Géométrie : deux ou trois choses que je sais d'elle

Daniel PERRIN

Introduction

Je remercie les organisateurs du colloque de m'avoir invité à faire cette conférence. Elle aura été l'occasion pour moi de préciser un peu plus les idées que je défends, depuis quelque temps déjà, sur la géométrie.

Il faut voir ce texte comme une longue promenade à travers la géométrie plane. Elle y apparaîtra sous des formes diverses et parfois inattendues (géométries euclidienne, affine, projective, anallagmatique[1], etc.). Pourtant, sous ces oripeaux qui changent, comme la nature au gré des saisons, on verra se dessiner un même paysage.

0.1 Mon histoire

Je fais partie d'une génération de mathématiciens, la dernière peut-être, qui a été nourrie au lait de la géométrie euclidienne : c'est sans doute en réfléchissant sur des problèmes de géométrie[2] que j'ai fait, pour la première fois, des mathématiques.

Malgré cela, mes débuts de mathématicien professionnel se sont déroulés assez loin de la géométrie. En effet, même si mon domaine de recherche s'appelle géométrie algébrique, il était, à l'époque, et après le passage de la tornade[3] Grothendieck, devenu beaucoup plus algébrique que géométrique. De même, l'enseignement que je dispensais à mes débuts, et notamment aux agrégatives de Sèvres[4], était très éloigné de la géométrie de nos pères. Il a fallu la conjonction de deux événements pour que cet enseignement bifurque,

[1]Il s'agit de la géométrie de l'inversion. Le mot vient du grec allasso, dont le dérivé nominal est allagma, et qui désigne le changement, la transformation.

[2]Au collège, ou plus précisément au Cours Complémentaire, une filière, faite en principe pour mener les élèves de milieu modeste au BEPC, mais dont certains pouvaient tout de même émerger.

[3]C'est dit sans la moindre nuance péjorative : j'ai une immense admiration pour l'œuvre de Grothendieck et je souscris très souvent à sa vision des mathématiques.

[4]Il s'agit de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles.

au début des années 1980. D'abord, mon cours d'algèbre était écrit et disponible sous forme d'un polycopié et ensuite, l'agrégation était devenue très difficile (82 postes en 1980[5]) et toute impasse y était devenue impossible[6]. Cela m'a contraint à bâtir un enseignement de géométrie dans plusieurs domaines (géométrie projective, coniques, géométrie anallagmatique, polyèdres, etc.). C'est en construisant cet enseignement que j'ai compris le sens du programme d'Erlangen et que j'ai commencé à en discuter les conséquences, notamment l'idée de mesurer la richesse d'une géométrie à l'aune des isomorphismes des divers avatars de son groupe.

Depuis cette époque, j'ai été amené à plusieurs reprises à enseigner la géométrie, à différents niveaux, et dans différents cadres. Tout d'abord, j'ai enseigné, pour la préparation à l'écrit du CAPES, la géométrie affine et la géométrie euclidienne, avec une entrée exclusivement fondée sur l'algèbre linéaire. Ensuite, j'ai enseigné, en licence pluridisciplinaire[7], une géométrie plus élémentaire, plus proche de celle d'Euclide, avec une utilisation des invariants et des cas d'isométrie des triangles[8] plus conforme aux idées que je défends sur le sujet.

Plusieurs occasions m'ont alors été données de mettre sur le papier mes idées mathématiques, épistémologiques et didactiques sur la géométrie et son enseignement et notamment en 1999 quand j'ai rédigé la partie géométrie du rapport d'étape de la commission Kahane[9], voir [Kahane]. Il y a dans ce rapport nombre de thèmes que j'aborde aussi ici.

Enfin, le dernier événement important pour mon histoire de géomètre a été la rencontre avec Yves Martin, au cours de l'élaboration de sa thèse sur l'utilisation de Cabri en géométrie non euclidienne [Martin]. J'y ai découvert une vision extraordinaire des géométries non euclidiennes qui m'a amené à réfléchir beaucoup plus avant sur leurs rapports entre elles et avec la géométrie euclidienne. J'ai pu à cette occasion associer avec profit à l'extraordinaire vision géométrique d'Yves les connaissances algébriques qui constituent le socle de ma propre formation et c'est à cette occasion qu'est né le projet de livre [Perrin4], en cours de réalisation, et dont l'idée directrice est

[5] Hommes et femmes réunis. On comparera avec les 300 (environ) actuels. Pour une discussion sur les fluctuations de ces chiffres, voir [Kahane-FdM].

[6] Afin d'apaiser leur conscience, les jurys de concours s'arrangent toujours pour que le premier collé soit vraiment mauvais à leurs yeux. Dans le cas présent, le moyen d'assurer cet objectif avait été de proposer des couplages de leçons de géométrie.

[7] Mise en place à Orsay à partir de 1998 et destinée à la formation des futurs professeurs des écoles.

[8] Sur le conseil de mon épouse, vraie géomètre s'il en est, dont l'influence sur ma vision des choses est considérable.

[9] De son nom officiel : Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, mais elle était présidée de main de maître par Jean-Pierre Kahane.

justement de **comprendre** les liens qui unissent l'algèbre et la géométrie.

On notera que tous ces événements gravitent autour de l'**enseignement** de la géométrie. Cela n'étonnera pas ceux qui me connaissent et savent combien, dans toute ma carrière d'enseignant-chercheur, j'ai penché vers le premier terme, et plus particulièrement vers la formation des maîtres.

0.2 Le choix de la géométrie plane

Il peut sembler réducteur de parler seulement de géométrie plane. C'est partiellement vrai et j'ai insisté en d'autres lieux sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace[10].

Cependant, il y a une raison profonde qui me fait dédaigner en tous cas les dimensions supérieures[11], c'est le constat, d'abord expérimental, que ces géométries sont plus pauvres que celles de petites dimensions. Mon opinion est qu'il y a une raison profonde à cette richesse des petites dimensions : c'est la coïncidence de divers types de groupes classiques, qui ne se produit plus au-delà de la dimension 5. On évoquera ci-dessous l'exemple de l'isomorphisme : $O(q) \simeq PGL(2, \mathbf{R})$ dans le cas d'une forme de Lorentz en dimension 3 ou celui du groupe d'une forme de Lorentz sur $\mathbf{R}^4$ avec le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$.

Ce fait a été occulté[12] au moment de la réforme dite des Mathématiques modernes, où l'on a privilégié les éléments susceptibles de se généraliser en toutes dimensions, perdant ainsi une bonne partie du contenu de la géométrie élémentaire.

1 Le programme d'Erlangen

1.1 Retour à Euclide

Avant de parler du programme d'Erlangen, je voudrais expliquer pourquoi il me semble déjà en germe dans les éléments d'Euclide[13]. Examinons donc la preuve du premier cas d'égalité des triangles (Livre 1, proposition 4) :

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les

[10] Voir notamment [Kahane] ou [Perrin3].

[11] Disons au-delà de 5. La géométrie en dimension 4 est très riche comme en témoigne l'exemple des polyèdres que le colloque nous a permis de contempler dans le merveilleux film d'Etienne Ghys.

[12] Et c'est l'une des erreurs de cette réforme, sur le plan purement mathématique, à mon avis.

[13] Je m'appuie ici sur les traductions françaises de Kayas (voir [Euclide]) et Peyrard et sur la traduction anglaise de Heath.

troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

Voici, recopiée intégralement, la preuve d'Euclide :

Soient $AB\Gamma$ *et* ΔEZ *deux triangles tels que l'on ait :* $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ *et* $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$. *Je dis qu'il est aussi* $B\Gamma = EZ$ *et que ces triangles sont égaux*[14] *et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi :* $B\Gamma = EZ$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ *et* $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

En effet, si l'on appliquait le triangle $AB\Gamma$ *sur le triangle* ΔEZ *de manière à faire coïncider d'abord les points* A *et* Δ, *puis les côtés* AB *et* ΔE, *le point* B *coïnciderait avec* E, *car* $AB = \Delta E$. *Les côtés* $A\Gamma$ *et* ΔZ *coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles* $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, *de sorte que le point* Γ *à son tour coïnciderait avec* Z, *car* $A\Gamma = \Delta Z$. *D'autre part, les points* B *et* E *ayant déjà coïncidé, les côtés* $B\Gamma$ *et* EZ *coïncideront aussi, car si d'une part* B *et* E *et d'autre part* Γ *et* Z *coïncident mais les côtés* $B\Gamma$ *et* EZ *ne coïncident pas, deux droites pourraient délimiter une aire*[15], *ce qui est impossible (Ax. 10). Nécessairement donc les côtés* $B\Gamma$ *et* EZ *coïncideront et ils seront égaux (Ax. 8).*

Par conséquent, le triangle $AB\Gamma$ *tout entier coïncidera avec le triangle* ΔEZ *tout entier et il lui sera égal, et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux, à savoir :* $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ *et* $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

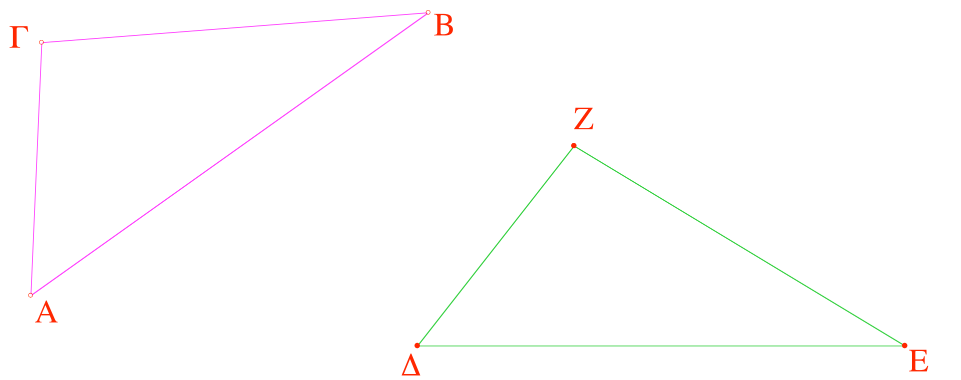

Figure 1: Le premier cas d'égalité

Cette "preuve", qui utilise la méthode dite de superposition, est celle que l'on donnait, à mon époque, en classe de cinquième et elle convainquait la

[14] Sans doute Euclide entend-il ici : ont même aire.

[15] Le recours à cet axiome est inutile et semble bien être un ajout des commentateurs, voir la traduction anglaise de Heath.

plupart des élèves (et moi le premier). Cependant, le mathématicien attentif y décèle évidemment un point faible : que signifie le fait d'*appliquer*[16] le triangle $AB\Gamma$ sur ΔEZ[17] ?

