

Transformations : groupes, transitivité, invariants

Daniel PERRIN

Table des matières

1	Groupes et transitivité	2
1.1	Retour aux sources : Euclide	2
1.2	Groupes et géométrie : le programme d'Erlangen	4
1.3	La transitivité	6
1.4	Applications de la transitivité	10
2	L'ellipse de Steiner	14
2.1	Pourquoi y a-t-il un problème ?	14
2.2	L'existence	15
2.3	L'unicité	15
2.4	Construction de l'ellipse de Steiner	17
2.5	Steiner généralisé	18
3	Quotients et invariants	22
3.1	Transitivité et orbites	23
3.2	L'exemple des triangles	25
3.3	Une autre source de théorèmes : les relations	28
4	Annexes	32
4.1	Un théorème de Poncelet	32
4.2	Les quadrilatères	34

Introduction

Je remercie les organisateurs de la journée *Maths Monde* de m'avoir invité à faire cette conférence. Je les remercie, mais en réalité, dans un premier temps, j'ai eu deux réticences.

1) Tout d'abord, faire un exposé en mettant en avant les transformations me met un peu en porte à faux car je préconise, depuis longtemps, d'utiliser plutôt, notamment au collège, les cas d'égalité, à la fois pour des raisons mathématiques, qui vont apparaître dans ce qui suit, mais aussi, mais surtout, pour des raisons didactiques pour lesquelles je renverrai à la récente brochure [6] écrite par le groupe géométrie de l'IREM de Paris.

2) Ensuite, sur l'aspect mathématique, mon exposé reprendra mes obsessions habituelles (Erlangen, transitivité, invariants, etc.) et j'ai la désagréable impression d'avoir déjà raconté tout ça cent fois et de radoter. J'espère simplement que certains d'entre vous y ont échappé et, pour les autres, je vais essayer de varier un peu mes exemples.

1 Groupes et transitivité

1.1 Retour aux sources : Euclide

Avant de parler de groupes de transformations et de transitivité, je voudrais expliquer pourquoi ces notions me semblent déjà en germe dans les éléments d'Euclide et précisément dans la preuve du premier cas d'égalité des triangles (Livre 1, proposition 4) :

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

Voici, recopiée intégralement, aux notations près, la preuve d'Euclide (voir figure 1) :

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Je dis qu'il est aussi $BC = B'C'$ et que ces triangles sont égaux¹ et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi : $BC = B'C'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

En effet, si l'on appliquait le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$ de manière à faire coïncider d'abord les points A et A' , puis les côtés AB et

1. Sans doute Euclide entend-il ici : ont même aire.

$A'B'$, le point B coïnciderait avec B' , car $AB = A'B'$. Les côtés AC et $A'C'$ coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, de sorte que le point C à son tour coïnciderait avec C' , car $AC = A'C'$. D'autre part, les points B et B' ayant déjà coïncidé, les côtés BC et $B'C'$ coïncideront aussi ... Nécessairement donc les côtés BC et $B'C'$ coïncideront et ils seront égaux.

Par conséquent, le triangle ABC tout entier coïncidera avec le triangle $A'B'C'$ tout entier et il lui sera égal, et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux, à savoir : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

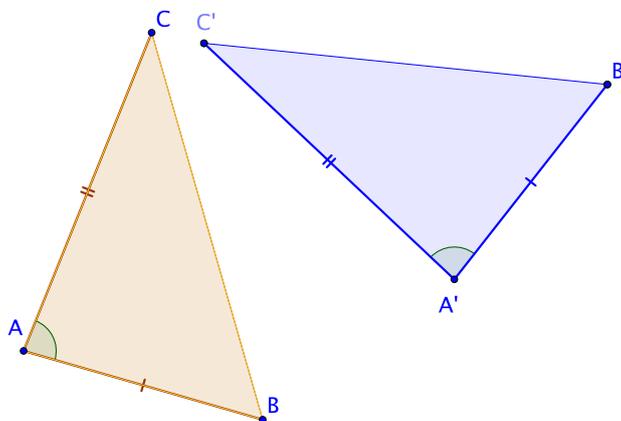


FIGURE 1 – Le premier cas d'égalité

Cette “preuve”, qui utilise la méthode dite de superposition, est celle que l'on donnait autrefois en classe de cinquième et elle convainquait la plupart des élèves. Cependant, le mathématicien attentif y décèle évidemment un point faible : que signifie le fait d'*appliquer*² le triangle ABC sur $A'B'C'$ ³ ?

Cette faille dans Euclide a été notée dès 1557 par Jacques Peletier et, en tous cas, David Hilbert, quand il a entrepris la refonte de l'œuvre d'Euclide, en était parfaitement conscient. La solution qu'il a adoptée est de prendre le premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus. C'est une solution correcte, mais trop brutale à mon goût.

2. On notera que le mot utilisé ici (et qui semble admis par tous les traducteurs) est celui qui sera retenu dans le langage moderne.

3. Il y a beaucoup d'autres zones d'ombre dans cette démonstration. Par exemple, lorsqu'Euclide parle de faire coïncider les côtés, il pense sans doute aux demi-droites qui les portent, mais il faut aussi faire attention aux demi-plans. En particulier, Euclide n'envisage pas le cas où les triangles sont échangés par une isométrie négative.

Je serais plutôt en faveur d'une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition. Ce qui est nécessaire pour cela est de donner un sens à l'opération consistant à appliquer ou transporter une demi-droite sur une autre, propriété qui manifeste l'**homogénéité** du plan. Avec nos connaissances actuelles, on sent bien que derrière cela il y a la nécessité de la présence d'un **groupe** de transformations. Précisément, je propose de postuler qu'il existe un tel groupe qui opère **transitivement**⁴ sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par cette demi-droite)⁵. Un groupe qui opère transitivement sur un ensemble : on est au cœur de notre sujet.

1.2 Groupes et géométrie : le programme d'Erlangen

Le programme d'Erlangen est la thèse de Felix Klein, soutenue en 1872 dans cette ville. Il affirme qu'une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X , autrement dit d'un groupe G opérant sur X . Par exemple, ce groupe est celui des isométries (translations, rotations, symétries axiales, ...) pour la géométrie euclidienne, ou des transformations affines (affinités, transvections, symétries obliques, ...) pour la géométrie du même nom, ou encore des homographies (les applications qui conservent l'alignement et que l'on peut voir comme composées de projections centrales) pour la géométrie projective.

Ce souci d'unification, qui fait suite à l'explosion des géométries du XIX^{ième} siècle (géométries projective, anallagmatique, non euclidiennes, etc.), permet d'abord de **classifier** les propriétés géométriques selon le groupe qui les laisse invariantes, ainsi que le dit Klein : *étant donné une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe* (voir [7] p.7).

Par exemple, les homographies conservent les **propriétés projectives** : concours, alignement, et birapport, les transformations affines conservent en outre les **propriétés affines** : parallélisme, rapports de mesures algébriques sur une même droite (tout ce qui se formule avec des vecteurs mais sans produit scalaire), rapports d'aires⁶ et les isométries conservent en outre les **propriétés métriques** : longueurs et angles.

Ainsi, pour citer trois résultats célèbres, le théorème de Pappus⁷, qui

4. Rappelons qu'un groupe G qui opère sur un ensemble X est dit **transitif** si pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$.

5. Voir [18] un jour peut-être.

6. Cela résulte du fait que les aires peuvent être définies à l'aide de déterminants.

7. Voir Figure 2. Les points A, B, C et A', B', C' sont alignés, les droites (BC') et (CB')

n'emploie que les notions de concours et d'alignement, est un théorème projectif, tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une **niche écologique privilégiée**, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et, souvent, où il se démontre avec le plus de facilité.

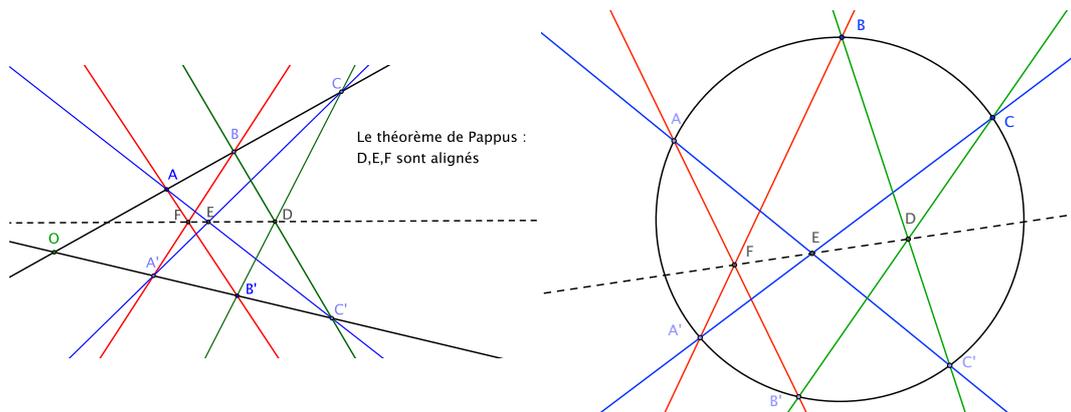


FIGURE 2 – Les théorèmes de Pappus et de Pascal (D, E, F sont alignés)

C'est particulièrement clair sur l'exemple du théorème de Pascal qui peut s'énoncer avec un cercle et se démontrer en utilisant le théorème de l'angle inscrit (ce serait donc un théorème euclidien ?). Pourtant, ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité puisqu'il vaut aussi pour une ellipse (ce serait donc un théorème affine ?). Mais il vaut aussi pour une parabole ou une hyperbole (finalement c'est un théorème projectif !). C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'il est le plus facile à prouver ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est ici débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles. On peut soit utiliser **l'invariant** fondamental associé à une conique projective : le birapport, soit prouver le résultat dans le cas euclidien et utiliser un argument de **transitivité** pour passer au cas général : il existe une homographie qui transforme un cercle en une conique quelconque. (Cette méthode est essentiellement celle de Pascal). Sur ce sujet on consultera au besoin :

<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Perrin-Pascal.pdf>

se coupent en D , (CA') et (AC') en E , (AB') et (BA') en F . Alors D, E, F sont alignés. Pour Pascal, A, B, C, A', B', C' sont sur un cercle mais la suite est identique.

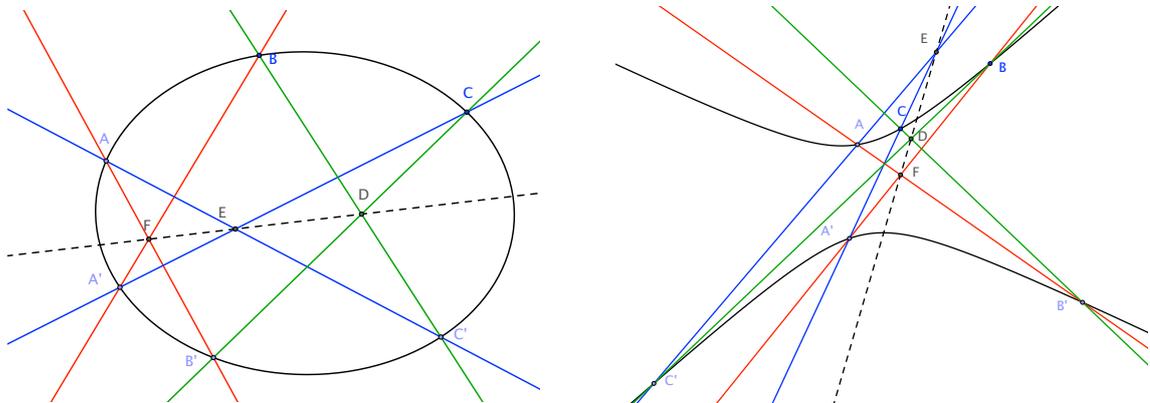


FIGURE 3 – Le théorème de Pascal (suite)

1.3 La transitivité

Rappelons qu'un groupe G qui opère sur un ensemble X est dit **transitif**⁸ si pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$.

