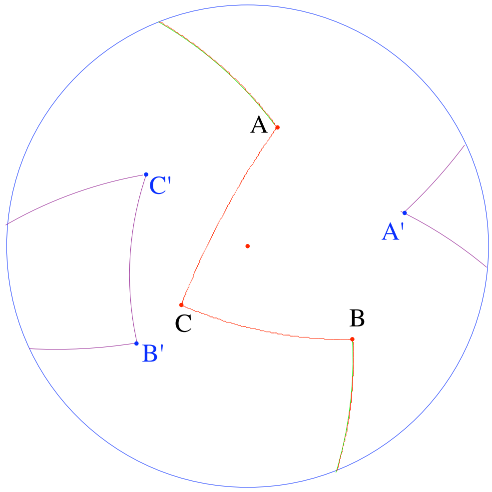
On a aussi une distance, mais le modèle n'est pas isométrique. Tout cela permet de faire de la géométrie, de construire des triangles, avec leurs hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices. On constate avec ravissement que les théorèmes que l'on a appris en géométrie euclidienne sont encore valables : les droites remarquables du triangle concourent et on a encore un cercle circonscrit (un peu bizarre parfois, il faut bien dire).

Si l'on va un peu plus loin, on découvrira des objets un peu plus exotiques (les médiateurs, les points bissecteurs, etc.)

Si l'on croit qu'Yves Martin a travaillé sérieusement, on peut aussi faire quelques découvertes. Par exemple, avec la macro *segment intrinsèque*, on peut voir qu'il y a plusieurs formes de triangles dans le plan elliptique (et deux types vraiment différents topologiquement : l'un homotope à un point et l'autre non ; on dit que l'un est de spin positif et l'autre de spin négatif). On peut aussi voir que la somme des angles d'un triangle est $> \pi$.



Concours des hauteurs
elliptiques



De drôles de
triangles !

3.2 La géométrie hyperbolique

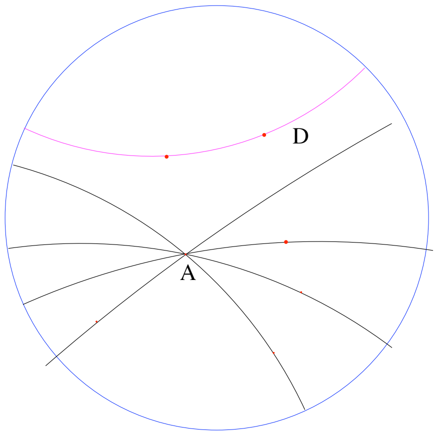
Il y a beaucoup de modèles de la géométrie hyperbolique et on a vu ci-dessus la pseudo-sphère. Les trois plus connus sont les disques de Klein et de Poincaré et le demi-plan de Poincaré. Aucun de ces modèles n'est totalement satisfaisant. Dans certains les droites ne sont pas des droites, dans d'autres, les angles ne sont pas conservés. Dans tous les cas, Yves Martin a développé des macros permettant de travailler confortablement dans le modèle en question.

Le modèle le plus commode est peut-être le disque de Poincaré. Comme dans le cas de la géométrie elliptique, il s'agit d'un disque, mais cette fois privé de son bord, et les droites sont encore des arcs de cercles, mais orthogonaux au bord. L'avantage de ce modèle est qu'il est conforme (les angles sont les mêmes qu'en euclidien). Là encore, l'exploration permet de noter tout de suite plusieurs points : l'existence de parallèles et le fait que le postulat d'Euclide n'est pas vrai, la présence de notions usuelles (angles, distances, etc.). L'expérimentation avec le modèle permet de mettre un certain nombre de phénomènes surprenants en évidence :

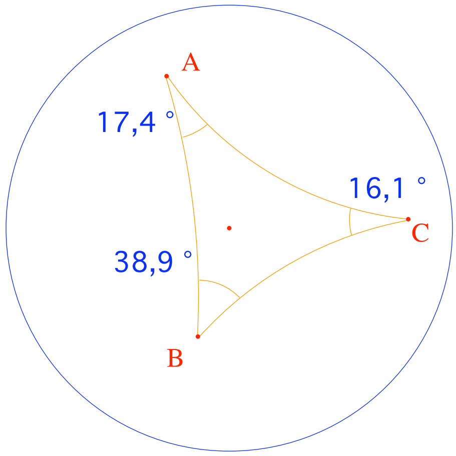
• Comme en euclidien, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles

• Mais si l'on a deux parallèles, une perpendiculaire à l'une n'est pas nécessairement perpendiculaire à l'autre. Précisément, deux droites parallèles ont une seule perpendiculaire commune.

On voit aussi qu'à l'inverse du plan elliptique, la somme des angles d'un triangle est $< \pi$.