Cette faille dans Euclide a été notée dès 1557 par Jacques Peletier et, en tous cas, David Hilbert, quand il a entrepris la refonte de l'œuvre d'Euclide, en était parfaitement conscient. La solution qu'il a adoptée est de prendre le premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus. C'est une solution correcte, mais trop brutale à mon goût. Je serais plutôt en faveur d'une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition, si naturelle. Ce qui est nécessaire pour cela est de donner un sens à l'opération consistant à appliquer ou transporter une demi-droite sur une autre, propriété qui manifeste l'homogénéité du plan. Avec nos connaissances actuelles, on sent bien que derrière cela il y a la nécessité de la présence d'un **groupe** de transformations. Précisément, je propose de postuler qu'il existe un tel groupe qui opère transitivement[18] sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par cette demi-droite). Un groupe qui opère sur un ensemble : on est au cœur du programme d'Erlangen, comme on va le voir.

1.2 Erlangen, c'est quoi ?

Le programme d'Erlangen est la thèse de Felix Klein, soutenue en 1872 dans cette ville. Le travail de Klein arrive après l'explosion des géométries, survenue dans la première moitié du dix-neuvième siècle avec la création, à côté de la géométrie euclidienne classique, de la géométrie projective, développée par Poncelet, Plücker et d'autres, de la géométrie anallagmatique, où s'illustre en particulier Laguerre, des géométries non euclidiennes, avec Bolyai et Lobatchevski, etc. et il se veut une tentative d'**unification** de ces géométries. Le principe unificateur, adopté par Klein, est qu'une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble[19] X et d'un groupe

[16] On notera que le mot utilisé ici (et qui semble admis par tous les traducteurs) est celui qui sera retenu dans le langage moderne.

[17] Il y a beaucoup d'autres zones d'ombre dans cette démonstration. Par exemple, lorsqu'Euclide parle de faire coïncider les côtés, il pense sans doute aux demi-droites qui les portent, mais il faut aussi faire attention aux demi-plans.

[18] On a dit que ce mot serait essentiel. Notons que cette idée n'est pas nouvelle. Houël, au XIX-ème siècle, Bkouche plus près de nous, et d'autres sans doute, l'ont émise, mais, à ma connaissance, aucun de ces mathématiciens n'a accompli le travail de bâtir toute une axiomatique sur ce thème.

[19] Ici, il faut noter un point essentiel : c'est l'espace qui devient primordial et plus les figures, comme c'était le cas auparavant, cf. [Russo] p. 62.

G de transformations de X, autrement dit d'un groupe G opérant[20] sur X. Les éléments de G sont les transformations "permises" dans la géométrie en question et elles caractérisent cette géométrie. Il s'agit, par exemple, des isométries (affines) pour la géométrie euclidienne plane, ou des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou encore des homographies pour la géométrie projective. Le plus souvent, l'ensemble X est muni de données supplémentaires, par exemple un ensemble $\mathcal{D}$ de parties remarquables (les droites, les cercles,...) et les transformations de G conservent globalement $\mathcal{D}$. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projectives) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe, ainsi que le dit Klein (cf. [Klein] p.7) :

"*étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*"

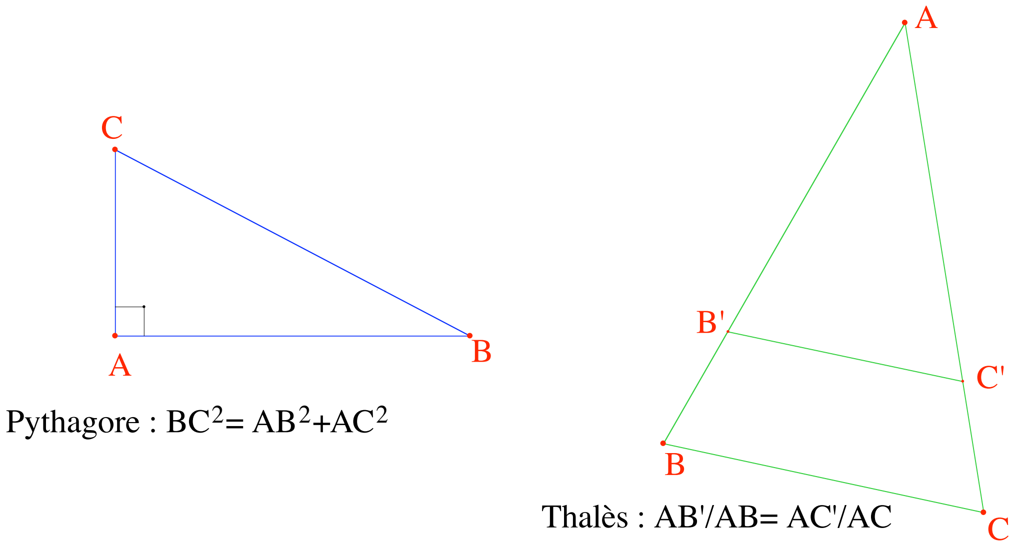

Figure 2: Pythagore et Thalès

Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, Pappus, qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement, est un théorème projectif tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une (et une seule ?) **niche écologique privilégiée**, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et, souvent, où il se démontre avec le plus de facilité.

[20] Pour la commodité, je dis les choses en langage moderne. La lecture du programme d'Erlangen n'est pas si facile pour un mathématicien des années 2000.

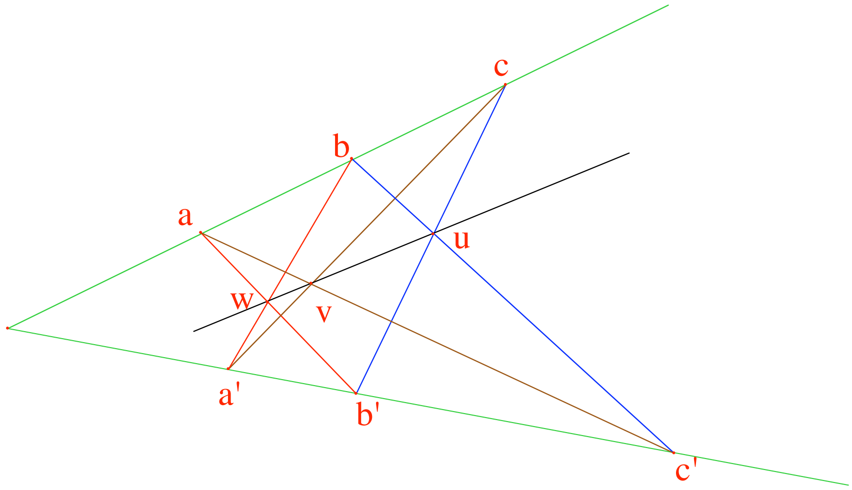

Figure 3: Théorème de Pappus : u, v, w sont alignés

L'exemple du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, frère jumeau de Pappus, illustre bien cette idée. Ce théorème s'énonce d'abord avec un cercle : si a, b, c, a', b', c' sont six points d'un cercle et si les droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, resp. (ab') et $(a'b)$) se coupent en u (resp. v, resp. w), les points u, v, w sont alignés.

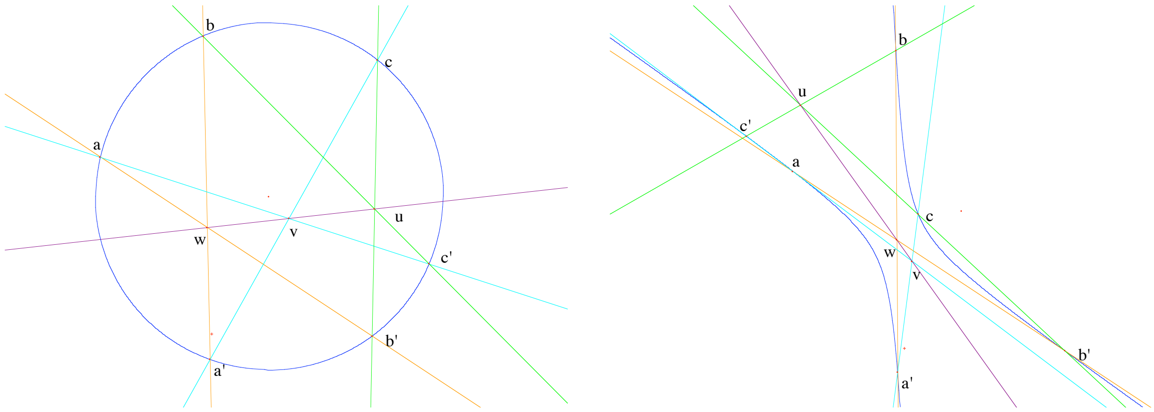

Figure 4: Théorème de Pascal : u, v, w sont alignés

Il n'est pas difficile de montrer ce théorème dans ce cadre en utilisant le théorème de l'angle inscrit, il apparaît alors comme un théorème euclidien.

Il est clair cependant que ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité. On peut aussi l'énoncer pour une ellipse. C'est alors un théorème affine. On peut enfin l'énoncer pour une parabole ou une hyperbole et il devient un théorème projectif. C'est d'ailleurs dans ce cadre[21] qu'il est le plus facile à prouver ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est ici débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles. Deux preuves me semblent particulièrement pertinentes :

• Celle qui utilise **l'invariant** fondamental associé à une conique : le birapport.

• Celle qui consiste à prouver le résultat dans le cas euclidien et à utiliser un argument de **transitivité** pour passer au cas général : il existe une homographie qui transforme un cercle en une conique quelconque (c'est essentiellement la méthode de Pascal). Je vais revenir abondamment sur cette idée dans la section 2.

1.3 La géométrie projective, mère de toutes les géométries

L'exemple qui précède nous fournit une transition toute trouvée vers le paragraphe suivant. En effet, comme Klein l'explique dans le programme d'Erlangen, toutes les géométries usuelles sont issues de la géométrie projective. Avant de préciser comment, il est nécessaire de dire un mot des fondements axiomatiques de la géométrie.

1.3.1 Discussion sur les axiomatiques

Il y a plusieurs types d'axiomatiques possibles pour la géométrie. Je n'en retiens ici que deux :

• La première, la plus ancienne, est celle d'Euclide, corrigée par Hilbert (voir [Hilbert]), avec de nombreuses variantes, voir [Lion], [Cousin-Fauconnet], [Perrin3], ou – s'il est écrit un jour – [Perrin5]. Toutes ces axiomatiques partent de la définition du plan comme un ensemble de points muni de parties remarquables : les droites, avec des axiomes d'incidence et d'ordre. Il faut ensuite quelque chose qui assure l'homogénéité du plan (cas d'égalité, existence de symétries, transitivité sur les drapeaux, etc.) Ces axiomatiques, jusque là, sont aussi valables pour les géométries non euclidiennes. Ce n'est que lorsqu'on introduit l'axiome des parallèles (le fameux postulat d'Euclide) qu'elles se séparent.

• La seconde est celle qui passe par l'algèbre linéaire, sur le corps des réels ou un autre. Elle permet de définir à la fois les espaces affines, euclidiens ou non, les espaces projectifs, la géométrie euclidienne et les autres. Elle est maintenant bien connue, au moins au niveau du savoir universitaire.