1.3.1 Le principe de Poncelet

Nous donnons maintenant le principe permettant d'utiliser les résultats de transitivité pour démontrer des propriétés. La situation est la suivante.

On suppose qu'un groupe G opère sur un ensemble X . On veut montrer une propriété d'un objet x quelconque de X . On suppose :

- 1) que la propriété est conservée par G ,
- 2) que G est transitif sur X .

Alors il suffit de montrer la propriété pour un objet x_0 particulier.

Pour mettre en œuvre ce principe, on imposera en général à l'objet x_0 une condition supplémentaire. Ainsi, dans le cas de la géométrie affine, on imposera une propriété euclidienne qui fournira plus d'outils pour montrer la propriété cherchée : on demandera à un triangle d'être équilatéral, à un parallélogramme d'être un carré, à une ellipse d'être un cercle.

Dans cette optique, l'intérêt d'un résultat de transitivité général, s'agissant de propriétés d'une figure, c'est qu'on n'a pas besoin de savoir quelle est

8. La transitivité est une notion universelle. Je vais en donner quelques exemples dans le cadre géométrique, mais elle intervient aussi dans des questions aussi diverses que l'impossibilité de la résolution par radicaux des équations de degré ≥ 5 (triple transitivité du groupe alterné) ou la classification des suites récurrentes homogènes (double transitivité du groupe des homographies).

la transformation⁹ qui réalise la transitivité. Par exemple, on pourra transformer un triangle en triangle équilatéral, et peu importe comment.

Poncelet, qui est sans doute le premier à avoir théorisé¹⁰ cette méthode, explique comment montrer une propriété projective en se ramenant à un cas particulier (par exemple, pour le théorème de Pascal, au cas où la conique est un cercle) :

Une figure étant donnée, si l'on veut rechercher quelles sont les propriétés de position dont elle jouit, on examinera si elle peut être projetée suivant une figure plus simple ; si cela a lieu, on cessera de s'occuper de la première figure et on recherchera seulement, sur sa projection plus simple, les propriétés que l'on avait particulièrement en vue ; car d'après ce qui précède, ces propriétés appartiendront aussi à la figure considérée d'abord.

1.3.2 Dimension

Une notion essentielle pour comprendre les propriétés de transitivité est celle de dimension. En effet, les ensembles et les groupes de la géométrie sont toujours des variétés (différentiables, algébriques, analytiques, peu importe) et ils ont donc une dimension¹¹. Par exemple, le plan est de dimension 2, les couples de points sont de dimension 4, les triangles de dimension 6, etc. Intuitivement, cette dimension est le nombre de paramètres dont dépendent les objets en question.

Un autre exemple est celui des coniques (disons affines). Elles ont des équations de la forme $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ avec a, b, c non tous nuls. Elles dépendent de six coefficients, donc correspondent à un point de \mathbf{R}^6 (voire k^6 si l'on travaille sur un corps quelconque), mais comme les coefficients sont définis à un scalaire multiplicatif près, l'espace des coniques est de dimension 5 (c'est un ouvert de l'espace projectif $\mathbf{P}^5(\mathbf{R})$).

Les choses sont un peu plus compliquées pour les groupes et nous aurons besoin de garder en tête un résultat assez général :

1.1 Théorème. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse de variétés irréductibles. On suppose que toutes les fibres sont de même dimension. Alors on a $\dim X = \dim S + \dim f^{-1}(s)$ pour tout $s \in S$.*

9. Un bémol : dans les problèmes de constructions on aura parfois besoin d'explicitement cette transformation, voir par exemple, ci-dessous, la construction des tangentes à l'ellipse ou des cercles tangents à trois cercles donnés.

10. Que Pascal avait utilisée avant lui.

11. Bien entendu il s'agit d'une notion plus générale que celle de dimension des espaces vectoriels, par exemple une sphère est de dimension 2, etc., le lien entre les deux notions se faisant à l'aide des espaces tangents.

Cette propriété est très intuitive et c'est l'analogie dans le cadre des variétés du théorème noyau-image. Pour une démonstration, voir par exemple la proposition 2.20 de :

https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf

Dans le cas des groupes on en déduit deux corollaires :

1.2 Corollaire. *Soit G un groupe de Lie et N un sous-groupe distingué. On a la formule $\dim G = \dim N + \dim G/N$.*

1.3 Corollaire. *Soit G un groupe de Lie connexe opérant sur une variété X connexe, on note X/G le quotient et $S(x)$ le stabilisateur de x . Alors on a la formule $\dim X/G = \dim X - \dim G + \dim S(x)$.*

Le corollaire 1.2 permet de montrer que le groupe des déplacements du plan est de dimension 3. En effet, il admet comme sous-groupe distingué le sous-groupe des translations qui est isomorphe à \mathbf{R}^2 , donc est de dimension 2, avec comme quotient le groupe des rotations vectorielles $O^+(2, \mathbf{R})$ qui est isomorphe au cercle, via l'application qui à une rotation associe son angle, donc est de dimension 1. On peut d'ailleurs sans crainte énoncer cette propriété en comptant les paramètres dont dépendent les déplacements (2 pour la translation, le vecteur, 1 pour la rotation, l'angle).

On en déduit que le groupe des isométries du plan est aussi de dimension 3 (il est formé de deux composantes homéomorphes), puis que le groupe des similitudes est de dimension 4 (le quotient des similitudes par les isométries est isomorphe à \mathbf{R}^* via le rapport de similitude).

On montre de la même manière que le groupe affine est de dimension ¹² 6 (2 pour les translations et 4 pour le quotient qui est isomorphe à $GL(2, \mathbf{R})$). Enfin, le groupe des homographies est de dimension 8 car c'est le quotient de $GL(3, \mathbf{R})$ qui est de dimension 9 par les homothéties vectorielles (qui sont de dimension 1).

1.3.3 Transitivité et dimension

La notion de dimension permet de tempérer les espoirs concernant la transitivité. En effet, si un groupe G de dimension d opère sur un ensemble X de dimension n , cela implique que pour x_0 quelconque dans X , l'application de G dans X qui à g associe $g.x_0$ est surjective. En vertu du théorème 1.1, on a donc $n \leq d$. Cela interdit d'espérer qu'un groupe soit transitif sur

12. On peut aussi le voir en les écrivant de manière analytique : à (x, y) on associe $(ax + by + e, cx + dy + f)$ avec $ad - bc \neq 0$, donc on a six coefficients et ce type de calcul vaut aussi pour les similitudes et les isométries.

un ensemble de dimension plus grande que lui, par exemple le groupe des isométries du plan (dimension 3) sur les couples de points du plan (dimension 4) ou les triangles (dimension 6). Le groupe des similitudes (dimension 4) peut être transitif sur les couples de points (et il l'est) mais pas sur les triangles.

Si l'on a $\dim G \geq \dim X$ on peut espérer la transitivité, avec deux bémols.

- S'il y a des stabilisateurs, le corollaire 1.3 montre qu'il faut y faire attention¹³. Ainsi, si G est le groupe des isométries du plan et X l'espace des cercles (qui est de dimension 3, 2 pour le centre, 1 pour le rayon), bien que G soit de la bonne dimension, il n'est pas transitif (par une isométrie on ne peut envoyer un cercle que sur un cercle de même rayon). C'est parce que le stabilisateur d'un cercle n'est pas trivial, c'est le groupe des rotations autour du centre (qui est de dimension 1). Dans la formule $\dim X/G = \dim X - \dim G + \dim S(x)$ on a $\dim G = \dim X = 3$ et $\dim S(x) = 1$, donc $\dim X/G = 1$, les cercles forment une famille de dimension 1 modulo isométrie, repérée par le rayon.

- Il peut y avoir d'autres phénomènes. Ainsi quand on regarde le groupe affine du plan (dimension 6) agissant sur les coniques affines propres (dimension 5), on a des stabilisateurs de dimension 1 (pour une ellipse, par exemple, on se ramène au cas du cercle) mais le groupe n'est cependant pas transitif sur toutes les coniques affines propres (il y a trois orbites : ellipses, paraboles, hyperboles). Là, il existe un autre invariant qui sépare ces orbites : le nombre de points à l'infini.

1.3.4 Quelques résultats de transitivité

Nous utiliserons essentiellement les résultats suivants :

1.4 Proposition. *Le groupe affine du plan est transitif :*

- 1) sur les triangles,
- 2) sur les parallélogrammes,
- 3) sur les ellipses.

Démonstration. 1) Soient ABC et DEF deux triangles. On effectue d'abord la translation de vecteur \overrightarrow{AD} . Elle envoie A en D , B en E' et C en F' . L'application affine qui fixe D et dont l'application linéaire associée envoie la base $(\overrightarrow{DE'}, \overrightarrow{DF'})$ sur $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF})$ finit le travail.

On voit qu'on n'a pas besoin d'explicitier l'application qui envoie un triangle sur l'autre, mais si on le souhaite, on peut décomposer cette transfor-

13. C'est moral, avoir des gros stabilisateurs c'est utiliser de la dimension du groupe pour fixer un élément et c'est autant de perdu pour atteindre les autres.

mation en effectuant successivement une translation, une rotation, une homothétie, une transvection et une affinité. Voir la figure `transtriangles.ggb`.

2) C'est évident car un parallélogramme s'obtient par symétrie centrale à partir d'un triangle.

3) Il suffit de montrer qu'une ellipse peut être transformée en un cercle Γ fixé. Toute ellipse admet une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans une base orthonormée. L'affinité orthogonale d'axe Ox , de direction Oy et de rapport a/b , de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a/b \end{pmatrix}$ la transforme en le cercle Γ' de centre O et de rayon a . On passe alors de Γ' à Γ par une similitude.

1.5 Scolie. *Cette proposition, jointe au principe de Poncelet, voir 1.3.1, a la conséquence suivante :*

Pour montrer une propriété affine d'un triangle (resp. un parallélogramme, resp. une ellipse) on peut supposer qu'il s'agit d'un triangle équilatéral (resp. un carré, resp. un cercle).

Du côté projectif nous aurons besoin des résultats suivants :

1.6 Proposition. *Le groupe des homographies du plan opère transitivement sur les quadruplets de points en position générale et sur les coniques propres.*

Démonstration. Pour une preuve, voir respectivement [9] et [11].

1.4 Applications de la transitivité

1.4.1 Triangles, quadrilatères, cercles

- Voici une première application très simple du principe de Poncelet. On suppose qu'on sait (c'est très facile) que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. On en déduit le cas des médianes (plus difficile) :

1.7 Proposition. *Les médianes d'un triangle sont concourantes.*

Démonstration. La propriété est affine¹⁴, de sorte qu'on peut supposer le triangle équilatéral. Mais alors, les médianes sont aussi les médiatrices et on a le résultat.