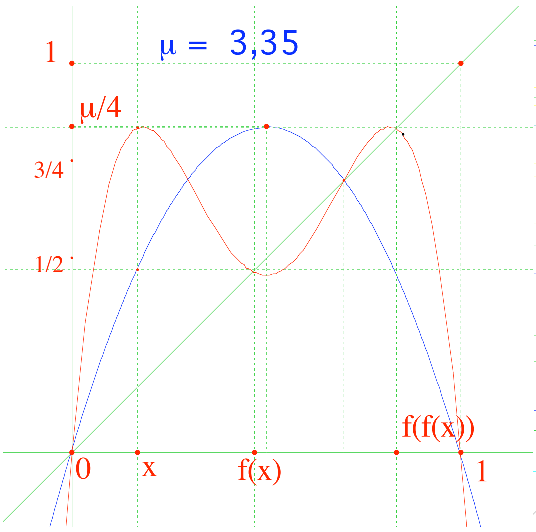


Il y a une infinité
de parallèles à D par A

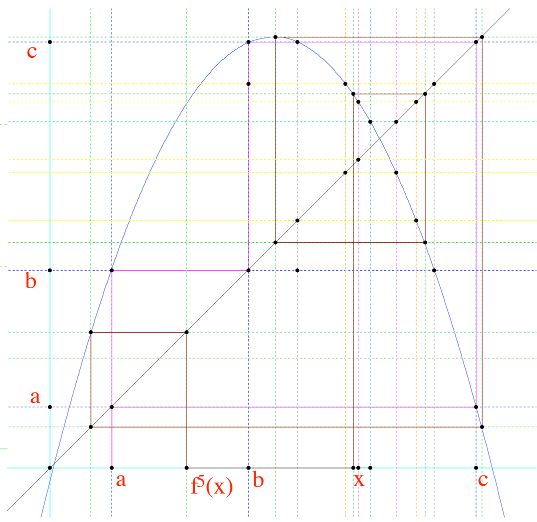


La somme des angles d'un triangle
est plus petite que 180 degrés

3.3 L'étude de la suite logistique



L'itérée seconde
de f



Un cycle d'ordre 3
impose un cycle d'ordre 5

Cette fois, il s'agit d'un exemple d'analyse : on s'intéresse à la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n) = \mu u_n(1 - u_n)$ avec $0 \leq \mu \leq 4$. Je renvoie à la rédaction que j'ai faite sur ce thème (voir ma page web à la rubrique conférences) pour des détails.

Le graphe de la fonction f est une parabole, que l'on peut construire avec

Cabri. On peut alors utiliser le logiciel de plusieurs manières :

• Pour construire les itérées de f et déterminer expérimentalement l'existence de cycles, par exemple ici celle de cycles d'ordre 2.

• Pour se convaincre de la véracité du théorème de Sarko...vsky : s'il existe un cycle d'ordre 3 il en existe de tous ordres (ici d'ordre 5).

4 Cabri pour conjecturer

Je retire de mon expérience de mathématicien la conviction que, dans une recherche, la phase des conjectures est essentielle [8], mais aussi la certitude que c'est souvent la plus amusante, celle où l'on peut donner libre cours à son imagination. Il m'est impossible d'évoquer cette phase du travail de recherche sans citer Alexandre Grothendieck, l'un des plus grands mathématiciens du XX-ème siècle :

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".

Je souscris totalement à cette façon de voir les choses. J'ai moi-même la conjecture facile, comme vous le verrez. L'essentiel dans cette phase, comme le dit Grothendieck, est de **for-mu-ler**.

En ce sens, l'utilisation de Cabri est un atout maître car il suffit souvent de déplacer les objets pour comprendre quel va être le résultat. De plus, on dispose d'outils très efficaces :

• les mesures de longueurs, d'angles, d'aires,

• la macro lieu (ou les macros trace et animation).

Je vais donner quelques exemples de telles conjectures [9].

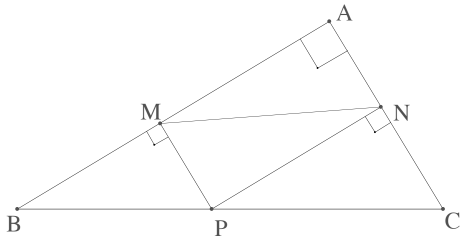
4.1 Le problème de Magali

Soit ABC un triangle rectangle en A, P un point de l'hypoténuse et M, N ses projetés orthogonaux sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement (voir fi-

8. Dans mes jours d'optimisme je vais jusqu'à dire que quand on sait ce qu'on veut démontrer, le plus dur est fait, voir ci-dessous. Évidemment ce serait trop beau !

9. Attention, comme je l'ai dit, j'ai parfois la conjecture aventureuse !

gure ci-dessous). Pour quelle position du point P la longueur MN est-elle minimale ?