[21]Mais il y a beaucoup d'autres preuves de ce théorème, voir par exemple l'article de François Rideau dans le numéro 51 du magazine *Quadrature*.

1.3.2 Les coordonnées et le choix du linéaire

La question du choix d'une axiomatique est complexe. Elle peut être gouvernée par des raisons diverses, notamment didactiques. Sur le plan purement mathématique en tous cas, ce qu'il faut bien comprendre c'est qu'il est illusoire de vouloir séparer les domaines géométriques et numériques[22] : le nombre est dans la géométrie comme le ver est dans le fruit, ainsi qu'Emil Artin l'a montré très clairement (voir [Artin]). C'est l'une des faiblesses de la mathématique grecque de ne pas avoir pu prendre en compte ce fait, faute sans doute d'une manipulation simple des nombres[23]. Comme l'explique Lebesgue, l'invention des nombres décimaux par Stevin, au XVI-ième siècle, a sans doute joué un rôle crucial en permettant la naissance de la géométrie analytique[24].

Dans ce texte nous choisirons d'utiliser l'entrée par le linéaire, pour plusieurs raisons :

• Pour un mathématicien d'aujourd'hui, c'est de loin la plus simple.
• Toutes les autres axiomatiques peuvent s'y ramener.
• Ce choix permet d'avoir rapidement un panorama de l'ensemble des géométries.

Attention, ce choix n'est en aucun cas un choix didactique pertinent, au moins pour le collège et le lycée, comme l'échec de la réforme des "mathématiques modernes" l'a amplement montré.

1.3.3 Les autres géométries sont dans la projective

L'une des idées développée par Klein c'est que toutes les géométries peuvent être obtenues à partir de la géométrie projective et d'une donnée supplémentaire.

Le cas le plus simple est celui de la géométrie affine. Si l'on dispose d'un plan projectif réel, on récupère le plan affine comme complémentaire d'une droite D_∞ choisie arbitrairement comme droite à l'infini. Il est immédiat de décrire les propriétés affines en termes de cette droite. Ainsi, deux droites sont parallèles si elles se coupent sur D_∞. Une conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse selon qu'elle coupe D_∞ en 2, 1 ou 0 points.

[22]Le débat entre géométries analytique et synthétique qui a agité le XIX-ième siècle nous semble maintenant bien stérile.

[23]Chez les Grecs, les rationnels ne sont pas considérés comme des nombres mais comme des rapports de grandeurs, au travers de la théorie des proportions, qui contient aussi en germe les nombres réels. Il est indéniable que la théorie des proportions est une belle construction, parfaitement rigoureuse, mais elle est très délicate à utiliser.

[24]Et surtout de l'analyse, mais ce n'est pas notre sujet.

On obtient ensuite un plan vectoriel en fixant un point arbitraire. Quand on est dans le plan affine, on obtient la géométrie euclidienne en se donnant une forme quadratique définie positive sur le plan vectoriel associé, ou encore en se donnant deux points imaginaires à l'infini : les fameux points cycliques.

On obtient aussi, à partir du plan projectif réel $\mathbf{P}(E)$, les géométries non euclidiennes en se donnant une forme quadratique q non dégénérée sur E. Si la forme est définie positive ($X^2 + Y^2 + T^2$) on a la géométrie elliptique, si elle est de Lorentz ($X^2 + Y^2 - T^2$), la géométrie hyperbolique.

Une autre entrée vers la géométrie euclidienne est celle de la droite projective, mais cette fois sur $\mathbf{C}$. Ensemblistement, cette droite est en bijection avec $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ et on retrouve le plan affine euclidien, en bijection avec $\mathbf{C}$, en enlevant le point à l'infini (ou plus généralement un point quelconque).

On notera que la géométrie projective, dans les deux cas, apparaît comme une **compactification** de la géométrie euclidienne.

1.4 Quels groupes ?

1.4.1 Les divers groupes

Lorsqu'on utilise l'entrée par le linéaire, les groupes à considérer sont assez évidents. Dans le cas de la géométrie projective, le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ est associé à un espace vectoriel E de dimension 3 et le groupe qui vient avec cet espace est le groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de E, isomorphe au groupe des matrices 3×3 inversibles ou plutôt le groupe projectif $PGL(E)$ quotient de $GL(E)$ par les homothéties (qui sont triviales dans le projectif à cause de l'homogénéité des coordonnées). Les éléments de $PGL(E)$ sont appelés homographies. Pour obtenir la géométrie affine, on se limite aux homographies qui conservent D_∞, pour obtenir les groupes des géométries non euclidiennes on considère le groupe $O(q)$ des automorphismes qui conservent la forme quadratique donnée et sa variante projective $PO(q)$.

1.4.2 Les ensembles sur lesquels les groupes opèrent

Les groupes linéaires ou orthogonaux et leurs variantes projectives opèrent naturellement sur divers ensembles X associés au plan[25] : le plan lui-même, les droites du plan, les cercles (s'il en existe), les drapeaux (les couples point-droite (a, D) avec $a \in D$), les couples de points, de droites, les triangles, plus

[25]Projectif, affine, euclidien ou non.

généralement des objets du type $(a_1, \dots, a_r; D_1, \dots, D_s)$ formés de r points et s droites, j'en passe et des meilleurs.

1.5 Les isomorphismes de groupes

Les paragraphes IV, V, VI du programme d'Erlangen sont consacrés à illustrer une idée importante : si deux géométries correspondent à des opérations d'un **même** groupe (mais vu avec d'autres oripeaux) sur des ensembles différents, ce sont essentiellement les mêmes géométries. Klein donne plusieurs exemples de ce phénomène. En langage moderne, ces exemples correspondent à des isomorphismes bien connus (cf. [Perrin2] ou [Dieudonné]) entre groupes orthogonaux $PO(q)$ et linéaires $PGL(n, k)$, en particulier :

• L'isomorphisme $PO(q) \simeq PGL(2, \mathbf{R})$, où q est une forme de Lorentz réelle à 3 variables, c'est à dire une forme de signature $(2, 1)$.

• L'isomorphisme $PO(q) \simeq PGL(2, \mathbf{C})$, où q est une forme de Lorentz réelle à 4 variables, donc de signature $(3, 1)$.

• L'isomorphisme $PO(q) \simeq PGL(4, \mathbf{R})$, où q est une forme hyperbolique réelle à 6 variables, c'est-à-dire de signature $(3, 3)$.

Ces isomorphismes ont chacun une interprétation géométrique. Par exemple, le premier explique que la géométrie d'une droite projective et celle d'une conique propre, ou encore la géométrie hyperbolique du plan, sont une seule et même géométrie. Il n'est pas inutile ici de donner la formulation de Klein pour mesurer la difficulté d'une lecture du texte originel :

La théorie des formes binaires et la géométrie projective des systèmes de points d'une conique sont équivalentes, c'est-à-dire qu'à chaque théorème relatif aux formes binaires correspond un relatif à ces systèmes de points et réciproquement.

Nous verrons plus bas le lien entre Erlangen et la théorie des invariants. La conséquence d'un tel isomorphisme sur cette théorie c'est qu'une géométrie qui, comme celle-ci, se présente sous deux habits différents, possède les deux types d'invariants correspondants. Dans le cas présent, il s'agit d'une part du birapport, invariant de la droite projective, et d'autre part des invariants liés à la forme quadratique qui définit la conique et qui permettent de définir l'orthogonalité et les distances et angles hyperboliques[26]. L'existence d'un isomorphisme de groupes comme ci-dessus, avec comme sous-produit la cohabitation de deux types d'invariants est l'indice de ce que j'appelle une géométrie

[26] Bien entendu, ces deux types d'invariants se calculent les uns à partir des autres. Par exemple, pour quatre points de la conique, on a la formule : $[\![a, b, c, d]\!]^2 = \dfrac{\varphi(a, c)\varphi(b, d)}{\varphi(b, c)\varphi(a, d)}$ si on note φ la forme polaire de q, mais le fait qu'ils apparaissent sous deux formes multiplie les théorèmes.

riche. Or les isomorphismes entre groupes classiques ont été déterminés de manière systématique (voir [Dieudonné]) et on montre qu'il n'y en a qu'en dimension ≤ 5. Autrement dit, si on accepte la définition de géométrie riche proposée ci-dessus, il n'y a de telles géométries qu'en petite dimension.

2 Utilisation d'Erlangen et transitivité

On pourrait penser qu'aujourd'hui, les notions de groupes et d'opérations étant devenues familières à tous les étudiants en mathématiques, l'intérêt du programme de Klein s'est quelque peu émoussé. Il n'en est rien et je vais essayer d'en montrer quelques applications qui peuvent être utiles aux professeurs, y compris à un niveau élémentaire.

2.1 Ramener un problème affine au cas euclidien

L'idée est la suivante :

1) On repère que le problème est un problème affine. Cela signifie qu'il peut mettre en jeu les notions d'alignement, de concours, de parallélisme, de milieux, de rapports de mesures algébriques sur des droites parallèles, de barycentres, d'aires[27] (mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes).

2) On effectue une transformation affine[28] f (qui conserve les notions ci-dessus[29]) de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Le plus souvent cela revient à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (on transforme un triangle quelconque en un triangle équilatéral, un parallélogramme en un carré, etc.). Dans cette phase on utilise des résultats de **transitivité**[30].

3) On résout le problème ainsi simplifié (y compris, éventuellement, avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse f^{-1}.

Voici un exemple (sans grand intérêt, mais révélateur) d'application de cette technique. On veut montrer que les médianes d'un triangle sont concou-

[27] Les aires (ou plutôt leurs rapports) sont un invariant affine, et pas seulement euclidien, comme on le voit en regardant l'effet d'une symétrie oblique sur un triangle.

[28] Dont un exemple est l'affinité, autrefois connue dans les grandes classes du lycée.

[29] Dans le cas des aires, une application affine générale conserve seulement les rapports d'aires, mais cela suffit dans la plupart des applications.

[30] Rappelons que, si un groupe G opère sur un ensemble X, on dit qu'il est **transitif** si l'on peut envoyer n'importe quel $x \in X$ sur n'importe quel y au moyen d'un élément de G.

rantes. Comme la notion de médiane est affine, on aura gagné si on montre qu'on peut transformer le triangle en un triangle équilatéral par une application affine. En effet, les médianes seront alors aussi les médiatrices et on montre facilement que celles-ci sont concourantes. Le point crucial est donc le lemme suivant :

2.1 Lemme. *Le groupe affine est transitif sur les triangles.*

Démonstration. Il s'agit d'envoyer trois points A, B, C sur A', B', C' (non alignés). Il y a au moins deux façons de faire. Dans les deux cas on commence par envoyer A sur A' par translation.

a) Les points B et C sont transformés en B'' et C''. Il ne reste plus qu'à effectuer une transformation linéaire (avec A' comme origine) qui envoie la base $\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'C''}$ sur $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ et on a gagné.

b) On continue en utilisant successivement une rotation pour amener (AB) sur $(A'B')$, une homothétie pour envoyer B en B', une transvection pour déplacer C sur la parallèle à (AB) et rendre le triangle isocèle, enfin une affinité pour finir le travail.