- Le deuxième exemple est une question élémentaire sur les aires, proposée dans un document d'accompagnement des programmes de seconde du début des années 2000.

14. Attention, le fait d'être un milieu est une propriété affine (car A' milieu de $[BC]$ s'écrit vectoriellement $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{A'C}$), mais le fait pour M d'être équidistant de B et C est une propriété euclidienne.

1.8 Question. Soit $ABCD$ un parallélogramme et E un point intérieur. À quelle condition les aires de EAB et EBC sont-elles égales ?

Démonstration. C'est un problème affine. On peut donc supposer que le parallélogramme est un carré. Dans ce cas, on calcule les aires avec la formule $base \times hauteur/2$, on a $\mathcal{A}(ABE) = \frac{1}{2}AB \times EH$ et $\mathcal{A}(BCE) = \frac{1}{2}BC \times EK$ et comme $AB = BC$, la condition est $EH = EK$, donc E équidistant des côtés, donc sur la bissectrice de l'angle en B . Ah, attention, la bissectrice n'est pas une notion affine, on ne peut donc transposer cette propriété au parallélogramme. Mais ici, la bissectrice est la diagonale $[BD]$ et c'est cette diagonale qui est le lieu cherché.

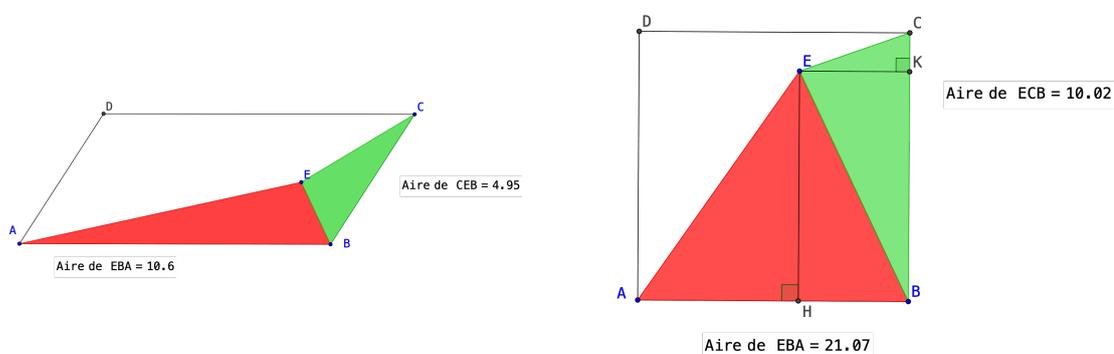


FIGURE 4 –

Commentaire. Bien entendu, il ne s'agit pas de proposer cette preuve à un élève de seconde, mais le maître qui a compris le principe de Poncelet dispose ici d'un temps d'avance sur les élèves puisqu'il aura immédiatement trouvé le résultat cherché. Il devra ensuite imaginer une preuve accessible à des élèves. Ce n'est pas difficile pourvu qu'il dispose des outils adaptés (les "lemmes du collège" au sens de [17], lemme du demi-parallélogramme et de la médiane, donnent facilement le résultat).

- Un exemple très convaincant de cette méthode, qui relève de la géométrie projective, est ce que j'appelle le théorème à quatre points, théorème qui apparaît quand effectue la construction la plus simple possible à partir de quatre points du plan.

1.9 Proposition. Soient A, B, C, M quatre points du plan, en position générale (c'est-à-dire que trois quelconques ne sont pas alignés). On appelle D, E, F les intersections de (BC) et (MA) , (CA) et (MB) et (AB) et (MC) respectivement. Les droites (EF) , (FD) et (DE) coupent respectivement (BC) , (CA) et (AB) en U, V et W . Alors, U, V, W sont alignés.

Démonstration. Le résultat est clairement projectif. Or, on peut par une homographie transformer quatre points en position générale en quatre autres. Ici, on impose pour cela une structure affine sur le plan projectif en choisissant une droite à l'infini et on envoie A, B, C, M sur A, B, C, G où G est le centre de gravité de ABC . Les droites (AG) , etc. sont alors les médianes du triangle ABC et les points D, E, F sont les milieux des côtés. Les droites (EF) , (FD) et (DE) sont alors les "droites des milieux" du triangle et on sait qu'elles sont parallèles aux côtés, de sorte que U, V, W sont alignés ... sur la droite de l'infini !

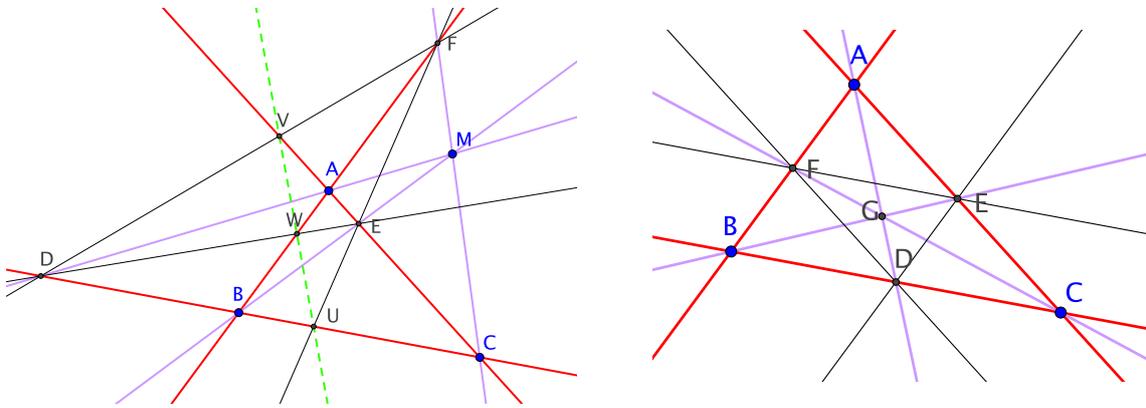


FIGURE 5 –

Nous reverrons cet exemple à propos de la conique de Steiner.

- Un dernier exemple relève de la géométrie anallagmatique (la géométrie de l'inversion). Il permet de construire les cercles tangents à trois cercles donnés en transformant certains cercles en droites par inversion. Un cas très simple est celui de trois cercles admettant un point commun O . En effet, par une inversion de pôle O , on peut transformer ces cercles en trois droites et il y a alors quatre cercles tangents à ces droites, les cercles inscrits et exinscrits au triangle qu'elles définissent. Il suffit alors de faire l'inversion en sens inverse pour obtenir les cercles tangents aux cercles initiaux. La méthode fonctionne encore avec trois cercles deux à deux sécants¹⁵ en transformant deux en droites. On obtient huit cercles tangents, voir [3] ou [13].

¹⁵. Dans le cas de cercles extérieurs, on utilise un autre résultat de transitivité : le fait qu'on peut transformer deux cercles non sécants en cercles concentriques.

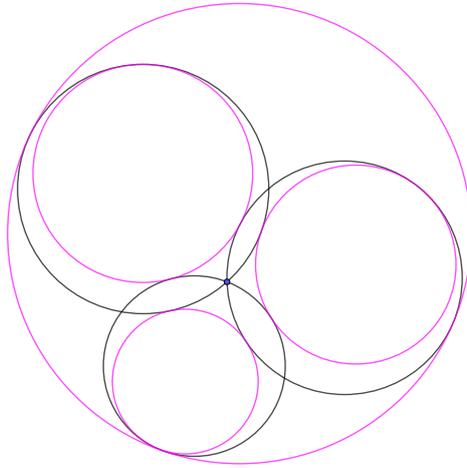


FIGURE 6 – Le cas des cercles (noirs) avec un point commun

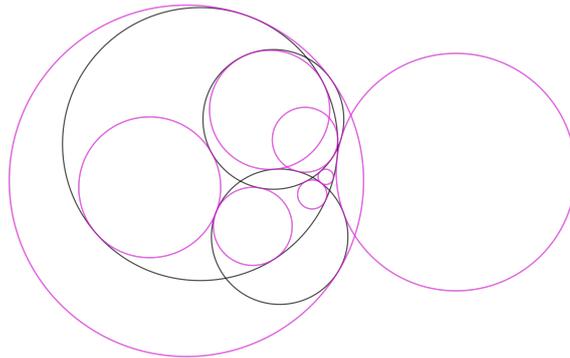


FIGURE 7 – Le cas des cercles (noirs) sécants

1.4.2 Coniques

Voici deux applications de la transitivité aux coniques. La première est un exemple dans lequel il est important de connaître la transformation qui fait le travail. En revanche, dans la seconde, on s'en moque.

- Soit E une ellipse et Γ son cercle principal de centre O et de rayon a (voir figure 8). On considère l'affinité orthogonale d'axe (OA) (le grand axe de l'ellipse) qui transforme Γ en E . Les tangentes (dans le cas de l'ellipse) sont caractérisées comme les droites qui la coupent en un unique point et cette propriété se conserve par toute bijection, notamment par affinité. Pour construire la tangente en M' à l'ellipse on construit celle en M au cercle principal, qui coupe le grand axe de E en T , et son image $(M'T)$ est la

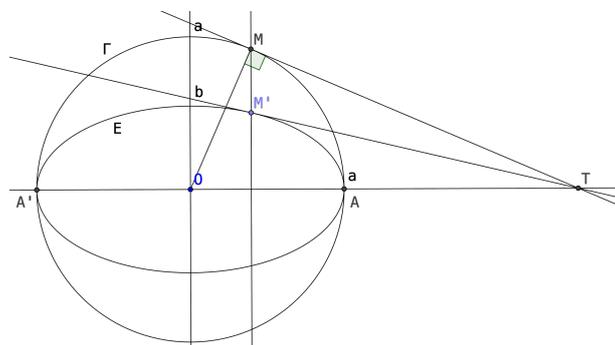


FIGURE 8 – La tangente à l'ellipse

tangente cherchée.

- Le théorème de Pascal. Voir ci-dessus pour un énoncé et des figures. C'est un théorème projectif, il suffit de le montrer dans le cas du cercle, ce qu'on fait en utilisant le théorème de l'angle inscrit.

Pour des détails, voir ma conférence IREM de 2004 :

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/Perrin-Pascal.pdf>

2 L'ellipse de Steiner

C'est un très bel exemple d'utilisation de la transitivité. Il s'agit du résultat suivant :

2.1 Théorème. *Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine réel et D, E, F les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectivement. Alors, il existe une unique ellipse¹⁶ Γ (dite de Steiner) tangente à (BC) , (CA) , (AB) en D, E, F .*

2.1 Pourquoi y a-t-il un problème ?

On considère l'espace des ellipses. Il est de dimension 5 car elles sont données par des équations :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

16. Si le plan est muni d'une structure euclidienne, qu'on l'identifie au plan complexe \mathbf{C} , et si A, B, C correspondent aux complexes a, b, c , on montre que les foyers de Γ correspondent aux racines de la dérivée de $P(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$. Par ailleurs, on peut aussi montrer que l'ellipse de Steiner est d'aire maximale parmi celles contenues dans le triangle, voir [5].

avec $b^2 - 4ac < 0$, les coefficients (non tous nuls) étant définis à un scalaire près.

Quand on impose à une telle conique de passer par un point on a une relation linéaire homogène entre les coefficients. En effet, on peut supposer¹⁷ que le point est $(0, 0)$ et on a la relation $f = 0$.