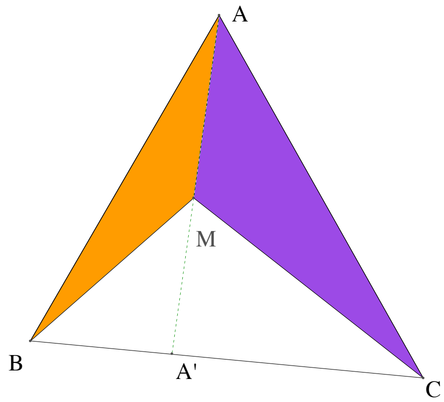
Ce problème a été proposé par Mireille Sauter, cf. [Sauter], et repris dans sa classe de cinquième par Magali Froger (cf. [Froger]). Dans une vraie classe, sans utilisation de logiciel de géométrie, la bonne conjecture n'est pas si évidente à se dégager : les élèves pensent d'abord au milieu de $[BC]$, puis à la bissectrice. Ces conjectures ne résistent pas à l'utilisation de Géoplan, avec lequel la conjecture émerge très vite :

Conjecture. *Le minimum de MN est atteint lorsque P est le projeté orthogonal de A sur (BC).*

Une question plus subtile est le cas d'un triangle quelconque, nous y revenons ci-dessous.

4.2 Les aires égales

On considère un triangle ABC. Quels sont les points M du plan qui vérifient l'égalité d'aires $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AMC)$?
On affiche les aires des triangles et on regarde comment elles varient avec M. On voit apparaître une droite passant par A, on réfute la hauteur et la bissectrice et on propose :

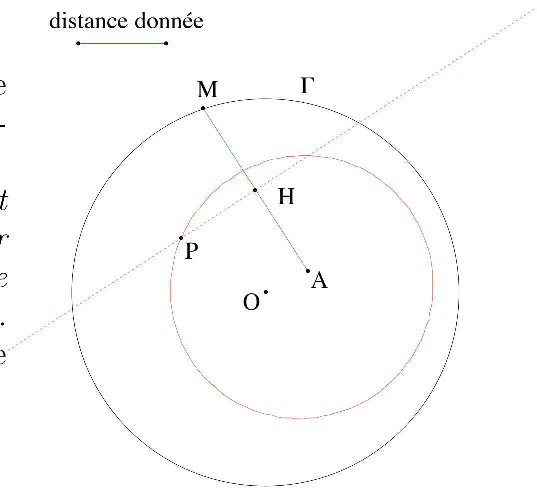


Conjecture. *Les aires de AMB et AMC sont égales si et seulement si M est sur la médiane de ABC issue de A.*

On peut d'ailleurs facilement prouver cette conjecture : on regarde le point d'intersection A' de (AM) et de (BC). On montre que l'on a $\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \dfrac{A'B}{A'C}$, de sorte que les aires sont égales si et seulement si le point A' est milieu de $[BC]$, donc si (AM) est la médiane issue de A.

4.3 Le problème d'Olivier

Ce problème m'a été posé par un de mes anciens étudiants de CAPES, Olivier Girod.
Soit A un point fixe et Γ un cercle. Soit $M \in \Gamma$, H le milieu de $[AM]$ et P sur la médiatrice de $[AM]$, à une distance donnée de H. Déterminer le lieu de P.
L'expérience mène à conjecturer que le lieu de P (en rouge) est un cercle.



4.4 Les aires maximales

Parmi les triangles inscrits dans un cercle, quels sont ceux qui ont la plus grande aire ?

La conjecture est bien naturelle :

Conjecture. *Les triangles d'aire maximum sont les triangles équilatéraux.*

On notera qu'il n'est pas si facile de réaliser un triangle réalisant apparemment le maximum de l'aire car si l'on arrive à un maximum en bougeant A, il ne l'est plus si on bouge B, mais en bougeant B on altère aussi la maximalité en A, etc. ! Lorsque les élèves ont obtenu un triangle qui semble maximal, il peut être intéressant de leur faire vérifier les angles (en précision limitée on trouve bien 60 degrés), puis de passer en grande précision pour constater que les angles ne sont plus tout à fait égaux.

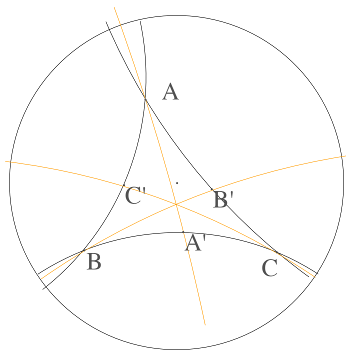
Le problème analogue avec une ellipse est plus complexe :

Conjecture. *Pour tout point A de l'ellipse il y a un triangle inscrit ABC d'aire maximale et tous ces triangles ont même aire.*

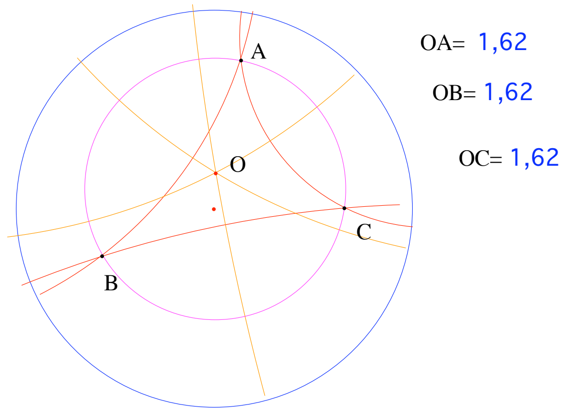
4.5 Le concours des droites remarquables en géométrie elliptique ou hyperbolique

On a déjà évoqué le problème plus haut. La conjecture est, bien entendu :