2.2 Problèmes d'aires

Les problèmes d'aires sont sans doute, dans le cas affine, ceux qui se prêtent le mieux à l'utilisation des principes d'Erlangen. Voici deux exemples de ce type.

2.2.1 Les tiers

Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ au tiers le plus proche de B, C, A. Les droites (BJ) et (CK), (CK) et (AI), (AI) et (BJ) se coupent respectivement en P, Q, R. Déterminer l'aire du triangle PQR en fonction de celle de ABC.

Le problème est clairement affine (les seules notions mises en jeu sont les rapports $1/3$ sur une même droite et les aires). On peut donc, pour le résoudre, le transformer par une application affine. On peut alors supposer que l'on est dans le plan euclidien et on transforme ABC en un triangle **équilatéral** $A'B'C'$ de centre O comme on l'a vu ci-dessus. On dispose alors d'un outil supplémentaire[31] : les rotations de centre O et d'angles $\pm 2\pi/3$ qui permutent A, B, C, I, J, K et P, Q, R. On en déduit nombre d'égalités

[31] En vérité, cette transformation existe aussi dans le cas général : il existe une application affine qui permute (encore la transitivité) les points A, B, C et donc aussi les points I, J, K et P, Q, R, mais elle est moins évidente, au sens propre du terme.

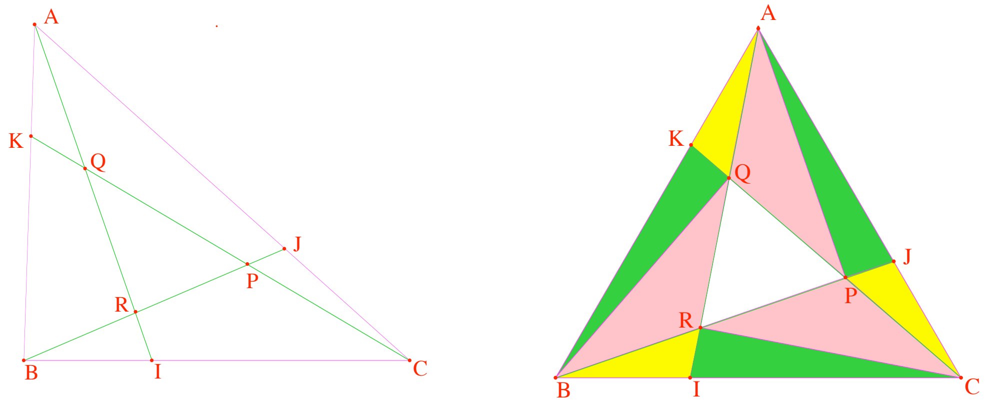

Figure 5: Les tiers

d'aires, par exemple celles des petits triangles CPJ, AQK et BRI, appelons t cette aire et prenons là comme étalon. Si on trace les segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ on voit que les triangles APJ, BQK et CRI ont pour aire $2t$ (c'est le lemme des proportions : ils ont même hauteur et une base double). La rotation montre aussi que les triangles APQ, BQR et CRP ont même aire et cette aire est encore égale à celle du triangle central PQR (c'est le lemme du chevron de [Perrin3]), on l'obtient par différence en appliquant encore le lemme des proportions aux triangles ARJ et CRJ). Mais alors, le lemme des proportions, encore lui, appliqué dans CQR, montre que l'on a $PQ = PC$, et en l'appliquant une dernière fois avec APQ et APC on en déduit que l'aire de APQ est égale à $3t$. On connaît maintenant toutes les aires des triangles en fonction de t et on en déduit que celle de ABC vaut $21t$. Comme celle de PQR est égale à $3t$, c'est le septième de ABC.

Bien entendu, cette preuve ne peut pas être proposée à un lycéen, car elle utilise la transitivité du groupe affine sur les triangles. Elle présente toutefois l'intérêt de donner très vite le résultat, qui n'est pas évident. Pour une preuve élémentaire quoique non totalement triviale, voir [Perrin3] exercice 223.

2.2.2 L'exemple du document d'accompagnement

L'exercice suivant est extrait du document d'accompagnement des actuels programmes de seconde (cf. [Accompagnement]).

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ? Même question avec $AMCD$, AMB et BMC.

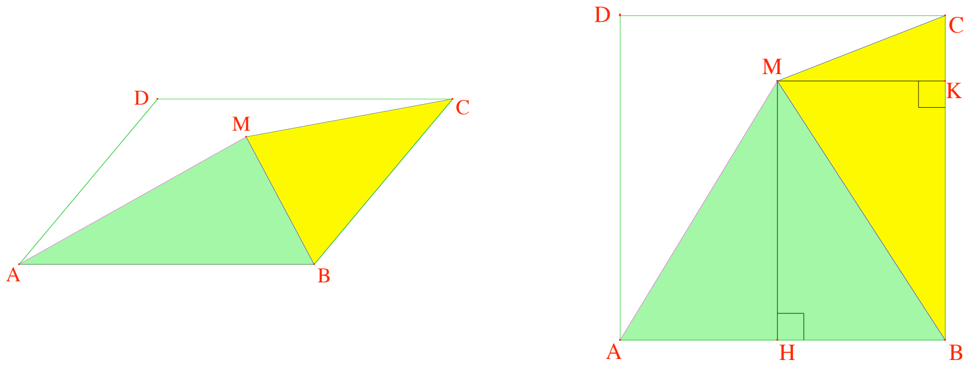

Figure 6: Le parallélogramme

L'énoncé du document suggère de commencer par le cas du carré, ce qui est une bonne suggestion ! En effet, comme les propriétés en question sont affines, on peut transformer la figure par une application affine. Le lemme est alors le suivant :

2.2 Lemme. *Le groupe affine est transitif sur les parallélogrammes*

On peut donc envoyer le parallélogramme sur un carré[32] et, dans ce cas, pour que les triangles AMB et BMC aient même aire, il faut et il suffit que les hauteurs MH et MK soient égales, donc que M soit sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$. Là se présente une petite difficulté pour revenir au cas général. En effet, comme la notion de bissectrice n'est pas affine on ne peut espérer que le lieu cherché soit encore la bissectrice dans le cas du parallélogramme. Cependant, il se trouve que la bissectrice, dans le cas du carré, n'est autre que la diagonale, et comme le fait d'être une diagonale est une propriété qui ne met en jeu que l'incidence, c'est elle qui est solution.

Commentaire. Ce type de réflexion théorique me semble un objectif important de la formation des maîtres. En effet, l'intérêt pour le professeur de cette vision des choses c'est qu'elle lui donne une méthode pour avoir rapidement le résultat, avec une preuve (même si celle-ci n'est pas utilisable en classe). Cela lui donne un "temps d'avance" sur ses élèves, toujours bien utile. Bien entendu, il faut ensuite donner une preuve élémentaire des résultats. Ici, ce n'est pas tout à fait immédiat, mais, le fait d'avoir repéré qu'on a affaire à

[32]Attention, si on peut toujours envoyer un parallélogramme sur un carré par une application affine (on envoie d'abord une moitié du parallélogramme et le reste suit par conservation du parallélisme), on ne peut pas envoyer un quadrilatère quelconque sur un carré. La transitivité, vous dis-je.

des propriétés affines indique qu'il faut utiliser ce que j'appelle les "lemmes du collège" sur les aires (lemme des proportions, du demi-parallélogramme, de la médiane, du trapèze, etc. voir [Perrin3]) et c'est un autre atout.

2.2.3 Un exemple projectif : le théorème à quatre points

Il s'agit sans doute du théorème le plus simple de la géométrie projective. On part de quatre points A, B, C, D du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

On construit les six droites qui les joignent, puis les trois points d'intersection de ces droites distincts de A, B, C, D : il s'agit de A', B', C', intersections respectives de (AD) et (BC) ; (BD) et (CA) ; (CD) et (AB). Ces points définissent trois nouvelles droites qui sont les côtés du triangle $A'B'C'$. On construit alors les points A'', B'', C'' intersections des côtés des triangles ABC et $A'B'C'$ (par exemple, A'' intersection de (BC) et $(B'C')$).

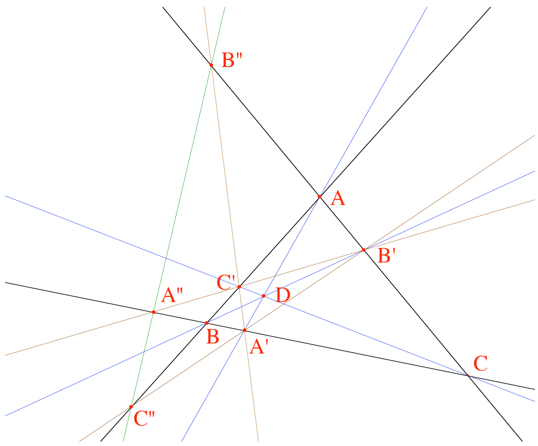

Figure 7: Le théorème à quatre points

Le théorème affirme que A'', B'', C'' sont alignés. Il y a de multiples preuves de ce résultat, notamment en utilisant les outils projectifs tels que le birapport. L'une de celles que je préfère est exactement dans l'esprit d'Erlangen. On choisit une droite à l'infini arbitraire, ce qui fait de son complémentaire un plan affine. On utilise alors un résultat de transitivité[33] qui affirme que lorsqu'on a quatre points A, B, C, D trois à trois non alignés[34], on peut les envoyer par une homographie sur quatre autres points vérifiant la même condition, par exemple des points qui, dans le plan affine, forment un triangle et son centre de gravité. Mais alors, les points A', B', C' sont les milieux des côtés du triangle et le résultat est une conséquence du théorème de la droite des milieux : $(A'B')$ est parallèle à (AB) donc elles se coupent sur la droite de l'infini. C'est donc là que sont alignés A'', B'', C''. Comme la construction et la propriété sont invariantes par homographie, on a le résultat.

[33] Encore !

[34] C'est ce qu'on appelle un repère projectif.

3 Transitivité, orbites, invariants

3.1 Orbites

On a vu quelle importance revêt la transitivité dans l'application du programme d'Erlangen. Bien entendu, l'action d'un groupe G sur un ensemble X n'est pas toujours transitive, mais ce défaut de transitivité n'est pas moins intéressant, car il conduit à la notion d'**orbite**[35] : l'orbite de x est l'ensemble des $y \in X$ que l'on peut échanger avec x *via* G. Les orbites forment une partition de X et on leur associe une relation d'équivalence $\sim$ définie par $x \sim x' \iff \exists g \in G,\ g.x = x'$: deux points sont équivalents si et seulement si ils sont dans la même orbite. La détermination de l'ensemble X/G des orbites est souvent un résultat essentiel dans une géométrie donnée, comme on le verra. Avec les orbites, on considère les **stabilisateurs** : G_x est le sous-groupe des $g \in G$ tels que $g.x = x$.