Quand on lui impose de passer par un point et d'y être tangente à une droite, on a deux relations linéaires homogènes entre les coefficients. En effet, on peut supposer¹⁸ que le point est $(0, 0)$ et la droite $y = 0$. Les intersections sont données par l'équation $ax^2 + dx + f = 0$ et il faut que $x = 0$ soit racine double ce qui impose $d = f = 0$.

Quand on prend ainsi trois couples (point, droite passant par ce point) et qu'on impose à l'ellipse d'y être tangente, on obtient 6 équations linéaires homogènes, dont la seule solution est, en général, $a = \dots = f = 0$ qui ne correspond pas à une ellipse¹⁹. L'existence d'une conique tangente à trois droites en trois points n'est donc pas évidente.

2.2 L'existence

Les propriétés considérées ici : être une ellipse, être tangente à une droite, être un milieu sont toutes affines. Pour montrer l'existence de l'ellipse de Steiner on peut appliquer le principe de Poncelet et se ramener au cas d'un triangle équilatéral. Mais là, le résultat est évident car l'ellipse cherchée est le cercle inscrit dans le triangle. En effet, dans un triangle équilatéral il y a identité entre médianes, bissectrices et hauteurs. Soit G leur point de concours et Γ le cercle de centre G passant par le milieu D de $[BC]$. La médiane (GD) étant aussi hauteur, le rayon est perpendiculaire à (BC) en D ce qui montre que Γ est tangent à (BC) en D et le raisonnement est identique en les deux autres milieux.

2.3 L'unicité

L'unicité est plus délicate et on en propose trois preuves.

2.3.1 La preuve par Bézout

Cette preuve est la plus simple, mais elle demande plus de connaissances.

17. Par transitivité!

18. Par transitivité!

19. Prendre, par exemple, les points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et les droites $y = \alpha x$, $x = 1$ et $y = 1$ avec $\alpha \neq -1$.

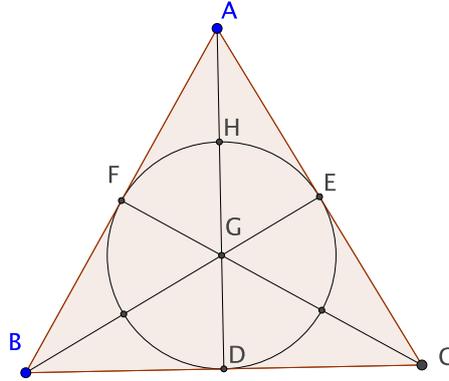


FIGURE 9 –

Si l'on a deux ellipses Γ et Γ' vérifiant les conditions de 2.1 elles sont égales en vertu du théorème de Bézout (voir [15] ou [11]) : l'intersection de deux coniques sans composante commune comporte au plus quatre points comptés avec multiplicités. Or, ici chaque point D, E, F étant un contact compte double, et le total des multiplicités est 6.

2.3.2 La preuve analytique

On choisit un repère affine de telle sorte qu'on ait $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 2)$, donc $D = (1, 1)$, $E = (0, 1)$ et $F = (1, 0)$. En écrivant que la conique Γ d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ passe par D, E, F et est tangente aux côtés (AB) et (AC) on trouve que l'équation, à un scalaire près, est $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, ce qui montre l'unicité. On vérifie que Γ est aussi tangente à (BC) , ce qui montre l'existence. (La forme $x^2 + xy + y^2$ étant définie positive, on a bien une ellipse.)

2.3.3 La preuve géométrique

Il suffit de montrer²⁰ le résultat dans le cas d'un triangle équilatéral ABC . Soit Γ une ellipse de Steiner pour ce triangle. Il suffit de montrer que Γ est un cercle (car le cercle inscrit est unique²¹) On la transforme en un cercle Γ' par une application affine u . Le triangle devient $A'B'C'$. Il suffit de montrer que $A'B'C'$ est équilatéral. En effet, l'application u est alors une similitude (il y a une similitude qui envoie ABC sur $A'B'C'$ et u est unique) donc aussi u^{-1} , ce qui montre que Γ est un cercle.

20. Merci à Philippe Caldero de m'avoir soufflé cette belle preuve, voir aussi [2].

21. Au fait, pourquoi ?

Montrons que $A'B'C'$ est équilatéral. Comme Γ' est tangent à $[B'C']$ en son milieu D' , son centre O' est sur la perpendiculaire à $(B'C')$ en D' , donc sur la médiatrice de $[B'C']$ et de même pour les autres côtés. C'est donc aussi le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$. On conclut par le lemme suivant :

2.2 Lemme. *Un triangle dont les centres des cercles inscrit et circonscrit coïncident est équilatéral.*

Démonstration. Si a est la moitié du côté BC du triangle et R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit, on a $a^2 = R^2 - r^2$ par Pythagore (fig. 10) et la même relation vaut pour les autres côtés, de sorte que tous sont égaux.

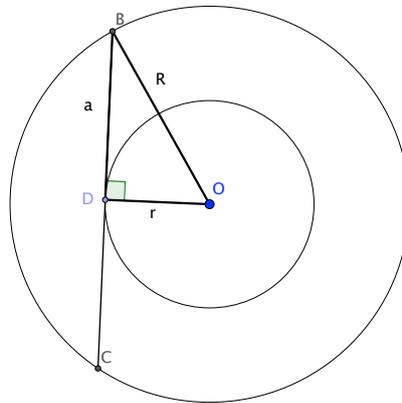


FIGURE 10 –

2.4 Construction de l'ellipse de Steiner

La construction de l'ellipse de Steiner n'est pas tout à fait évidente, même avec *GeoGebra* qui dispose d'un outil qui construit la conique passant par cinq points du plan²². Une méthode, peu orthodoxe, consiste à prendre les points D, E, F , ainsi que deux points $D' \in [BC]$ et $E' \in [CA]$, à construire la conique passant par D, E, F, D', E' et à rapprocher D' de D et E' de E , ce qui conduit à une ellipse visuellement satisfaisante. De plus, l'examen de la figure ainsi construite et des points d'intersection de l'ellipse avec les droites (AD) , (BE) , (CF) conduit à montrer le lemme suivant :

²². J'ignore comment procède GeoGebra. Une méthode plausible consiste à utiliser la macro lieu, jointe au théorème de Pascal. Quant à la macro lieu, je suppose qu'elle calcule point par point le lieu cherché.

2.3 Lemme. Soit ABC un triangle, D, E, F les milieux des côtés, G le centre de gravité et soit Γ l'ellipse de Steiner de ABC . Soient H, J, K les points où Γ recoupe les droites (AD) , (BE) , (CF) . Alors, H, J, K sont les milieux de $[AG]$, $[BG]$, $[CG]$.

Démonstration. Comme les propriétés sont affines on peut supposer ABC équilatéral. Dans ce cas, Γ est le cercle de centre G passant par D , on a $GD = GH$ et comme G est au tiers de $[AD]$, on a aussi $GH = HA$, voir Figure 9.

Avec ce lemme on construit Γ en prenant la conique passant par D, E, F, H, J, K voir figure 11.

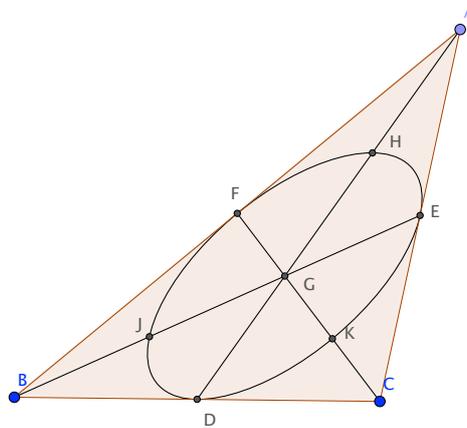


FIGURE 11 –

2.5 Steiner généralisé

Une question bien naturelle, une fois qu'on a compris qu'on ne pouvait pas, en général, trouver une conique tangente aux trois côtés d'un triangle en trois points prescrits est de se demander à quelle condition c'est possible. Une méthode pour trouver le résultat consiste encore à faire l'expérience avec GeoGebra. On prend D, E, F sur les côtés du triangle, puis $D' \in [BC]$ voisin de D et $E' \in [CA]$ voisin de E et la conique Γ passant par D, D', E, E' et F . On rapproche D' de D et E' de E , puis on ajuste F pour que Γ soit tangente à (AB) en F . La conjecture saute alors aux yeux : il faut que les droites (AD) , (BE) , (CF) soient concourantes. Une expérience supplémentaire montre que la propriété vaut aussi si les points D, E, F sont à l'extérieur des côtés (mais on peut alors obtenir une hyperbole ou une parabole). Il reste donc à prouver l'énoncé projectif suivant :

2.4 Théorème. Soit ABC un triangle du plan projectif et D, E, F des points distincts de A, B, C situés respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$. Il existe une (unique) conique propre Γ tangente à $(BC), (CA), (AB)$ en D, E, F si et seulement si les droites $(AD), (BE), (CF)$ sont concourantes.

2.5.1 Nécessité de la condition

Supposons d'abord l'existence de la conique. Quitte à effectuer une homographie, on peut supposer que Γ est un cercle et on est ramené à montrer le lemme suivant :

2.5 Lemme. Soit ABC un triangle, Γ un cercle tangent aux côtés de ABC et soient D, E, F les contacts de Γ . Alors, les droites $(AD), (BE), (CF)$ sont concourantes²³.

Démonstration. Rappelons que lorsqu'on a un cercle Γ , un point A extérieur, les tangentes issues de A sont de même longueur. Dans le cas du lemme, Γ est soit le cercle inscrit dans ABC , soit l'un des cercles exinscrits. Comme D, E, F sont les contacts avec les côtés, on a $AE = AF$, $BF = BD$ et $CD = CE$. On en déduit $\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = 1$ et, avec des mesures algébriques, on vérifie que le produit est égal à -1 dans tous les cas. On conclut par la réciproque du théorème de Ceva, voir par exemple [14].

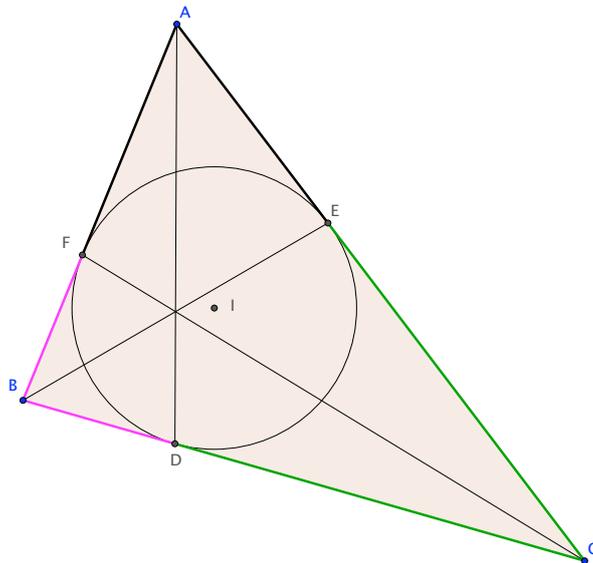


FIGURE 12 –

23. Dans le cas du cercle inscrit, le point de concours s'appelle point de Gergonne du triangle.

2.5.2 Existence

Réciproquement, supposons que les droites (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes en G . Il existe une homographie h envoyant A, B, C sur les sommets d'un triangle équilatéral et G sur le centre de ce triangle. Dans ce cas, les images de D, E, F sont les milieux des côtés du triangle équilatéral et la conique cherchée est l'image réciproque du cercle inscrit par h .