Conjecture. *Les médianes, médiatrices, hauteurs d'un triangle sont concourantes en géométrie hyperbolique et en géométrie elliptique.*



Concours des médianes hyperboliques



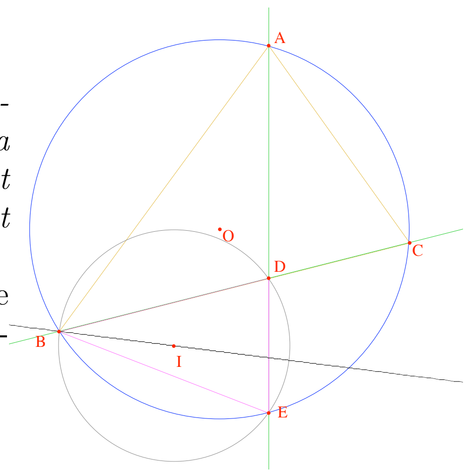
Concours des médiatrices hyperboliques

D'ailleurs, dans le cas des médiatrices, la preuve est identique à celle du cas euclidien : on considère le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$, il est équidistant de A et de B ainsi que de A et de C, donc aussi de B et de C, de sorte qu'il est sur la troisième médiatrice.

4.6 Le lieu du centre du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle. Le point E varie sur le cercle circonscrit à ABC. La droite (AE) coupe (BC) en D. Quel est le lieu du centre I du cercle circonscrit à BDE ?

L'utilisation de la macro lieu montre que le lieu du centre du cercle circonscrit est une droite passant par B.

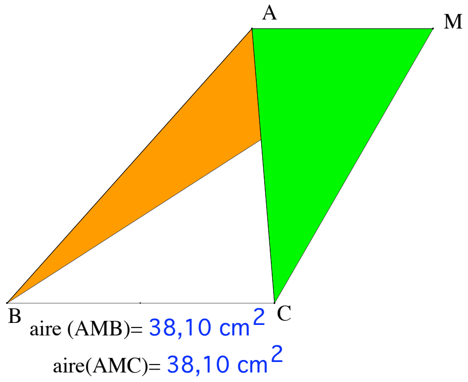


5 Cabri pour éliminer

Bien, il est temps d'être un peu sérieux. Dans ce qui précède, je vous ai consciencieusement menés en bateau dans trois cas au moins.

5.1 Les aires égales

Revenons sur la situation des triangles d'aires égales et bougeons un peu plus sérieusement le point M dans le plan, en lui permettant de s'extirper de l'angle en A. On s'aperçoit qu'il y a d'autres positions dans lesquelles les aires sont égales. En effet, si M est sur la parallèle à (BC) passant par A, on a aussi $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AMC)$ (c'est évident avec la formule *base* $\times$ *hauteur* !).

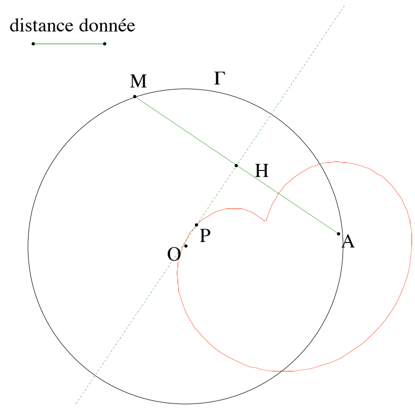


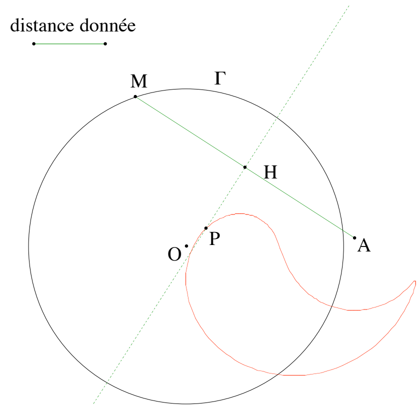
Comme le résultat est faux c'est que la preuve annoncée ci-dessus était incorrecte. Ici, on voit aisément où est l'erreur : avant de parler du point A', intersection de (AM) et de (BC), encore faut-il s'assurer que ces droites se coupent.

Ce type d'exemple est fondamental car il montre deux choses essentielles. La première, c'est qu'en mathématiques comme dans les autres les sciences, si l'on utilise l'expérience, elle doit être menée sérieusement. La seconde c'est la raison d'être de la rigueur, qu'on impose souvent sans discussion aux élèves : si une preuve n'est pas rigoureuse, on court le risque qu'elle soit fausse et, pire, que le résultat annoncé soit faux.