3.2 Invariants

3.2.1 Obstructions, invariants, critères de transitivité

Pour déterminer le quotient X/G il est nécessaire d'avoir des critères permettant d'affirmer que deux objets sont dans la même orbite et cette question mène tout droit à la notion d'invariant. En effet, la stratégie usuelle pour décrire X/G consiste à le paramétrer, et c'est la procédure suivante :

1) On repère des **invariants** de X sous G, autrement dit on construit une application $\Phi : X \to Y$, avec pour Y un espace "numérique", disons pour simplifier du type $\mathbf{R}^n$, de sorte que l'on a $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x))$ qui soit telle que $x' = g.x$ (c'est-à-dire $x \sim x'$) implique $\Phi(x) = \Phi(x')$. Autrement dit : si deux éléments sont dans la même orbite, ils ont mêmes invariants. L'application Φ induit alors une application $\overline{\Phi} : X/G \to Y$ définie par $\overline{\Phi}(\overline{x}) = \Phi(x)$.

2) On veut que Φ soit un **système complet d'invariants**, ce qui signifie qu'on a l'équivalence $x \sim x' \iff \Phi(x) = \Phi(x')$ ou encore que $\overline{\Phi}$ est injective. Lorsqu'on a un tel système on peut formuler ainsi les résultats de transitivité :

Deux éléments x et x' de X sont dans la même orbite si et seulement si leurs invariants (repérés par $\Phi(x)$ et $\Phi(x')$) sont les mêmes.

3) Il reste enfin à préciser **l'image** de Φ ou de $\overline{\Phi}$, c'est-à-dire à déterminer quels sont les invariants possibles. Nous reviendrons sur ce point dans la

[35] Par exemple, si X est le plan euclidien et G le groupe des rotations de centre O, les orbites sont les cercles de centre O.

section suivante.

Si on a réalisé ces trois opérations, X/G est connu[36]. Notons que Klein est parfaitement conscient de la nécessité de ce travail, puisqu'il formule ce programme : *On donne une multiplicité et un groupe de transformations ; développer la théorie des invariants relative à ce groupe.*

3.3 Une idée importante : la dimension

3.3.1 Définition

Le lecteur connaît bien la notion de dimension dans le cas des espaces vectoriels, mais, dans le cas présent, c'est plutôt de la notion de dimension d'une variété algébrique dont nous aurons besoin. Il s'agit là d'une notion de géométrie algébrique[37], mais nous nous contenterons ici d'une approche intuitive de ce concept, interprétant la dimension d'un objet géométrique comme le nombre de paramètres[38] dont il dépend. Ainsi, le plan est – bien entendu – de dimension 2, puisqu'un de ses points est défini par deux coordonnées. Si l'on considère les couples de points du plan, on obtient donc une variété de dimension 4. Si l'on pense aux demi-droites du plan, elles forment une variété de dimension 3 : 2 pour indiquer l'origine et 1 pour fixer la direction (repérée par un point d'un cercle centré à l'origine de la demi-droite).

Les groupes usuels de la géométrie sont aussi des variétés algébriques et, à ce titre, eux aussi ont une dimension. Par exemple, le groupe des isométries affines euclidiennes est de dimension 3 : 2 pour les translations, qui correspondent aux vecteurs, 1 pour les rotations vectorielles, qui correspondent aux angles. Le fait de rajouter les transformations de déterminant -1 ne change rien car on obtient deux copies de l'espace précédent. Si l'on passe aux similitudes, il faut ajouter 1 à la dimension, à cause des rapports d'homothéties. Le groupe affine, lui, est de dimension 6 : 2 pour les translations, mais 4 pour le groupe vectoriel qui est le groupe $GL(2)$ des matrices 2×2 inversibles. Le groupe projectif $PGL(3)$, enfin, est de dimension 8 ($GL(3)$ est de dimension 9, mais comme on tue les homothéties il faut retrancher 1).

[36] Au moins ensemblistement, car on espère pouvoir le munir de structures additionnelles, notamment de variété, analogues à celles de X. En vérité, la construction d'une telle structure sur X/G est, en général, excessivement difficile, voir [Mumford], mais on peut souvent construire le quotient pour les objets "génériques". Comme le dit Mumford : *To construct both orbit spaces and moduli "generically" are simple exercises.*

[37] Ou différentielle, selon les goûts de chacun.

[38] C'est d'ailleurs ainsi que Klein utilise ce concept. Il dit, par exemple : *Soit A une droite et B la triple infinité de transformations linéaires qui la reproduisent* – il s'agit de $PGL(2)$.

Bref, avec un peu d'habitude, on est capable de préciser sans trop de peine la dimension des objets géométriques usuels[39].

3.3.2 La formule de dimension associée à un morphisme

Lorsqu'on a un morphisme de variétés (ce sera le cas si cette application est définie de manière raisonnable), $f : X \to Y$, surjectif, et que certaines hypothèses sont satisfaites (voir [Perrin1], il faut notamment que les dimensions des fibres $f^{-1}(y)$ soient constantes) on a la formule : $\dim X = \dim Y + \dim f^{-1}(y)$. Cette formule, si elle n'est pas évidente, est en tous cas assez naturelle si l'on pense au cas où X est un produit $Y \times F$ et où le morphisme est la projection de X sur Y (les fibres sont alors constantes et égales à F et le modèle linéaire indique que la dimension du produit est la somme des dimensions des facteurs).

3.3.3 Lien avec les opérations

Lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble X et que l'un et l'autre sont des variétés, la notion de dimension permet de mieux comprendre l'opération et notamment les questions de transitivité, d'orbites, de stabilisateurs et d'anticiper le calcul de X/G.

Le premier fait à noter c'est que, si le groupe G opère transitivement sur X, on a $\dim G \geq \dim X$ et on a même une formule plus précise. En effet, si on fixe une origine a dans X, on a un morphisme[40] $\Phi : G \to X$, qui à g associe $g.a$, et dont les fibres sont toutes isomorphes à G_a (dire que $g.a = h.a$ c'est la même chose que dire que $g^{-1}h$ stabilise a). En vertu de la formule de dimension des fibres la dimension[41] de X est égale à $\dim G - \dim G_a$.

3.3.4 L'espace des orbites

Nous venons de voir que l'analyse des dimensions donne des conjectures de transitivité : pour que X opère transitivement sur X, il faut avoir

[39] À titre d'exercice, le lecteur déterminera la dimension de l'ensemble des droites de l'espace de dimension 3.

[40] En fait, X est le quotient (au sens ensembliste et, admettons-le, même si c'est loin d'être aussi évident, au sens des variétés) de G par le stabilisateur d'un point G_x : $X \simeq G/G_x$.

[41] En vérité, il y a surtout deux types d'exemples, par rapport à cette formule : soit l'opération est "génériquement transitive", c'est-à-dire que son image est de dimension égale à celle de X, et alors, le stabilisateur est de dimension $\dim G - \dim X$, soit l'opération n'est pas transitive, mais alors les stabilisateurs sont réduits à l'élément neutre, ou au moins sont finis, donc de dimension 0. Voici toutefois un contre-exemple : le groupe des homographies du plan opérant sur les quadruplets formés de deux points et de deux droites.

$\dim G \geq \dim X$. Elle donne aussi des informations dans le cas où l'opération n'est pas transitive. En effet, dans ce cas, on cherche à calculer l'ensemble des orbites X/G et à le munir d'une structure de variété, par exemple en le paramétrant à l'aide des invariants. Dans cette situation, la notion de dimension annonce de combien d'invariants on aura besoin. En effet, le nombre d'invariants correspond à la dimension du quotient X/G et c'est donc[42] $\dim X - \dim G$. Les exemples qui suivent vont permettre d'éclaircir ces concepts.

3.4 Transitivité, invariants, orbites : exemples

Nous donnons ci-dessous plusieurs exemples qui illustrent ce qui précède. Nous allons voir apparaître nombre d'invariants géométriques qui vont être utilisés pour mesurer un défaut de transitivité[43].

• Si G est le groupe des isométries et X l'ensemble des points du plan, comme les dimensions sont respectivement 3 et 2, on s'attend à ce que G opère transitivement sur X. De fait, en utilisant les translations ou les symétries axiales, on voit que G est transitif sur X. En revanche, on ne peut espérer que G, qui est de dimension 3, soit transitif sur l'ensemble des couples (ou des paires) de points du plan[44], qui est de dimension 4. Comme le défaut de dimension est 1, il faudra un invariant de dimension 1 pour décrire le défaut de transitivité du groupe des isométries sur les couples de points. Pas besoin d'être grand clerc pour deviner qu'il s'agit de la distance. De même, G est transitif sur l'ensemble X des demi-droites (de dimension 3), mais pas doublement transitif, même si l'on impose aux demi-droites d'avoir même origine (dimension 4) et on a encore besoin d'un invariant de dimension 1 qui est cette fois l'angle[45].

• Si G est encore le groupe euclidien, de dimension 3, et si X est l'ensemble des triangles, de dimension 6, l'argument de dimension montre qu'il est nécessaire d'avoir un invariant comprenant trois paramètres. Les invariants en question peuvent être de plusieurs types (distances, angles), toujours au nombre de trois, et les résultats escomptés sont les fameux "cas d'isométrie" des triangles. Leur intérêt majeur est de fournir un critère pour qu'on puisse envoyer un triangle sur un autre par une isométrie, sans être

[42] Au moins si les stabilisateurs sont finis.

[43] Il s'agira, le plus souvent, d'un défaut de multiple transitivité.

[44] On dit qu'il n'est pas doublement transitif.

[45] La question de l'orientation dépend du groupe choisi : déplacements ou isométries et du type de doublets : couples ou paires. En vérité, le cas des invariants orientés est plus complexe et il constitue une différence majeure entre la géométrie euclidienne et les géométries non euclidiennes, nous y reviendrons dans la dernière partie.

obligé de l'exhiber explicitement et c'est cela qui en fait toute la force : *il peut le faire* comme auraient dit Pierre Dacq et Francis Blanche.

• Si maintenant G est le groupe des similitudes, de dimension 4, on peut espérer qu'il opère doublement transitivement sur le plan, et c'est bien le cas, mais pas triplement. Précisément, si X est l'ensemble des triangles, l'argument de dimension indique qu'il faut deux paramètres qui peuvent être des angles ou des rapports de longueurs.

Les applications des cas d'isométrie et de similitude sont innombrables, voir [DPR] ou [Perrin6] ou n'importe quel manuel d'autrefois.

Voici un exemple très simple. On considère un triangle isocèle ABC avec $AB = AC > BC$. On porte des points D et E sur (AB) et (BC), tels que $BD = CE = AB - BC$. Montrer que ADE est isocèle.