2.5.3 Unicité

Pour montrer l'unicité, le plus simple²⁴ est encore de faire le calcul (qui vaut sur n'importe quel corps) :

2.6 Théorème. *Soit ABC un triangle du plan projectif sur un corps k de caractéristique différente de 2 et D, E, F des points distincts de A, B, C situés respectivement sur les droites (BC) , (CA) , (AB) . Il existe une (unique) conique propre tangente à (BC) , (CA) , (AB) en D, E, F si et seulement si les droites (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes.*

Démonstration. On choisit comme repère²⁵ projectif D, E, F, A et on a donc $D = (1, 0, 0)$, $E = (0, 1, 0)$, $F = (0, 0, 1)$ et $A = (1, 1, 1)$. Les droites (AE) et (AF) ont pour équations $X = T$ et $X = Y$. L'unique conique projective passant par D, E, F et tangente à ces droites est $-YT + TX + XY$ et la tangente en D est la droite $Y + T = 0$. Si on a la propriété, les points B, C sont $B = (1, 1, -1)$ et $C = (1, -1, 1)$, les droites (AD) , (BE) et (CF) ont pour équations $Y - T, X + T, X + Y$ et elles concourent en $(-1, 1, 1)$. Inversement, on écrit $B = (1, 1, b)$ avec $b \neq 1$ et $C = (1, c, 1)$ avec $c \neq 1$. Le concours de (AD) , (BE) , (CF) donne $b = c$ et le fait que D soit sur (BC) donne $b = -1$ et (BC) est alors tangente en D à Γ .

2.5.4 Construction

Pour construire la conique de Steiner généralisée avec *GeoGebra* il faut être un peu plus savant. Il suffit encore de construire les points H et J (voir figure 14). On les obtient comme conjugués harmoniques, c'est-à-dire tels que les birapports $\llbracket A, P, D, H \rrbracket$ et $\llbracket B, Q, E, J \rrbracket$ soient égaux à -1 (les savants auront noté que (EF) est la polaire de A par rapport à l'ellipse, voir [16]). En effet, le birapport se conserve par homographie et il suffit donc de montrer qu'il vaut -1 dans le cas du cercle inscrit dans un triangle équilatéral. Dans ce cas D, E, F sont les milieux et sur la médiane-hauteur $[AD]$, H est au tiers

24. Ou d'attendre le paragraphe suivant (la construction).

25. Ici, on utilise la transitivité du groupe projectif sur les repères.

supérieur, P au milieu et G au tiers inférieur, de sorte qu'on a $\frac{\overline{HA}}{\overline{HP}} = -2$ et $\frac{\overline{DA}}{\overline{DP}} = -2$, donc $\llbracket A, P, D, H \rrbracket = -1$, voir figure 13 ci-dessous.

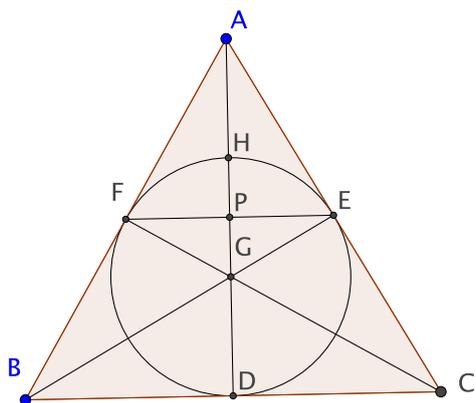


FIGURE 13 –

Pour réaliser la construction, le mieux est de fabriquer dans *GeoGebra* un outil “conjugué harmonique”. C’est facile en utilisant la propriété de la polaire. Voilà le résultat.

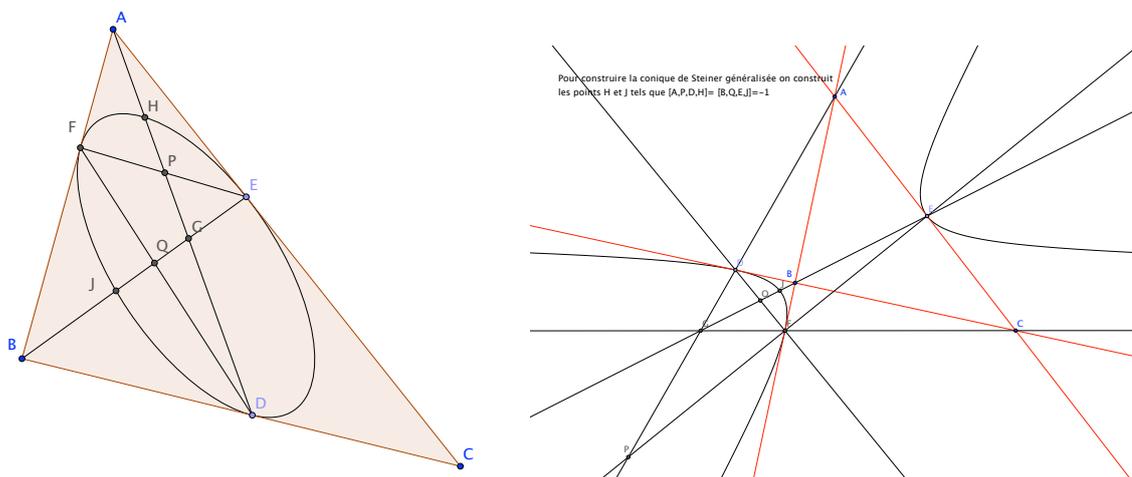


FIGURE 14 –

2.7 Remarques. 1) Dans le cas où les points D, E, F sont dans les segments $[BC], [CA], [AB]$, on vérifie que la conique est une ellipse, mais ce peut être une ellipse même si les points sont extérieurs, voir Figure 15.

2) On retrouve dans cette construction le résultat du théorème “à quatre points” rencontré plus haut. Ici, les points U, V, W intersections respectives de (BC) et (EF) , (CA) et (FD) , (AB) et (DE) sont alignés sur une droite qui n’est autre que la polaire de G par rapport à la conique Γ . En effet, il suffit de montrer que U , par exemple, est conjugué de G , donc que la polaire Δ de U passe par G . On note déjà que Δ passe par le point de contact D . Par ailleurs, la polaire de A est (EF) , qui passe par U , de sorte que Δ passe par A . On a donc $\Delta = (AD)$ et cette droite passe bien par G , voir Figure 16.

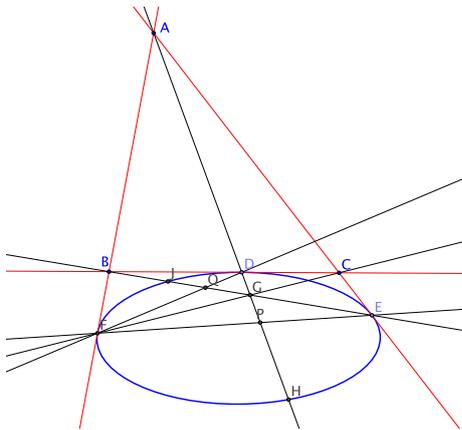


FIGURE 15 –

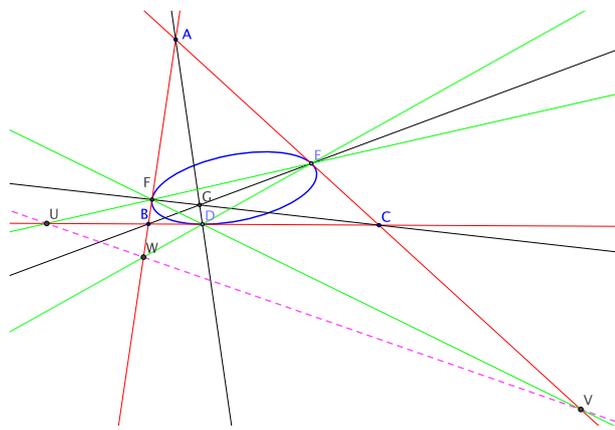


FIGURE 16 –

3 Quotients et invariants

Nous avons vu dans les paragraphes précédents tout l’intérêt que pouvait revêtir la notion de transitivité. Cependant, il ne faut pas espérer que cette propriété soit toujours vraie. En effet, si un groupe G opère sur un ensemble X il opère aussi sur X^2, X^3 , etc. et, même s’il est transitif sur X , il ne le sera évidemment plus sur X^n pour n assez grand pour une raison évidente de dimension. Ainsi, le groupe des isométries (dimension 3) est transitif sur le plan (dimension 2), mais ne l’est plus sur les couples de points du plan (dimension 4).

Cela étant, même si le groupe n’est pas transitif, il est important de mesurer ce qui l’empêche de l’être et cette idée conduit aux notions d’orbite, de

quotient et d'invariant. Dans les paragraphes suivants nous allons examiner cette question, d'abord d'un point de vue théorique, puis dans le cas de l'opération du groupe des isométries sur les triangles.

3.1 Transitivité et orbites

3.1 Définition. Soit G un groupe opérant sur un ensemble X et soit $x \in X$. L'ensemble des $g.x$ pour $g \in G$ est appelé **orbite** de x et noté $\omega(x)$.

Les orbites forment une partition de X , de sorte que la relation "être dans la même orbite" est une relation d'équivalence sur X , dont le quotient, ensemble des orbites, est noté X/G et la suite logique de l'étude de la transitivité est de décrire X/G .

3.1.1 Le cas d'un quotient fini

Dans certains cas, il n'y a qu'un nombre fini d'orbites et il suffit, pour les distinguer, d'un renseignement qualitatif. Voici trois exemples de cette situation, somme toute assez simple.

- Si G est le groupe des déplacements du plan et X l'ensemble des repères orthonormés O, e_1, e_2 il y a deux orbites pour l'opération de G sur X : les repères directs et indirects et c'est cette orientation qui caractérise les orbites.

- Si G est le groupe affine du plan réel et X l'ensemble des coniques propres, il y a trois orbites : les ellipses, les paraboles et les hyperboles. Une manière de les distinguer est de plonger le plan affine dans le plan projectif et de compter le nombre de points d'intersection de la conique et de la droite de l'infini : 0, 1 ou 2.

- Si G est le groupe des homographies conservant une conique propre réelle Γ , définie par une forme quadratique q et X l'ensemble des points du plan il y a trois orbites : les points intérieurs à Γ , ceux de Γ et les extérieurs (ou encore les points définis par $q < 0$, $q = 0$ et $q > 0$).

3.1.2 Le cas d'un quotient infini

Lorsque le quotient est infini, il est plus difficile de le décrire. La méthode que l'on emploie est de le paramétrer, de la façon suivante²⁶.

1) On repère des **invariants** de X sous G . Cela signifie qu'on associe à chaque x de X des objets, le plus souvent des nombres, qui sont invariants

26. La méthode est très générale, mais on peut penser au cas où X est l'ensemble des triangles et G le groupe des isométries pour la comprendre.

par G , donc les mêmes pour x et tous les éléments $g.x$ de son orbite. Autrement dit on construit une application $\Phi : X \rightarrow Y$ (avec pour Y un espace “numérique”) qui soit telle que si $x' = g.x$, on ait $\Phi(x) = \Phi(x')$, autrement dit que x et x' aient mêmes invariants. Par exemple, dans le cas des triangles, des invariants naturels sont les longueurs des côtés et les angles. Souvent, lorsque X est plongé dans un espace numérique, on utilise des invariants qui sont polynomiaux en les coordonnées, par exemple, dans le cas des triangles ABC la donnée des côtés et des angles est équivalente à celle des produits et carrés scalaires des vecteurs \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{AB} qui sont des polynômes en les coordonnées des points.