5.2 Le problème d'Olivier

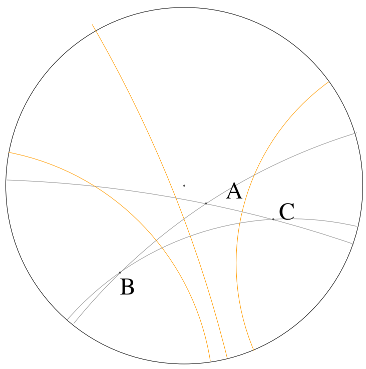
Là encore, l'expérience n'avait pas été menée de façon sérieuse (alors qu'il est très facile de le faire). En effet, déplaçant le point A, on voit que le "cercle" lieu se déforme et qu'il devient une courbe avec des creux et des rebroussements. On note aussi qu'une droite coupe cette courbe en 4 points, ce qui permet de subodorer qu'on a affaire à une courbe algébrique de degré ≥ 4. Arrivé là, on sait que l'on ne pourra atteindre cette courbe que par le calcul : un des intérêts de l'expérience, parfois, c'est de se rendre compte que le problème est difficile !



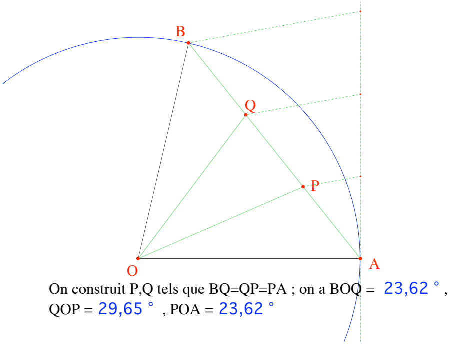


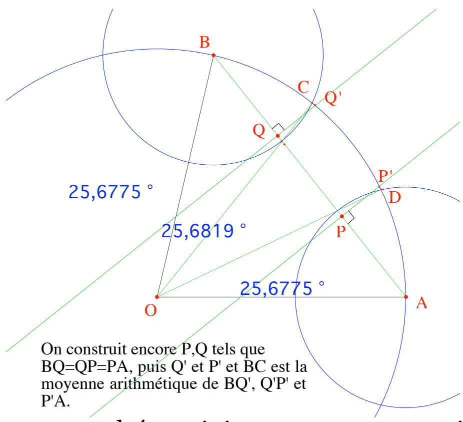
5.3 Le concours des médiatrices hyperboliques

Comme ci-dessus, l'expérience a été menée de façon trop sommaire et la démonstration aussi : qui a dit que deux des médiatrices se coupaient ?
La maxime suivante me semble tout à fait de circonstance :
Deux expériences valent mieux qu'une démonstration fausse.



5.4 Cabri : l'arme absolue contre les trisecteurs



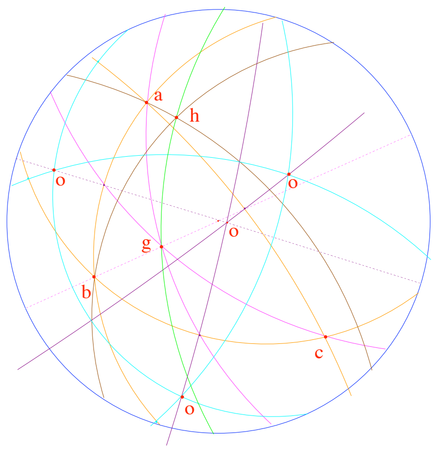


Il y a encore aujourd'hui de nombreux mathématiciens amateurs qui essaient de trouver une construction à la règle et au compas de la trisection de l'angle, bien que son impossibilité ait été prouvée depuis plus d'un siècle et demi.

Il est souvent difficile de les convaincre de leur erreur [10], mais Cabri peut être un bon outil pour cela. Voici deux exemples. Le premier, très grossier, est dû à un internaute pas très averti, le second, un peu plus subtil, au peintre Albrecht Dürer. Dans les deux cas, l'affichage de la valeur des angles (en nombre entier de degrés pour le premier et avec trois ou quatre décimales pour le second) permet de montrer que la construction est fausse.

5.5 Un dernier exemple : la droite d'Euler en géométrie elliptique

En géométrie euclidienne, on sait depuis Euler que, dans un triangle, le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont alignés. En géométrie elliptique, où les droites correspondantes sont bien concourantes, il est donc normal de se poser la même question. On a d'ailleurs une chance supplémentaire dans la mesure où il y a non pas un mais quatre centres de cercles circonscrits ! Cependant, l'expérience montre très vite qu'il ne faut pas nourrir de vains espoirs : aucun de ces centres n'est sur la droite qui joint l'orthocentre au centre de gravité.



6 Cabri pour vérifier

6.1 Problèmes de construction

Il y a un type de problèmes où l'usage de Cabri évite bien des erreurs, c'est la discussion des cas de figure dans les problèmes de construction. Le problème 187 de [ME] fournit un bel exemple d'une telle discussion, pas si facile [11]. Comme on l'a déjà dit : *Deux expériences valent mieux qu'une démonstration fausse.*

10. Ils ont surtout du mal à concevoir qu'une démonstration d'impossibilité puisse exister.

11. Ma première correction de ce problème était un peu hasardeuse, comme l'usage de Cabri me l'a montré ...

6.2 Des méthodes peu orthodoxes

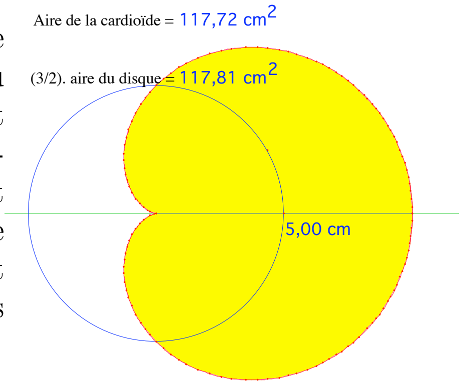
On peut très souvent utiliser Cabri pour vérifier une conjecture grâce aux fonctions numériques. Je l'ai employé d'une manière moins orthodoxe pour vérifier des calculs d'aires donnés aux étudiants de L1.