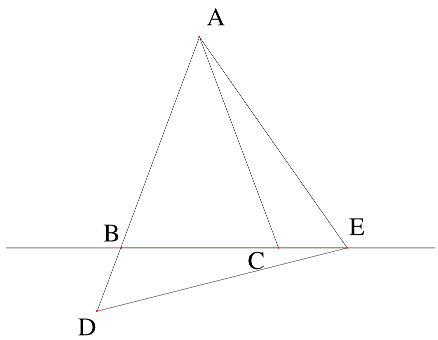

Figure 8: Utiliser les cas d'égalité

Bien entendu, on peut aussi traiter cet exercice en utilisant les transformations, mais ce n'est pas si évident car cela nécessite une construction supplémentaire.

• Si G est le groupe affine, qui est de dimension 6, on s'attend à ce qu'il n'y ait plus besoin de condition pour envoyer trois points sur trois autres. C'est bien le cas, et on l'a abondamment utilisé ci-dessus, **sauf** si ces points sont alignés. Dans ce cas, il y a un invariant, car même s'il n'y a pas de distance dans le plan affine, chaque droite est en bijection avec le corps de base (disons $\mathbf{R}$ ici) et on a une notion de mesure algébrique, définie à un scalaire près. L'invariant des triplets (a, b, c) de points alignés est alors le rapport $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ac}}\cdot$ Attention, en affine, cet invariant n'a plus de sens pour des points non alignés[46].

• Dans le cas du groupe projectif, de dimension 8, le groupe est non seulement transitif sur les triplets de points non alignés, mais sur les quadruplets de points formant repère (i.e. tels que trois quelconques d'entre eux ne soient

[46]D'ailleurs, il serait peut-être encore mieux d'écrire ce rapport comme un rapport de vecteurs.

pas alignés), comme on a déjà dit à propos du théorème "à quatre points". Dans le cas des points alignés, le groupe projectif de la droite est de dimension 3. En effet, il est formé des homographies $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et ces applications dépendent de 4 paramètres "homogènes". Ce groupe est triplement transitif sur les points, mais pas quadruplement transitif. Dans ce cas, il y a un unique invariant qui est, non plus le rapport des mesures algébriques comme dans le cas affine, mais leur birapport $[\![a,b,c,d]\!] = \dfrac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \dfrac{\overline{da}}{\overline{db}}$ et on peut envoyer quatre points sur quatre autres si et seulement si ils ont mêmes birapports.

3.5 Invariants projectifs, invariants linéaires

ll est bien naturel d'imposer aux invariants de dépendre des données $(a_1,\dots,a_r;D_1,\dots,D_s)$ de manière "régulière". Dans le cas où le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ce mot peut avoir le sens de continu, voire différentiable, mais sur un corps quelconque, les seules fonctions régulières dignes de ce nom sur les espaces projectifs sont les fonctions rationnelles. La recherche des invariants de transitivité va donc peu ou prou se ramener à la recherche algébrique des invariants rationnels sous l'action des groupes du type $PGL(E)$ ou $PO(q)$. On est alors tout proche d'un problème classique de théorie des invariants qui consiste à chercher les invariants polynomiaux de ces groupes. Attention toutefois, même si elles sont proches, les opérations des groupes sur E et sur $\mathbf{P}(E)$ ne sont pas équivalentes et les invariants polynomiaux, dont les prototypes sont les crochets $[a,b,c]$ (le déterminant de ces trois vecteurs) ou les valeurs $q(a)$ ou $\varphi(a,b)$ de la forme quadratique ou de sa forme polaire dans le cas métrique, "ne passent pas au quotient", c'est-à-dire n'ont pas de sens en projectif. En effet, si l'on multiplie par exemple le vecteur a par un scalaire, ce qui ne change pas le point du projectif puisque les coordonnées y sont homogènes, ces invariants changent. Pour obtenir des invariants projectifs, il faut utiliser des invariants rationnels, quotients des invariants polynomiaux, comme le birapport :

$$[\![(xa),(xb),(xc),(xd)]\!] = \frac{[xac]\times[xbd]}{[xbc]\times[xad]}.$$

ou encore l'invariant "anallagmatique" $I(a,b) = \dfrac{\varphi(a,b)^2}{q(a)q(b)}$.

3.6 Utilisation des invariants

Ce paragraphe est un grand coup d'épaule destiné à enfoncer une porte ouverte depuis bien longtemps : j'y explique que les invariants sont utiles au géomètre ! Il n'y a pas là une bien grande découverte et quiconque a fait un jour de la géométrie a utilisé abondamment les longueurs et les angles. Sans doute, l'utilisation des aires comme outil de démonstration est-elle un peu moins répandue. Le lecteur trouvera de multiples exemples d'utilisation de ces invariants dans[47] [Perrin3], [Perrin6], [DPR]. Je me contente ici de donner un exemple qui concerne le birapport, moins connu.

En ce qui concerne le birapport, le point crucial à connaître est la conservation du birapport par une perspective de centre o, c'est à dire l'égalité $[\![a, b, c, d]\!] = [\![a', b', c', d']\!]$ dans la figure ci-contre.

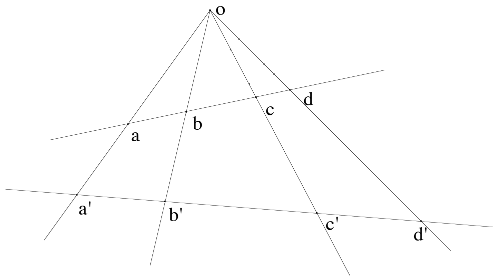

Figure 9: Conservation du birapport par perspective

Il y a de nombreuses preuves de cette égalité, certaines dans le droit fil d'Erlangen, d'autres plus élémentaires. Je renvoie le lecteur à l'analyse que j'en fais dans [Perrin7], paragraphe 4.

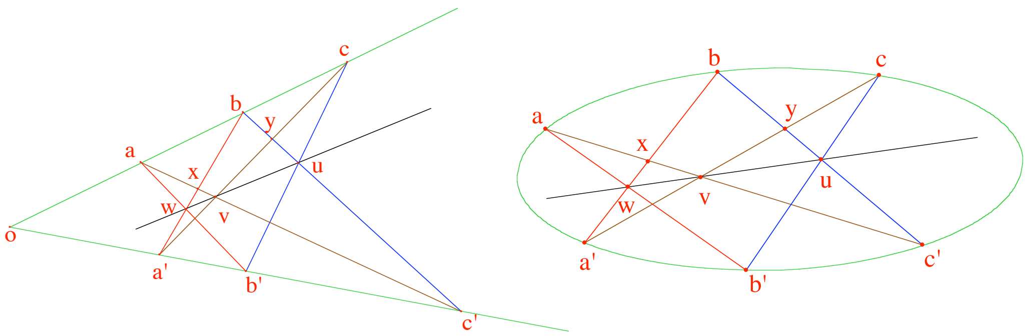

Figure 10: Preuves de Pappus et de Pascal

Comme application de cette propriété, voici une preuve du théorème de Pappus. Avec les notations de la figure 10, des perspectives de centre a et c donnent les égalités $[\![b, x, w, a']\!] = [\![o, c', b', a']\!] = [\![b, c', u, y]\!]$ et on en déduit

[47] J'ai pris le parti de ne citer que des textes de mon crû dans lesquels j'ai rassemblé des exemples que j'estime pertinents. Bien entendu, ces exemples sont classiques et proviennent la plupart du temps de manuels anciens

que la perspective de centre v de (ba') sur (bc') transforme w en u, ce qui prouve l'alignement. Le théorème de Pascal se prouve de manière analogue.

4 Invariants, relations et théorèmes

4.1 Dimension et origine des relations

4.1.1 Motivations

Reprenons la situation typique du programme d'Erlangen : un ensemble X sur lequel opère un groupe G, et le problème de la description de l'espace des orbites, c'est-à-dire du quotient X/G. La question générale, pour des objets algébriques, de l'existence d'un tel quotient qui admette une bonne structure de variété, est une question non triviale, voir par exemple [Mumford].

Dans ce qui suit nous nous contenterons d'étudier les cas "génériques" qui ne sont guère plus que des exercices, comme dirait Mumford. Il est vrai que justement, ce qui est difficile dans ces questions c'est de prendre en compte les dégénérescences, les bords, en quelque sorte. Mais c'est aussi là qu'on peut espérer obtenir des résultats intéressants. On peut penser à deux types d'applications. D'abord, dans un sens assez naturel, prolonger des résultats génériques à des cas particuliers (par exemple, étendre Pascal au cas des coniques dégénérées pour obtenir Pappus). Ensuite, de manière plus profonde, utiliser l'existence de quotients connexes pour montrer des résultats de "conservation du nombre" (par exemple, déduire le théorème de Bézout sur l'intersection des courbes planes du cas particulier des réunions de droites).

4.1.2 La situation générale

Une façon d'aborder le problème est d'utiliser un système complet d'invariants, donc de construire une application injective $\Phi : X/G \to Y$ où Y est l'espace des invariants, en général un espace affine ou projectif. Il s'agit de déterminer l'image de Φ. En général cette image est définie à la fois par des équations (le plus souvent polynomiales) et par des inéquations (inégalité triangulaire, somme des angles dans le cas non euclidien, etc.). Pour comprendre les relations qui correspondent à des égalités on utilise encore la notion de dimension.

Désignons respectivement par d, e, n les dimensions de X, G et Y et supposons (ce qui est le cas le plus courant pour une opération non transitive) que les stabilisateurs des points de X sont réduits à l'identité, voire finis. On sait alors que la dimension de X/G est égale à $d-e$ et on a donc $d-e \leq n$. En général, on a même l'inégalité stricte $d-e < n$. Cela signifie qu'on a “trop” d’invariants. Dans ce cas, les invariants ne sont pas indépendants, il y a des **relations** entre eux, et le sous-espace X/G de Y est une variété définie par une équation algébrique au moins. Nous allons voir que ces relations sont le cœur même de la géométrie associée. Voici d’abord quelques exemples élémentaires de cette situation.

4.1.3 Exemple 1 : le groupe orthogonal du plan vectoriel

Considérons l’opération du groupe orthogonal euclidien $O(q)$ (rotations et symétries orthogonales vectorielles) sur les couples (a, b) de vecteurs $a = (a_1, a_2)$ du plan, donc sur un espace de dimension 4. Comme $O(q)$ est de dimension 1, on s’attend à avoir 3 invariants. Ces invariants sont les longueurs et les angles, ou leurs avatars algébriques : produits et carrés scalaires. *A priori*, il y a 4 invariants : les carrés scalaires $(a|a)$ et $(b|b)$ et les produits scalaires $(a|b)$ et $(b|a)$. Bien entendu, dans ce cas, il y a une relation évidente : la symétrie du produit scalaire $(a|b) = (b|a)$.