L'application Φ induit alors $\overline{\Phi} : X/G \rightarrow Y$ définie par $\overline{\Phi}(\overline{x}) = \Phi(x)$.

2) Un système d'invariants n'est satisfaisant que s'il est **complet**, ce qui signifie que deux points sont dans la même orbite si et seulement si ils ont les mêmes invariants, autrement dit si $\overline{\Phi}$ est injective. Lorsqu'on a un tel système on peut répondre à la question du défaut de transitivité :

On peut échanger x et x' par un élément de G si et seulement si x et x' ont mêmes invariants.

Dans le cas des triangles, le système formé des trois côtés et des trois angles est complet, mais il admet des sous-systèmes complets eux aussi (par exemple les trois côtés, ou deux côtés et un angle, etc.), on obtient les fameux “cas d'isométrie” des triangles, voir ci-dessous.

3) Il reste enfin à préciser l'**image** de Φ ou de $\overline{\Phi}$, c'est-à-dire à déterminer quels sont les invariants possibles. Ce travail présente *a priori* deux volets. Le premier consiste à décrire les relations éventuelles entre les divers invariants. On représente alors l'image comme un fermé de l'espace Y . Dans le cas des invariants polynomiaux, les relations sont le plus souvent polynomiales elles aussi. Nous verrons ce que donnent ces relations dans le cas des triangles. Le second volet précise des conditions définies par des inégalités. Dans le cas des triangles on a notamment l'inégalité triangulaire.

Si l'on a réalisé ces trois opérations, X/G est réputé connu²⁷.

3.2 Remarque. Dans toutes ces questions, la notion de dimension guide les calculs de quotient. En effet, la formule vue au corollaire 1.3 : $\dim X/G = \dim X - \dim G + \dim S(x)$ indique de combien d'invariants on a besoin au minimum. Dans le cas où les objets génériques ont un stabilisateur trivial, voire fini, c'est exactement la différence entre les dimensions de X et de G , par exemple c'est 3 dans le cas des triangles.

²⁷. Au moins ensemblistement, car on espère pouvoir le munir de structures additionnelles, notamment de variété, analogues à celles de X . Il y a là une partie importante de la géométrie algébrique moderne, représentée notamment par le livre [8] de Mumford.

3.2 L'exemple des triangles

Nous allons détailler cet exemple, qui est essentiel. Le lecteur trouvera quelques indications sur le cas des quadrilatères en annexe.

3.2.1 Des invariants

On connaît beaucoup d'invariants d'un triangle ABC sous le groupe des isométries, les plus immédiats sont ses trois côtés $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ et ses trois angles α, β, γ en A, B, C , mais il y en a bien d'autres : son aire, son périmètre, les longueurs de ses hauteurs, de ses médianes, etc.

Comme dans ce cas l'espace X des triangles est de dimension 6 et le groupe des isométries de dimension 3, on s'attend à ce que le quotient puisse être défini par trois paramètres et pas moins. Cette vision des choses en termes de dimensions permet déjà de répondre à des questions comme celle posée dans le numéro 152 des *Chantiers de pédagogie mathématique* de l'AP-MEP :

Deux triangles qui ont même aire et même périmètre sont-ils isométriques ?

La réponse doit être évidemment non, car les triangles modulo isométrie sont de dimension 3, donc deux paramètres ne peuvent suffire à les déterminer, voir ma conférence IREM de 2013 :

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/aireperi/APM-aire-perimetre10.pdf>

3.2.2 Résolutions de triangles

Attention, s'il est nécessaire de disposer de trois invariants pour définir un triangle modulo isométrie, ce n'est peut-être pas suffisant. Ainsi, la donnée des trois angles α, β, γ ne suffit pas car ces angles sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, donc ne déterminent pas ABC à isométrie près (il y a une infinité de solutions). De manière plus subtile, deux côtés et un angle autre que celui compris entre les côtés ne déterminent pas toujours le triangle (il peut y avoir deux solutions). Plus généralement, trois invariants étant donnés, une question intéressante est celle du nombre de triangles, à isométrie près, admettant ces invariants. C'est la question des résolutions de triangles, très populaire dans les manuels d'autrefois. Il s'agit de déterminer un triangle (à isométrie près) connaissant trois de ses invariants, par exemple son aire et deux des longueurs de ses côtés, ou ses trois hauteurs (voir [12] Exercice 6.5.15) et une profusion d'autres exemples. Si les invariants sont bien choisis, on va trouver seulement un nombre fini de solutions possibles. C'est une mine inépuisable d'exercices ...

3.2.3 Les cas d'égalité

Mais le cas le plus favorable est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle compris entre les côtés, deux angles et un côté, les trois côtés).

Les cas d'isométrie décrivent donc les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles. C'est un résultat théorique important, mais ce point de vue permet surtout de faire de la géométrie, grâce à deux remarques essentielles :

- Quand on a montré que deux triangles sont isométriques grâce à trois de leurs invariants, on obtient comme conséquence l'égalité des autres invariants que ceux utilisés.

- On peut montrer que deux triangles sont isométriques **sans être obligé d'exhiber l'isométrie qui fait le travail**.

Plagiant Pierre Dac et son sketch célèbre, voir par exemple <https://www.youtube.com/watch?v=TMZFEUyCwwk>, on a le dialogue suivant :

– *Votre sérénité, pouvez vous nous dire si ce triangle est isométrique à cet autre ?*

– *Oui.*

– *Vous pouvez le dire ?*

– *Oui !*

– *Il peut le dire, on l'applaudit bien fort.*

3.2.4 Un exemple

On peut traiter un nombre incalculable de problèmes de géométrie grâce aux cas d'isométrie des triangles, par exemple le suivant :

Soit ABC un triangle isocèle en A . La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D que l'on suppose extérieur à $[BC]$. On porte sur la droite (AD) , de l'autre côté de A par rapport à D , un point E qui vérifie $AE = BD$. Que peut-on dire du triangle CDE ?

La réponse : il est isocèle en C . Voici trois preuves (mais il y en a bien d'autres).

- **Par les cas d'égalité.**

On note que le triangle ADC est isocèle (car $DA = DC$ puisque D est sur la médiatrice de $[AC]$). On en déduit l'égalité d'angles $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ et cet angle est aussi égal à \widehat{ABC} car ABC est isocèle. On considère les

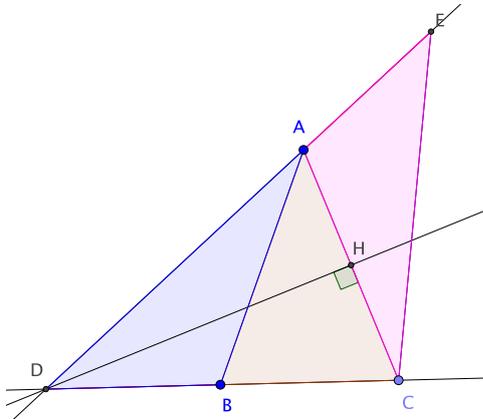


FIGURE 17 – Par cas d'égalité

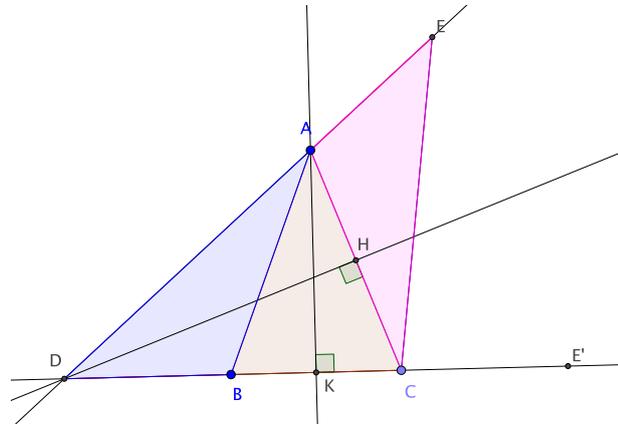


FIGURE 18 – Par les transformations

triangles bleu et rose ADB et CEA . Ils sont égaux. En effet, on a $AB = CA$ et $DB = EA$ par hypothèse. Il reste à voir l'égalité des angles en B et A qui est claire car ce sont des supplémentaires de \widehat{ABC} et \widehat{DAC} . On conclut soit avec l'égalité des angles en D et E , soit avec $AD = CE = CD$.

• **Par les transformations ?**

Grâce aux triangles isocèles, on a à disposition deux symétries naturelles τ_1 et τ_2 , par rapport à $\Delta_1 = (DH)$ et à Δ_2 médiatrice de $[BC]$ (qui le coupe en K).

Posons $\rho = \tau_2 \circ \tau_1$. On a $\rho(C) = A$. Si l'on montre qu'on a aussi $\rho(E) = D$ on a gagné car on a alors $CE = AD$, donc aussi $CE = CD$. Pour montrer $\rho(E) = D$ on introduit E' symétrique de E par rapport à $\Delta_1 = (DH)$. Il est sur (DC) car $\tau_1(D) = D$ et $\tau_1(A) = C$. Il faut voir qu'on a $\tau_2(E') = D$, donc $KD = KE'$. Mais on a $KD = KB + BD$, $KB = KC$ et $BD = AE = CE'$, donc $KD = KC + CE' = KE'$ et le résultat.

• **Avec le concours des hauteurs**

Voici une autre méthode qui donne le résultat. On considère la médiatrice-hauteur $\Delta_2 = (AK)$ de $[BC]$ et le symétrique²⁸ E'' de D par rapport à Δ_2 . On a $DE'' = DC + CE'' = DC + DB = DA + AE = DE$. Dans le triangle isocèle EDE'' , Δ_2 est la médiatrice de $[EE'']$. Celle de $[EE'']$ passe par D et c'est $\Delta_1 = (DH)$ parce que toutes deux sont bissectrices de \widehat{ADC} . Le point de concours de ces médiatrices est donc aussi celui, disons O , des hauteurs de ABC et (CO) , qui est perpendiculaire à (DE) , est la troisième médiatrice, celle de $[DE]$. On en déduit $CE = CD$.

Pour des élèves, la preuve par les cas d'égalité est beaucoup plus simple

28. C'est le même point que E' , mais défini autrement.

car elle ne nécessite d'introduire ni la médiatrice (AK), ni les deux symétries, ni les points E' ou E'' .

On renvoie le lecteur intéressé par une discussion sur ce thème à la brochure numéro 100 de l'IREM de Paris, voir [6].

3.2.5 Les cas de similitude

Lorsqu'on s'intéresse à l'action du groupe des similitudes sur les triangles, on tombe sur les cas de similitude :

3.3 Théorème. *Soit ABC un triangle, a, b, c les longueurs de ses côtés et α, β, γ ses angles. Les éléments suivants sont des systèmes complets d'invariants sous le groupe des similitudes :*

- 1) Deux angles, par exemple α, β .
- 2) Un angle et le rapport des côtés qui l'entourent, par exemple α et b/c .
- 3) Deux rapports de côtés, par exemple a/b et a/c .