Par exemple, pour la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\theta)$, on calcule l'aire grâce à la formule :

$$\mathcal{A}(C) = \int_0^{\pi} \rho(\theta)^2 d\theta$$

et on trouve $\dfrac{3}{2}\pi a^2$, que l'on vérifie grâce à Cabri ...

Cabri n'a pas de macro pour calculer une aire courbe qui n'est pas celle d'un disque ou d'une ellipse, mais si l'on triche en traçant un polygone inscrit, on va détecter les erreurs (en général, les erreurs, qui proviennent de l'oubli d'un facteur, ou de toute autre cause, donnent des résultats franchement différents). En épaississant le lieu, les points intermédiaires sont pratiquement invisibles.



7 Cabri pour prouver

C'est peut-être l'aspect le moins évident de l'utilisation d'un logiciel, voire le plus subjectif. Mon expérience, répétée de très nombreuses fois, c'est que Cabri procure une aide considérable dans la preuve des théorèmes, au-delà de la phase des conjectures.

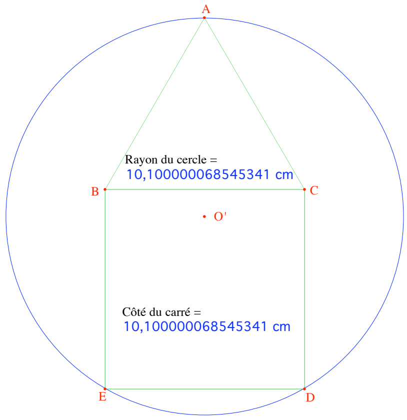
Je donne ci-dessous deux exemples de l'utilisation de Cabri pour démontrer des théorèmes, l'un très simple, l'autre un peu plus ardu, et j'essaie de préciser en quoi le logiciel est utile dans cette phase.

7.1 Un problème du Monde

Le problème est celui du "cercle de la félicité". On a un triangle équilatéral ABC posé sur un carré $BCDE$ et il s'agit de déterminer le rayon du cercle circonscrit à AED, de centre O, en fonction du côté du carré ou du triangle équilatéral.

L'observation de la figure semble indiquer que le rayon est égal au côté du carré. L'intérêt de Cabri ici est de confirmer cette hypothèse intermédiaire, avec toutes les décimales voulues.

Une fois assuré de ce fait, il n'y a plus qu'à le démontrer. Les jours où je suis très optimiste je propose comme une maxime : *Souvent, quand on a trouvé ce qu'il fallait démontrer, le plus dur est fait.*
Ici c'est bien le cas. Le plus simple est sans doute de considérer le point O' tel que $O'D = O'E = DE$. Si l'on joint ce point à A, E, D, on voit apparaître des parallélogrammes qui donnent aisément la solution.



7.2 Le problème de Magali

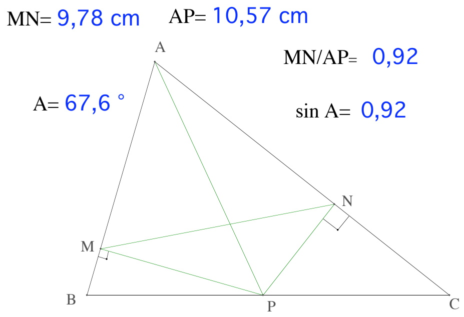
La solution du problème de Magali est très simple : le quadrilatère $AMPN$ étant un rectangle a ses diagonales égales, de sorte que minimiser MN c'est minimiser AP et on sait bien que ce minimum est atteint lorsque P est le pied de la hauteur issue de A.

Soit, mais comme on l'a dit plus haut, faire des mathématiques c'est poser des problèmes. En l'occurrence je me suis demandé : et si le triangle ABC n'est pas rectangle ? L'expérience Cabri montre que le minimum est encore atteint en le projeté H de A. Cette fois l'argument du rectangle tombe à l'eau car AP n'est plus égal à MN comme on le vérifie aussitôt avec Cabri. Cependant, on vérifie aussi expérimentalement que MN/AP est constant. Bien entendu, si l'on admet ce fait, on a le résultat, autrement dit, on a produit une conjecture intermédiaire décisive.

Il reste à comprendre pourquoi ce rapport est constant. Pour cela, on poursuit l'exploration en bougeant le point A, et on observe ce que devient le rapport. Bien entendu, il vaut 1 quand le triangle est rectangle et on constate que, sinon, il est toujours < 1 et d'autant plus petit que l'angle en A est petit (ou au contraire très obtus). Cela fait penser au sinus de l'angle. Si on affiche l'angle et son sinus, on constate effectivement qu'on a bien $\sin \widehat{A} = MN/AP$.