Si l’on considère l’opération du groupe $O^+(q)$ des seules rotations, on voit surgir de nouveaux invariants : les déterminants $[a, b]$ et $[b, a]$: $[a, b] = a_1b_2 - a_2b_1$ (on peut les comprendre aussi comme des produits vectoriels, voire des aires). Comme O^+ est encore de dimension 1 il doit donc y avoir deux relations supplémentaires. L’une est évidente, c’est l’antisymétrie du déterminant $[b, a] = -[a, b]$. L’autre est plus intéressante, il s’agit de la relation dite de Lagrange :

$$(a|b)^2 + [a, b]^2 = (a|a)(b|b),$$

qui n’est autre que la formule bien connue $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

4.1.4 Exemple 2 : le groupe des isométries et les triangles

On a vu que le groupe des isométries du plan affine euclidien est de dimension 3. Dans son action sur l’espace des triangles abc, on a repéré des invariants : longueurs et angles. Il y a naturellement 6 invariants de ce type : les trois longueurs bc, ca, ab et les trois angles $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$ et on a ainsi un système plus que complet d’invariants. Dans ce cas X/G est de dimension 3 et Y de dimension 6. Il y a donc des relations entre les invariants. Elles sont à la fois bien connues et fondamentales :

• La somme des angles : $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$.

• les trois relations d’Al-Kashi du type $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab.ac\cos\widehat{a}$.

On notera que, comme on a $\dim Y - \dim(X/G) = 3$, on s’attendrait à trouver trois relations seulement. Le fait qu’il y en ait quatre est la preuve qu'elles ne sont pas indépendantes[48]. Il y a donc des relations entre les relations[49] !

4.1.5 Exemple 3 : additivité des aires

Considérons le plan affine P et le groupe des applications affines de déterminant 1 (donc celles qui conservent les aires). Ce groupe est de dimension 5 (2 pour les translations, 3 pour les matrices de déterminant 1). Il opère doublement transitivement sur le plan, mais pas triplement et l'invariant qui apparaît alors est simplement l'aire (algébrique) du triangle ABC, qui s'exprime comme un déterminant 3×3 en les coordonnées. Plus intéressant est le cas de l'opération sur les quadruplets. Comme P^4 est de dimension 8, on s'attend à avoir 3 invariants. Or, si on a 4 points A, B, C, D il y a 4 invariants associés : les aires des 4 triangles ABC, ABD, ACD et BCD. Cela nous indique qu'il y a sans doute une relation entre ces invariants, et, de fait, c'est simplement l'additivité des aires : $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(BCD) + \mathcal{A}(CAD)$.

4.2 Relations et théorèmes

4.2.1 Une citation de Bourbaki

L'importance des relations entre invariants ne tient pas seulement à leur usage pour la description des quotients X/G. En effet, ce sont elles aussi qui fournissent les théorèmes de la géométrie. L'un des points de départ de mon intérêt pour la théorie des invariants est d'ailleurs la lecture, dans les Éléments d'histoire des mathématiques de Bourbaki[50] (cf. [Bourbaki]), de la phrase suivante :

Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies[51]*" de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire.*

Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans

[48] On montre facilement le résultat sur la somme des angles à partir des autres.

[49] On parle de syzygies dans ce cas. Un théorème de Hilbert assure que cette chaîne finit par s'arrêter.

[50] Il me semble reconnaître dans cette phrase la plume de Jean Dieudonné.

[51] C'est le mot savant pour relations.

un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

Cette phrase m'a toujours interpellé[52] et je consacre actuellement une bonne partie de mon temps et de mon énergie à expliciter ce qu'elle signifie. Déjà, elle pose problème : que l'usage des invariants fournisse des résultats, certes, mais comment les relations entre les invariants donneraient-elles tous les théorèmes de manière mécanique ? Regardons d'abord deux exemples simples :

4.2.2 Un exemple simple : le concours des hauteurs

Soit ABC un triangle du plan euclidien. On choisit une origine O. La relation de symétrie (et la linéarité) du produit scalaire donne aussitôt :

$$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OC})=0.$$

Cette relation donne aussitôt le concours des hauteurs du triangle. En effet, si l'on choisit pour O l'intersection des hauteurs issues de B et C, les deux premiers produits scalaires sont nuls (par exemple, le premier n'est autre que $(\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{OA})$ par la relation de Chasles), donc aussi le troisième, et O est sur la troisième hauteur, voir figure ci-dessous.

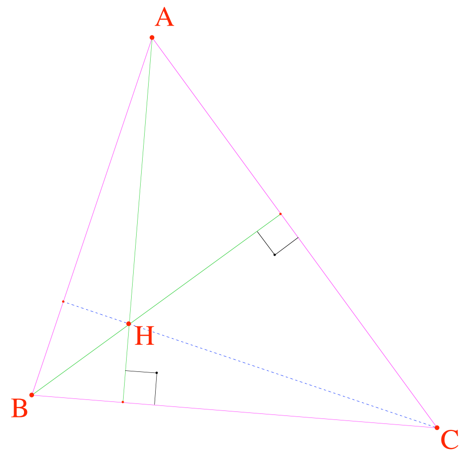

Figure 11: Concours des hauteurs

[52] J 'ai toujours été gêné, comme mathématicien professionnel, par le mépris qu'on y sent poindre.

4.2.3 Un autre : le concours des médianes

Cette fois il provient de la relation :

$$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\wedge\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\wedge\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\wedge\overrightarrow{OC}=\vec{0},$$

avec un raisonnement analogue.

4.3 Relations et théorèmes : l'exemple de Pappus

L'exemple du théorème de Pappus est peut-être la meilleure illustration de la phrase de Bourbaki ou, pour remonter plus loin dans l'histoire, de la construction d'un calcul géométrique tel que le rêvait Leibniz :

Je croys qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique linéaire, qui exprime directement la situation[53] *comme l'algèbre exprime la grandeur. ... Les calculs y sont de véritables représentations de la figure et donnent directement les constructions.*

Avant de décrire précisément ce calcul, on peut déjà tenter de l'imaginer, par exemple dans le cas de la géométrie projective. On doit évidemment disposer de deux sortes d'objets, des points, notés a, b, c, etc. et des droites, notées A, B, C. On doit aussi avoir des opérations d'incidence qui les relient (et que l'on peut noter avec le même symbole $\wedge$ si on a l'idée de la dualité) : à deux points distincts a, b on associe la droite $a \wedge b$ qui les joint, à deux droites distinctes A, B leur point d'intersection $A \wedge B$. On doit disposer de critères d'alignement de trois points a, b, c (resp. de concours de trois droites A, B, C) que l'on espère formuler sous forme algébrique : $[a, b, c] = 0$ (resp. $[A, B, C] = 0$). Enfin, on a besoin de règles de calcul pour travailler avec ces objets, par exemple pour calculer $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d)$, intersection des droites (ab) et (cd).

La définition de la géométrie projective *via* l'algèbre linéaire, rend facile la mise en œuvre de ce programme et fait le lien avec la théorie des invariants. En effet, dans le plan projectif, un point s'écrit à l'aide de 3 coordonnées homogènes : (x, y, t) et une droite aussi grâce à son équation $ux+vy+wt = 0$ qui donne les coordonnées (u, v, w). La droite (ab) a pour équation une forme linéaire $a \wedge b$ dont les coefficients sont les mineurs de la matrice

$$(ab) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

soit $a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$. Il n'y a rien de magique là-dessous. On vérifie en effet que cette forme est bien nulle en a (et de même

[53] Leibniz entend par là les propriétés géométriques.

en b) : c'est le développement par rapport à sa dernière ligne du déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$ qui est évidemment nul puisqu'il a deux lignes égales. Le calcul est identique pour $A \wedge B$ et l'alignement de 3 points a, b, c est donné par la nullité du déterminant des coordonnées : c'est lui le crochet $[a, b, c]$, et de même pour les droites. La remarque fondamentale est que ces crochets sont des **invariants**[54] dans l'action du groupe des homographies[55].

Revenons au théorème de Pappus. On considère la droite (ab'), définie par la forme $a \wedge b'$. Cette forme est ce qu'on appelle un **concomitant**. Cela signifie qu'elle varie "bien" quand on applique une homographie g, précisément qu'on a $g(a) \wedge g(b) = (\det g)\, {}^t g(a \wedge b)$. Le point u est donné par la formule $u = (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)$ et cette quantité est encore un concomitant. Mais, un théorème très général affirme[56] que les coordonnées des concomitants sont des invariants. Dans le cas présent, un calcul facile donne explicitement la formule :

$$w = (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b) = [a, a', b]b' - [b', a', b]a.$$

Mais alors, l'alignement de u, v, w, qui s'exprime par la nullité du crochet $[u, v, w]$, est donné par une magnifique relation entre invariants :

4.1 Proposition. *Soient $a, b, c, a', b', c' \in E$. On a la formule :*

$$[(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] =$$

$$[a, a', b][b, b', c][c, c', a][a', b', c'] - [a, a', c'][b, b', a'][c, c', b'][a, b, c].$$

On reconnaît dans le premier membre le déterminant $[u, v, w]$ et le théorème de Pappus résulte alors de la nullité des crochets $[a, b, c]$ et $[a', b', c']$, c'est-à-dire de l'alignement des points a, b, c et a', b', c'.

Il y a une foule d'exemples de ce style (le théorème de Desargues, la polaire, etc.)

4.3.1 Encore un exemple : le théorème des 6 birapports

J'ai découvert[57] ce dernier exemple au temps où j'enseignais la géométrie aux sévriennes et je lui garde une affection particulière dans la mesure où

[54] Ce sont même les seuls, voir plus loin.

[55] Ils sont invariants sous l'action des homographies de déterminant 1, les autres les multiplient par un scalaire, mais c'est sans importance.

[56] Il faut avoir choisi un repère lié aux points donnés, par exemple ici a, b, a', b'.

[57] J'ignore s'il était connu auparavant.

c'est lui qui m'a fait vraiment comprendre la fameuse phrase de Bourbaki. Il est issu de la géométrie anallagmatique. Le groupe correspondant est le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ dont l'invariant fondamental est encore le birapport :

$$[\![a, b, c, d]\!] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

Lorsque a, b, c, d sont 4 points distincts de $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, il est facile de calculer l'argument de $[\![a, b, c, d]\!]$ en termes d'angles orientés et le théorème de l'angle inscrit montre que les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.

Mais, si on a 8 points a, b, c, d, p, q, r, s, on a une relation, évidente mais splendide, entre les birapports ("le théorème des six birapports") :

$$[\![a, b, r, s]\!]\,[\![b, c, p, s]\!]\,[\![c, a, q, s]\!]\,[\![p, q, c, d]\!]\,[\![q, r, a, d]\!]\,[\![r, p, b, d]\!] = 1.$$

La traduction géométrique de cette relation est immédiate : si on a 8 points et si 5 des quadruplets ci-dessus sont cocycliques ou alignés, les birapports correspondants sont réels. Mais alors, le sixième birapport est aussi réel et donc les 4 derniers points sont aussi cocycliques ou alignés.

Cette relation entre les invariants est source de nombreux théorèmes géométriques. Un exemple est connu sous le nom de "lemme du pivot" : on a un triangle abc, des points p, q, r sur ses côtés et on montre que les cercles circonscrits aux triangles aqr, brp et cpq ont un point d en commun (voir figure ci-dessous). C'est exactement la relation ci-dessus, le point s étant à l'infini. On peut aussi montrer de cette manière le théorème des 6 cercles de Miquel (voir ci-dessous), ou celui de la droite de Simson, etc.