3.4 Remarque. On notera que cette vision des choses conduit à énoncer les cas d'égalité sous la forme : si l'on a $\alpha = \alpha'$ et $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, tandis que la variante usuelle consiste à demander $\alpha = \alpha'$ et $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

3.3 Une autre source de théorèmes : les relations

3.5 Notations. Dans le triangle ABC on note D, E, F les milieux des côtés $[BC], [CA], [AB]$ respectivement et A', B', C' les pieds des hauteurs issues de A, B, C . On appelle O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et G le centre de gravité.

3.3.1 Les relations des hauteurs

Comme on l'a vu, l'espace X des triangles est de dimension 6, le groupe G des isométries de dimension 3, de sorte que X/G est de dimension 3 et on a un plongement de X/G dans \mathbf{R}^6 en associant à un triangle les longueurs a, b, c de ses trois côtés et ses trois angles α, β, γ , mais comme X/G est de dimension 3, il y a nécessairement des relations entre ces invariants et il s'agit de préciser lesquelles. (Vu le nombre de paramètres, on en attend trois *a priori*.) Bien entendu, on connaît certaines de ces relations, les trois relations d'Al-Kashi du type $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, mais aussi la somme des angles $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Mais ce qui est troublant c'est que cela fait quatre relations !

En fait, il y a bien d'autres relations et les plus simples sont les suivantes²⁹. Si A' , pied de la hauteur issue de A , est dans $[BC]$, on a $BC = BA' + A'C$, soit $a = c \cos \beta + b \cos \gamma$ et cette formule vaut encore si A' est en dehors du segment et, de même, on a $b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$ et $c = b \cos \alpha + a \cos \beta$. On désignera ces relations comme les "relations des hauteurs". Cela commence à faire beaucoup de relations ... En vérité, les relations des hauteurs déterminent toutes les autres (en termes savants, elles engendrent l'idéal des relations).

3.3.2 Al-Kashi et la somme des angles

On voit déjà que les relations d'Al-Kashi s'obtiennent avec les relations précédentes : on multiplie les relations par a, b, c , on obtient $a^2 = ac \cos \beta + ab \cos \gamma$, $b^2 = ab \cos \gamma + bc \cos \alpha$ et $c^2 = bc \cos \alpha + ac \cos \beta$ et on en déduit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Pour la somme des angles c'est un peu plus subtil. Les relations des hauteurs donnent un système linéaire :

$$\begin{aligned} -a + b \cos \gamma + c \cos \beta &= 0 \\ a \cos \gamma - b + c \cos \alpha &= 0 \\ a \cos \beta + b \cos \alpha - c &= 0. \end{aligned}$$

Comme ce système a une solution (a, b, c) non triviale, son déterminant est nul :

$$(*) \quad -1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0$$

Pour conclure on montre le lemme suivant :

3.6 Lemme. *Soient α, β, γ les angles d'un triangle. On a les propriétés suivantes :*

- 1) $\cos \alpha + \cos \beta > 0$,
 - 2) $\alpha + \beta < \pi$,
- ainsi que leurs permutées circulaires.*

Démonstration. 1) On utilise les relations des hauteurs qui donnent $c \cos \alpha + c \cos \beta = (a + b)(1 - \cos \gamma)$ d'où le résultat.

29. Elles apparaissent naturellement si l'on pense en termes d'invariants polynomiaux, donc de produits scalaires. En effet, la première relation s'écrit $(\overrightarrow{BC} | \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BC} | \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BC} | \overrightarrow{AC})$ et elle provient de la relation de Chasles.

2) Comme la fonction cosinus est décroissante, la relation 2) équivaut à $\cos \alpha > -\cos \beta = \cos(\pi - \beta)$ qui provient de 1).

On peut maintenant prouver :

3.7 Théorème. *La somme des angles d'un triangle est égale à π .*

Démonstration. Appelons α le plus grand des angles. On a alors $\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma > 0$. En effet, c'est évident si tous les angles sont aigus et sinon, seul α peut être obtus en vertu du lemme. Mais alors, on a $\cos \alpha \cos \beta > \cos \alpha$ et on conclut grâce à $\cos \alpha + \cos \gamma > 0$.

On considère la relation (*) comme une équation du second degré en $\cos \gamma$, dont le discriminant réduit Δ' vaut $1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$. On en déduit $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$. Le signe $-$ est impossible car on a $\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma > 0$. On a donc $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta)$, soit $\cos(\pi - \gamma) = \cos(\alpha + \beta)$ et comme $\pi - \gamma$ et $\alpha + \beta$ sont dans $[0, \pi]$, ils sont égaux.

3.3.3 La formule des sinus

Les hauteurs fournissent une autre relation célèbre : la formule des sinus. En effet, si AA' est la hauteur issue de A on a $AA' = AC \sin \gamma = AB \sin \beta$ d'où $b \sin \gamma = c \sin \beta$ et de même avec les autres, ce qui donne $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

3.3.4 Le théorème de l'angle inscrit

Il s'agit du résultat suivant, dont on donne une preuve ici en termes de relations entre les invariants :

3.8 Théorème. *On reprend les notations 3.5. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et D le milieu de $[BC]$. On suppose O intérieur au triangle. Alors, on a $\widehat{DOC} = \alpha$.*

Démonstration. Notons α', β', γ' les moitiés des angles $\widehat{BOC}, \widehat{COA}, \widehat{AOB}$, voir figure 19. Il s'agit de montrer que ces angles sont égaux à α, β, γ . On note déjà que, comme la somme des angles en O vaut 2π , celle de leurs moitiés α', β', γ' est égale à π . Dans le triangle DOC , on a la relation $a/2 = R \sin \alpha'$, donc $\frac{a}{\sin \alpha'} = 2R$ et on a les mêmes relations avec β', γ' . On a donc $\frac{a}{\sin \alpha'} = \frac{b}{\sin \beta'} = \frac{c}{\sin \gamma'}$ d'où $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}$ et de même pour les autres rapports. On

considère un triangle $A'B'C'$ admettant les angles α', β', γ' (il en existe car la somme de ces angles vaut π) et on note a', b', c' les longueurs de ses côtés. La formule des sinus donne $\frac{a'}{\sin \alpha'} = \frac{b'}{\sin \beta'} = \frac{c'}{\sin \gamma'}$ donc aussi $\frac{a'}{b'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{a}{b}$ et de même pour les autres rapports. Il en résulte que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables (voir 3.3). Mais alors leurs angles sont égaux comme annoncé.

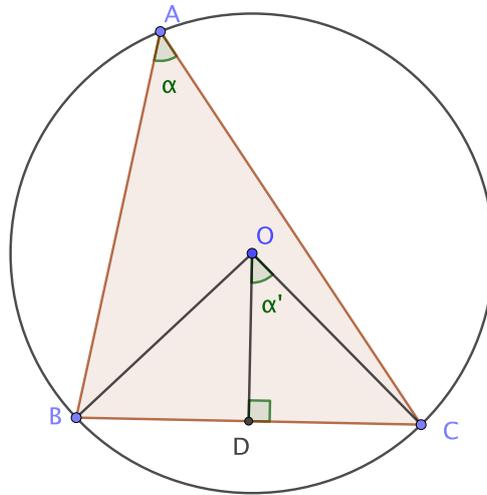


FIGURE 19 –

3.3.5 La droite d'Euler

Avec ces relations on trouve aussi facilement la propriété de la droite d'Euler. C'est la proposition suivante :

3.9 Proposition. *On reprend les notations 3.5.*

- 1) On a $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
- 2) On a $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, de sorte que O, H, G sont alignés (la droite qui contient O, H, G est appelée droite d'Euler du triangle).

Démonstration. La seconde formule résulte de la première en écrivant la définition du barycentre G de A, B, C : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$.

Pour la première, comme on a $OB = OC$, le triangle OBC est isocèle et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$ est donc perpendiculaire à (BC) , comme \overrightarrow{AH} , et ces

vecteurs sont de même sens³⁰. Il reste à voir que leurs longueurs sont égales. Par le théorème de l'angle inscrit on a $\widehat{DOC} = \alpha$, et donc $OD = \frac{a \cos \alpha}{2 \sin \alpha}$ et $OM = a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Par ailleurs, on a $AB' = AH \cos(\pi/2 - \gamma) = AH \sin \gamma$, mais aussi $AB' = AB \cos \alpha = c \cos \alpha$. On en déduit $AH = c \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}$ et on conclut grâce à la relation des sinus.

3.3.6 Une citation de Bourbaki

L'importance des relations entre invariants ne tient pas seulement à leur usage pour la description des quotients X/G . En effet, comme on vient de le voir, elles engendrent aussi les théorèmes de la géométrie. C'est le sens de la phrase suivante de Bourbaki (cf. [1]) :

Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies"³¹ de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire.

Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.). Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

Pour une discussion sur ce thème, voir [10].

4 Annexes

4.1 Un théorème de Poncelet

Le résultat suivant, dû à Poncelet est un autre exemple d'utilisation de la transitivité :

30. C'est un petit raisonnement de position, que l'on peut rendre plus facile en supposant que α est un angle aigu.

31. C'est le mot savant pour relations.

4.1 Théorème. Soit Γ une conique propre et soient A, B deux points distincts du plan, non situés sur Γ . On suppose que A et B ne sont pas conjugués par rapport à Γ . Soit P un point de Γ . Les droites (AP) et (BP) recouperont respectivement Γ en C et D . Les tangentes à Γ en C et D se coupent en M . Alors, quand P varie sur Γ , le point M décrit une conique Ω .

Démonstration.

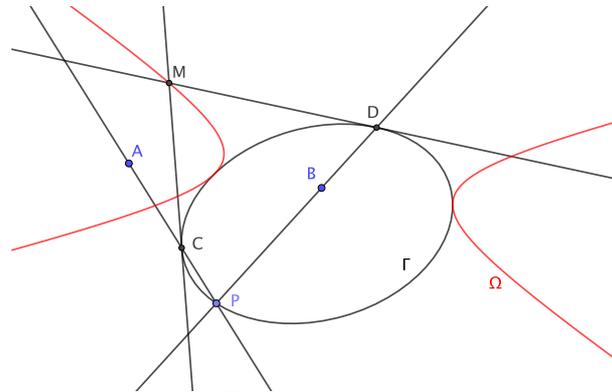


FIGURE 20 –

On montre d'abord le résultat dans le cas où (AB) ne coupe pas Γ . Pour cela, on montre que le groupe des homographies du plan est transitif sur les couples (Γ, Δ) où Γ est une conique propre et Δ une droite ne la coupant pas. En effet, on commence par envoyer Δ sur la droite de l'infini, Γ devient une ellipse, les homographies conservant Δ sont les applications affines et on utilise le fait que le groupe affine est transitif sur les ellipses.

On est donc ramené à montrer le résultat dans le cas où Γ est un cercle de rayon R et A, B deux points à l'infini, donc deux directions.