On obtient ainsi une deuxième conjecture intermédiaire décisive. On peut se demander en quoi celle-ci est meilleure que l'autre.

En effet, il peut sembler plus facile de prouver que MN/AP est constant quand P varie, plutôt que de prouver l'assertion plus précise $MN/AP = \sin \widehat{A}$. En réalité, c'est l'inverse qui est vrai (Serre dit que parfois, quand on ne parvient pas à montrer un théorème, c'est parce qu'on cherche à montrer un résultat trop facile !).



De fait, maintenant qu'on a vu apparaître les fonctions trigonométriques, on peut conclure sans trop de peine. Je laisse la fin de l'exercice au lecteur [12].

On voit ici en action trois types de raisonnements :

1) L'expérience ou **(phase d'induction)**, dont le but est de donner une conjecture robuste (le minimum est atteint en H). Dans cette phase, l'utilité de Cabri est évidente

2) La seconde phase est ce que Pierce appelle **l'abduction** [13]. Elle consiste à proposer des affirmations intermédiaires qui impliqueraient logiquement la conjecture : ici, on a d'abord MN/AP constant, puis $MN/AP = \sin \widehat{A}$. Dans cette phase aussi, Cabri est essentiel, au moins pour une raison psychologique : on est sûr que la conjecture produite est à la fois juste et pertinente, ce qui est un encouragement fort pour la prouver.

3) Enfin, la dernière assertion : **phase déductive**. Dans cette dernière phase, le logiciel n'intervient plus, *a priori*. En ce qui me concerne, j'ai eu tout de suite l'idée de la preuve de la dernière conjecture et je ne vais pas faire semblant d'avoir utilisé des explorations supplémentaires. Cependant, je conseille au lecteur de faire vraiment l'exercice, sans regarder les indications de la note ci-dessous. Il s'apercevra peut-être, selon son degré de familiarité avec la géométrie de nos pères, qu'il a encore besoin d'une petite abduction supplémentaire, pour laquelle Cabri pourra être encore utile.

7.3 Discussion

Il est clair qu'on peut faire de la géométrie sans Cabri et les anciens ne s'en sont pas privé. De la même manière, on peut sans doute aller de Paris à Vladivostock à pied !

Cependant, l'intérêt de Cabri, dans la phase de recherche d'une preuve, c'est, comme on l'a vu, de confirmer ou d'infirmer **immédiatement** les

12. Au besoin je lui souffle deux indications : le quadrilatère $AMPN$ est inscriptible, donc justiciable de Ptolémée et $\sin \widehat{A}$ peut se calculer avec une formule d'addition.

13. Comme monsieur Jourdain j'ai pratiqué longtemps l'abduction sans le savoir !

hypothèses intermédiaires que l'on peut formuler. C'est un gain de temps évident, mais aussi un gain psychologique, car il n'y a plus place pour le doute sur le résultat que l'on doit prouver. Encore une fois, lorsqu'on travaille au voisinage de son niveau d'incompétence, ce qui est le cas pour un chercheur dans la phase où les résultats ne sont pas acquis, c'est un atout considérable de savoir que le résultat qu'on cherche est vrai [14].

8 Cabri pour poser des problèmes

De la même manière que l'usage de la règle et du compas a posé de nombreux problèmes aux mathématiciens, l'emploi d'un logiciel comme Cabri pose de nombreuses questions mathématiques, dont certaines ne sont pas immédiates.

Je n'étudierai ici qu'un type d'exemple, auquel j'ai souvent été confronté ces derniers temps [15] et il concerne les coniques. Le point de départ est l'existence d'une macro de Cabri qui construit l'unique conique passant par cinq points en position générale. En fait, par rapport à la pratique des coniques de nos pères, cela a pour effet de tirer le domaine du côté de la géométrie projective.

8.1 Cabri et les coniques 1 : construire une conique par points et tangentes

Il y a une seule conique passant par 5 points généraux. De même, on s'attend à ce qu'il y ait une seule conique (ou au moins un nombre fini) passant par 4 points donnés et tangente à une droite donnée, voire passant par trois points et tangente à deux droites, ou encore tangente à cinq droites. La question est de produire une construction et de créer une macro de Cabri qui l'effectue, de manière robuste. Ce n'est pas très difficile, voir [Perrin] Partie III Chapitre 4, exercices 4.6.1 et suivants.