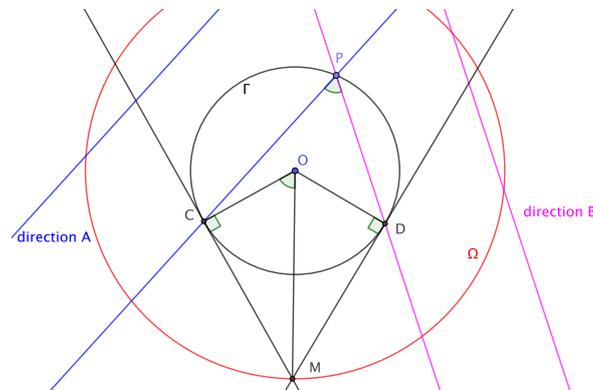


FIGURE 21 –

Mais, dans ce cas, l'angle $\alpha = \widehat{CPD}$ est constant puisque ses côtés sont parallèles aux directions fixes A, B et il est égal au demi-angle au centre \widehat{COM} . On en déduit que OM est constant et égal à $R/\cos \alpha$, de sorte que M décrit un cercle concentrique à Γ .

Lorsque Δ coupe Γ on applique la même méthode, mais en passant par les complexes. Pour des détails voir [11] §3.5.

Cette procédure a été très discutée à l'époque. Voilà ce qu'en dit Poncelet : *Toute propriété de position dont jouit sa projection quand elle est possible, est toujours une propriété de cette figure, même quand la projection est imaginaire.* Mais Cauchy n'en est pas convaincu : *Ce principe n'est, à proprement parler, qu'une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas où ces mêmes restrictions n'existent plus. En lui accordant trop de confiance, on pourrait tomber quelquefois dans des erreurs manifestes.* D'où l'amertume de Poncelet : *... Monsieur Cauchy, si puissant comme calculateur, si léger et superficiel dans ses jugements ...*

4.2 Les quadrilatères

Les questions posées ci-dessus lors de l'étude des triangles s'étendent au cas des quadrilatères, dans plusieurs directions. Nous ne faisons qu'effleurer le sujet ici, voir par exemple [12] pour des détails.

4.2.1 Les quadrilatères modulo isométrie

On s'intéresse à l'opération du groupe des isométries (dimension 3) sur l'ensemble des quadrilatères $ABCD$ du plan (dimension 8). Il y a *a priori* cinq invariants indépendants. Cela montre que les quatre longueurs des côtés AB, BC, CA, AD sont insuffisantes pour déterminer un quadrilatère à isométrie près comme le montre le cas des losanges.

Avec les diagonales AC et BD en plus, le quadrilatère est déterminé, mais les invariants ne sont plus indépendants, il y a une relation entre ces six invariants, la relation de Cayley-Menger, mais elle n'est pas si simple ...

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ 1 & AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4.2.2 Les quadrilatères modulo similitude

Cette fois, on s'intéresse à l'opération du groupe des similitudes (dimension 4) sur l'ensemble des quadrilatères du plan (dimension 8).

Il y a *a priori* quatre invariants indépendants. Les quatre angles du quadrilatère sont insuffisants (il suffit de penser aux rectangles). Des invariants naturels sont les 8 angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ des côtés avec les diagonales, voir la figure ci-dessous.

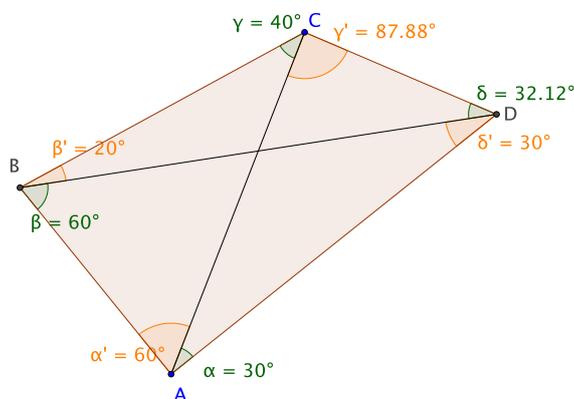


FIGURE 22 –

Il y a des relations évidentes entre ces angles, $\mathcal{R}_A : \beta' + \gamma + \gamma' + \delta = \pi$, $\mathcal{R}_B : \gamma' + \delta + \delta' + \alpha = \pi$, $\mathcal{R}_C : \delta' + \alpha + \alpha' + \beta = \pi$, $\mathcal{R}_D : \alpha' + \beta + \beta' + \gamma = \pi$, mais elles ne sont pas indépendantes : on a $\mathcal{R}_A + \mathcal{R}_C = \mathcal{R}_B + \mathcal{R}_D$. Il y a donc une autre relation, que voici :

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta = \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' \sin \delta'.$$

Si l'on se donne quatre des angles parmi les huit (non trivialement liés par une relation), on peut déterminer les autres (mais peut-être pas de manière unique selon les cas). C'est le thème des deux exercices des figures ci-dessous.

Pour plus de détails on pourra consulter, sur ma page web :

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/SurGeometrie/quadrilatere-angles7.pdf>

4.2.3 Les quadrilatères inscriptibles

Un quadrilatère $ABCD$ est dit inscriptible si A, B, C, D sont sur un même cercle.

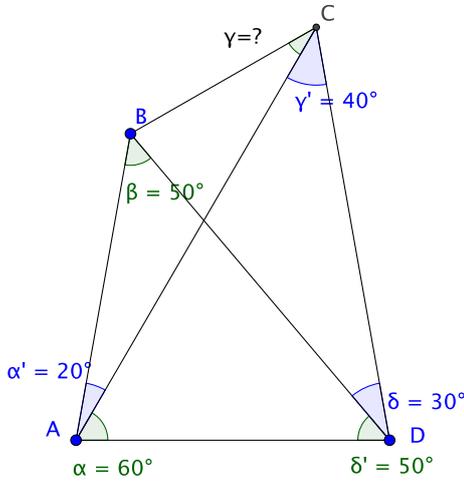


FIGURE 23 – Calculer \widehat{ACB}

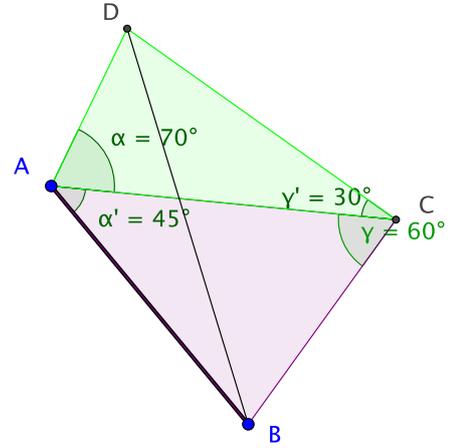


FIGURE 24 – Calculer tous les angles

L'espace des quadrilatères inscriptibles est de dimension 7, donc modulo isométries, de dimension 4. Ici les quatre côtés $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ suffisent car ils déterminent les diagonales $e = AC$ et $f = BD$. En effet, on a les formules (dans le cas convexe) :

$$ef = ac + bd \quad \text{et} \quad e(ab + cd) = f(ad + bc).$$

On en déduit :

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \quad f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

4.2.4 Les quadrilatères modulo le groupe affine

L'unique invariant du groupe affine est l'aire orientée. Pour un triangle ABC , il s'agit de la quantité $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ que l'on notera aussi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, voire $\mathcal{A}(ABC)$, ou encore $[A, B, C]$ et dont la valeur absolue est (le double de) l'aire de ABC . On en déduit le résultat suivant :

4.2 Proposition. Soient A, B, C, D (resp. A', B', C', D') quatre points en position générale. Il existe une transformation affine qui envoie A, B, C, D sur A', B', C', D' si et seulement si on a $\frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\mathcal{A}(A'B'D')}{\mathcal{A}(A'B'C')}$ et $\frac{\mathcal{A}(ACD)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\mathcal{A}(A'C'D')}{\mathcal{A}(A'B'C')}$.

Démonstration. Il est clair que les quantités ci-dessus sont invariantes par une transformation affine car l'aire est multipliée par le déterminant. On sait qu'il existe une unique transformation affine f qui envoie A, B, C sur A', B', C' et il reste à voir qu'elle envoie D sur D' . Si l'on pose $D' = f(D)$ on a $\mathcal{A}(A'B'D') = \mathcal{A}(A'B'D'')$ et $\mathcal{A}(A'C'D) = \mathcal{A}(A'C'D'')$. Comme $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ est une base, on peut écrire $\overrightarrow{A'D'} = \lambda' \overrightarrow{A'B'} + \mu' \overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'D''} = \lambda'' \overrightarrow{A'B'} + \mu'' \overrightarrow{A'C'}$ et les égalités précédentes donnent $\lambda' = \lambda''$ et $\mu' = \mu''$ et le résultat.

On obtient aussi le critère de concours de trois droites :

4.3 Proposition. Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts du plan. Alors $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si l'on a :

$$\mathcal{A}(AA'C) \times \mathcal{A}(BB'C') = \mathcal{A}(AA'C') \times \mathcal{A}(BB'C).$$

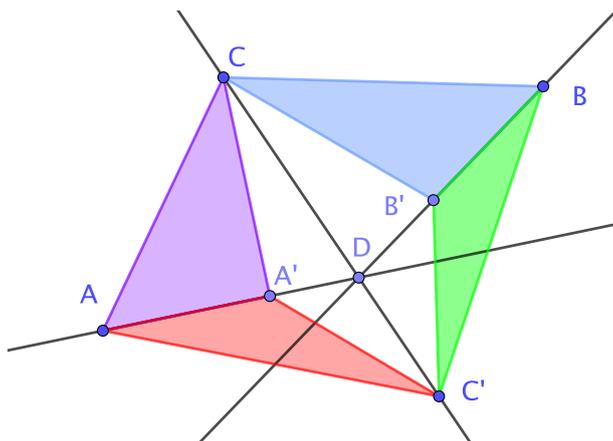


FIGURE 25 –

Démonstration. Cela résulte de la relation entre les invariants :

$$[A \wedge A', B \wedge B', C \wedge C'] = [A, A', C][B, B', C'] - [A, A', C'][B, B', C],$$

voir [10] 5.5.14.

Références

- [1] Bourbaki Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1960.
- [2] Caldero Philippe et Germoni Jérôme, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*, Calvage & Mounet, 2013.

- [3] Deltheil Robert et Caire Daniel, *Géométrie, classe de mathématiques*, Jacques Gabay, Paris, 1989.
- [4] Hilbert David (trad. Paul Rossier), *Les fondements de la géométrie*, Paris, Dunod, 1971, Gabay 1997.
- [5] Ingraio Bruno, *Coniques projectives, affines et métriques*, Calvage & Mounet, 2011.
- [6] IREM de Paris, *Enseigner la géométrie au cycle 4*, Brochure numéro 100, novembre 2020.
<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS20011.pdf>
- [7] Klein Felix, *Le programme d'Erlangen*, Jacques Gabay, 1974.
- [8] Mumford David, *Geometric Invariant Theory*, Springer, 1965.
- [9] Perrin Daniel *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Géométrie projective linéaire*, 2014.
<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie1.pdf>
- [10] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Les invariants de la géométrie projective linéaire*, 2014.
<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie2.pdf>
- [11] *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, La conique*
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie3.pdf>
- [12] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, La géométrie euclidienne*, 2014.
<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie5.pdf>
- [13] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, La géométrie anallagmatique*, 2014.
<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie6.pdf>
- [14] Perrin Daniel, *Trois applications de Thalès : Ménélaus, Céva, Pappus*
<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/Menelaus.pdf>
- [15] Perrin Daniel, *Introduction à la géométrie algébrique*, Interéditions, 1995.

- [16] Perrin Daniel, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.
- [17] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.
- [18] Perrin Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), 2050.