8.2 Cabri et les coniques 2 : construire les tangentes à une conique

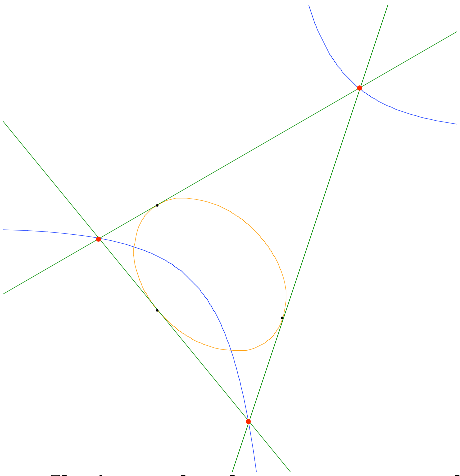
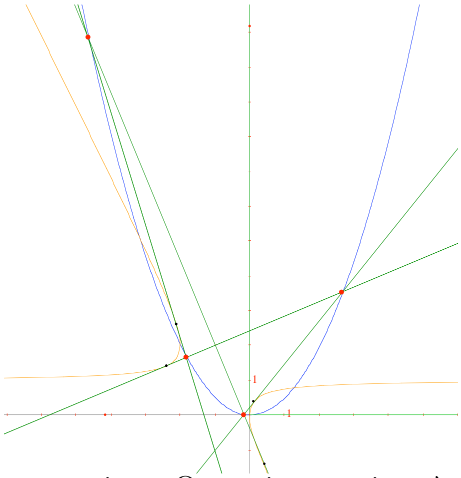
Lorsqu'on a une conique C, obtenue par exemple à partir de cinq points, on peut vouloir tracer la tangente en un point de C, voire les tangentes à

14. Bien entendu ça ne suffit pas : je suis totalement convaincu que l'hypothèse de Goldbach est vraie, mais je n'ai aucune idée pour la prouver.

15. Voir la partie III de [Perrin] sur mon site web.

C issues d'un point extérieur. Là encore la réponse n'est pas très difficile [16], voir [Perrin] Partie III 3.1.10 et 2.3.12.

8.3 Cabri et les coniques 3 : construire des lignes de Poncelet

Il s'agit des lignes inscrites dans une conique Ω et circonscrites à une conique C. Il n'y a pas de difficulté à construire de telles lignes. Le problème est d'en construire qui se referment au bout de 3, 4, ..., n coups.

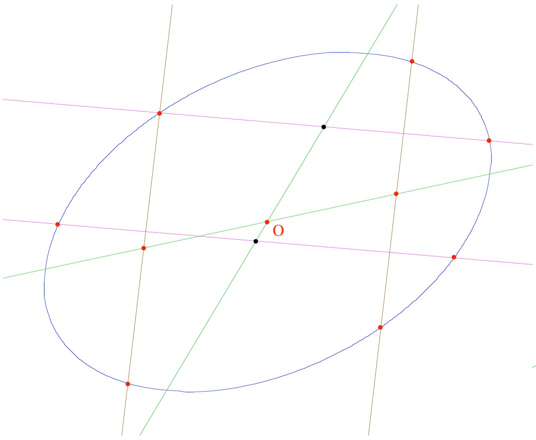
Là, il faut vraiment faire des mathématiques, voir [Perrin] Partie III, chapitre 4.

8.4 Cabri et les coniques 4 : le problème de Claire

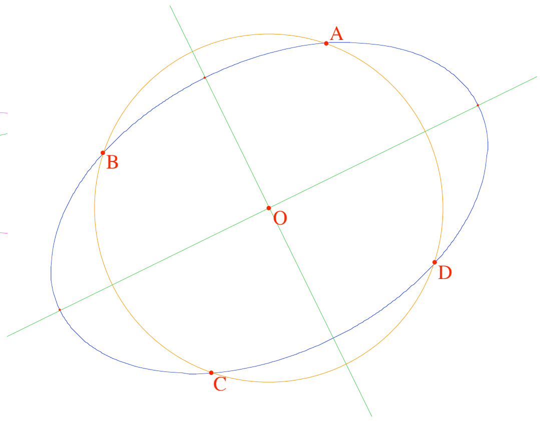
La dernière question m'a été posée par la fille d'une collègue, élève de sixième, à qui son professeur avait demandé de tracer les axes de symétrie d'une ellipse et qui ne se satisfaisait pas d'une construction "à l'œil" (bon sang ne saurait mentir !).

C'est une question que l'on rencontre très naturellement quand on utilise la macro "conique" de Cabri. La solution n'est pas très difficile ...

16. La recette pour le premier cas est le théorème de Pascal, pour le second c'est la polaire.



Construction du centre
de l'ellipse



Construction des axes

9 Conclusion : Il faut cultiver notre jardin

Que l'on utilise ou non les logiciels de géométrie, ce qui importe, au fond, c'est de faire de la géométrie, comme le dit Alain Connes :

J'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant sur un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.

Vu l'érosion des programmes de géométrie ces dernières années et celle qu'on nous prépare, j'ai bien peur qu'au lycée, cela soit de plus en plus difficile ...

10 Références

[Froger] FROGER M. (2006) *Initier à la démarche scientifique en classe de 5e à l'aide des problèmes ouverts*, Mémoire PLC2, IUFM de Versailles.

[ME] PERRIN D. (2005) *Mathématiques d'École*, Cassini.

[Perrin] PERRIN D. *Géométrie projective et applications aux géométries non euclidiennes et euclidienne* En préparation, voir http ://www.math.u-psud.fr/~perrin/

[Sauter] SAUTER M. (2000) *Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège*, Repères IREM, 39, p. 7-20.