4.3.2 Bilan : le lien entre relations et théorèmes

Le principe qui gouverne à la fois la phrase de Leibniz et celle de Bourbaki est donc le suivant. Dans une géométrie donnée, associée à un groupe G, on a certaines données de base et des objets construits à partir de ces données. Les données sont repérées par des coordonnées (que l'on peut voir comme des indéterminées) sur un repère et les objets construits ont alors des coordonnées qui sont des invariants par rapport à celles des données. Les propriétés géométriques (alignement, colinéarité, cocyclicité, etc.) correspondent à des relations entre données et constructions, donc à des relations entre invariants.

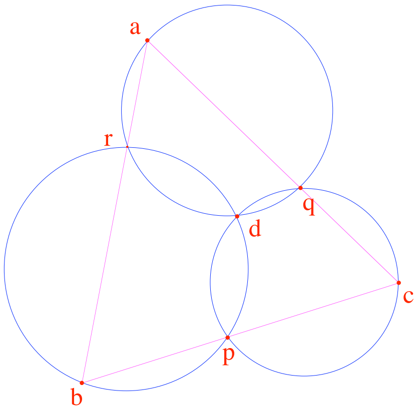

Figure 12: Le lemme du pivot

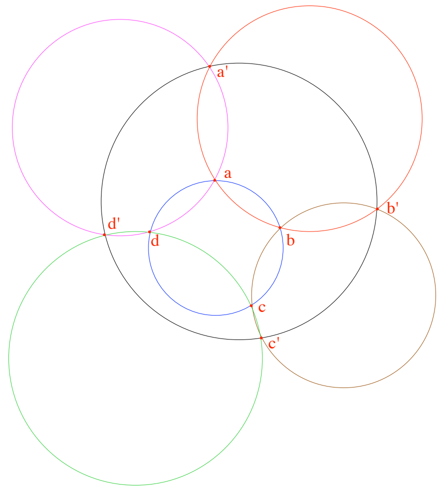

Figure 13: Le théorème des 6 cercles de Miquel

4.4 Détermination des invariants et des relations

Le plus fascinant peut-être, dans la théorie des invariants, c'est le résultat final : pour les groupes "classiques", **tous** les invariants et **toutes** les relations sont connus. C'est ce qui justifie la phrase de Bourbaki citée plus haut. Je vais me contenter ici d'un aperçu rapide sur ces résultats, qui sont difficiles, renvoyant le lecteur à [Perrin4] pour de plus amples informations.

4.4.1 Invariants polynomiaux

Un des intérêts majeurs de la voie que nous avons suivie pour entrer dans la géométrie, i.e. le choix de considérer les géométries comme sous-géométries de la géométrie projective et le choix d'entrer dans celle-ci par le linéaire, c'est que le cadre est maintenant un cadre mathématique familier, celui des représentations linéaires des groupes. Lorsqu'on a une telle représentation, elle induit aussitôt des représentations polynomiales. En effet, si le groupe G opère sur les vecteurs $a = (a_1, a_2, a_3), b, c, \ldots$, il opère aussi sur les fonctions $F(a, b, c, ...)$ (et notamment les fonctions polynomiales) par $g.F(a, b, c, \ldots) = F(g(a), g(b), g(c), \ldots)$. Ces fonctions n'ont pas de sens pour les points du projectif (car les coordonnées sont homogènes), mais des variantes rationnelles avec mêmes degrés en numérateur et dénominateur vont avoir un sens et on montre qu'il suffit de déterminer les invariants polynomiaux et leurs relations.

4.4.2 Détermination des invariants

Dans tous les cas des groupes classiques (disons ici linéaires et orthogonaux), on sait déterminer les invariants. Je me contente d'étudier le cas de la géométrie projective. Dans le cas du groupe $SL(E)$ on a vu apparaître comme invariants les crochets. En fait, ce sont les seuls :

4.2 Théorème. *Soit E un k-espace vectoriel de dimension 3. Les invariants polynomiaux du groupe $SL(E)$ sont les polynômes en les crochets $[a, b, c]$.*

En passant au projectif, ce théorème admet pour conséquence le fait que le seul invariant est le birapport :

4.3 Théorème. *Les fractions rationnelles géométriques de m points du plan $\mathbf{P}(E)$, invariantes sous l'action de $PGL(E)$, sont les fractions rationnelles en les birapports :*

$$[\![(xa), (xb), (xc), (xd)]\!] = \frac{[xac] \times [xbd]}{[xbc] \times [xad]}.$$

associés à 5 points x, a, b, c, d pris parmi les m. Il n'y a de telles fractions que si l'on a $m \geq 5$.

4.4.3 Détermination des relations

Non seulement on sait déterminer les invariants, mais aussi les relations entre eux. Voici le résultat en géométrie projective :

4.4 Théorème. *Soit E un k-espace vectoriel de dimension 3. L'idéal des relations entre les crochets est engendré par les relations du type $\mathcal{R}(a, b, c, d, x, y)$ suivant :*

$$[b, c, d][a, x, y] - [a, c, d][b, x, y] + [a, b, d][c, x, y] - [a, b, c][d, x, y] = 0.$$

4.4.4 Interprétation des relations

Comme on l'a vu, les relations entre invariants correspondent aux théorèmes et on en a vu quelques exemples ci-dessus. La question la plus intéressante consiste à étudier à quels théorèmes (fondamentaux, si l'on en croit Bourbaki) correspondent les relations fondamentales. Cette étude est effectuée en détail dans [Perrin4] dans les cas projectif et affine. Le résultat le plus probant c'est que la relation fondamentale a pour sous-produit l'égalité des birapports :

$$[\![(xa), (xb), (xc), (xd)]\!] = [\![(ya), (yb), (yc), (yd)]\!].$$

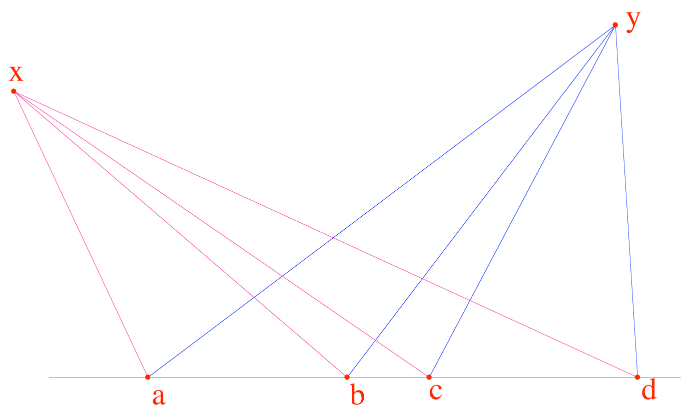

Figure 14: Birapports de droites et de points

En effet, appliquant les relations $\mathcal{R}(y, x, a, c\,; b, c)$ et $\mathcal{R}(y, x, b, d\,; a, d)$, on obtient $[x,a,c]\,[y,b,c] = [y,a,c]\,[x,b,c]$ et $[x,b,d]\,[y,a,d] = [y,b,d]\,[x,a,d]$, d'où le résultat avec la formule $[\![(xa),(xb),(xc),(xd)]\!] = \dfrac{[xac] \times [xbd]}{[xbc] \times [xad]}$. Cette relation, ou plutôt sa duale, signifie que les perspectives conservent le birapport et quiconque a manipulé la géométrie projective sait qu'il s'agit effectivement là d'un outil essentiel.

5 L'enseignement de la géométrie

5.1 Les principes de ma position

5.1.1 Principes politiques

Il n'est que temps de revenir sur terre, c'est-à-dire à l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée. J'ai déjà explicité à de nombreuses reprises mes positions sur le sujet, notamment dans le rapport sur la géométrie de la commission Kahane. N'ayant jamais enseigné dans le second degré et n'étant didacticien que par alliance, je n'ai pas vraiment qualité pour faire des propositions concernant l'enseignement. Je m'y risquerai pourtant, mais avec de multiples précautions.

D'abord, ma position est celle d'un mathématicien qui essaie de comprendre de manière rationnelle la situation de l'enseignement de la géométrie, à la lumière de ce que nous savons aujourd'hui de cette science. Attention, cette position était aussi, *grosso modo*, celle des éminents mathématiciens initiateurs de la réforme des mathématiques modernes (je pense à Dieudonné, Choquet, Revuz, etc.) Je n'oublie évidemment pas que cette réforme a été un fiasco et que cette expérience doit nous inciter à la plus grande prudence. Cela montre qu'il ne suffit pas d'être un mathématicien, même de première grandeur, pour avoir qualité pour faire des propositions pour l'enseignement secondaire ou primaire.

Ensuite, le système éducatif est un ensemble si complexe et si sensible qu'il faut se garder de lui faire subir des bouleversements trop violents. Il est essentiel de conserver un équilibre souvent précaire. C'est pourquoi, avant de promouvoir une réforme, on doit consulter et écouter les acteurs du système et les chercheurs qui réfléchissent sur son fonctionnement. Je suis, par principe, hostile à toutes les formes de lobbying pour faire prévaloir mes positions, même si je suis convaincu de leur pertinence, la conviction, en ce domaine, étant beaucoup moins assurée qu'en mathématiques.

Enfin, je ne voudrais pas céder, dans ce texte, à la tentation de donner quelques opinions définitives sans les étayer par des arguments solides. Faute de place, je renvoie donc le lecteur à différents textes dans lesquels j'ai abordé ces questions plus en détail, et notamment [Kahane], [DPR], [Perrin 6,8].

5.1.2 Principes mathématiques

Sur le plan purement mathématique, je résumerai mes principes ainsi :

- Le programme d'Erlangen reste un point de départ incontournable.

- L'entrée par l'algèbre linéaire est à bannir avant l'enseignement supérieur.
- L'idée de transitivité est essentielle.
- Le rôle des invariants est primordial.
- Il n'y a de géométries riches qu'en petite dimension.
- Pour comprendre la géométrie euclidienne, il est important de la comparer aux autres géométries, notamment hyperbolique et elliptique.

Je détaille ci-dessous, brièvement, les premiers points, et de manière un peu plus approfondie, le dernier.

5.1.3 Vous avez dit Erlangen ?

Que l'on me comprenne bien, même si je considère que le programme d'Erlangen est le socle de la géométrie moderne, il n'est pas question de l'enseigner, sous quelque forme que ce soit, au collège et au lycée. Ce qui me semble important, en revanche, c'est que les futurs professeurs en aient entendu parler, avec des idées d'utilisation dans le style de celles que j'ai développées ci-dessus. Il y a là un principe fondateur de la formation des maîtres, que j'ai d'ailleurs développé dans le rapport de la commission Kahane sur le sujet, et qui justifie qu'on demande plus aux futurs professeurs que le simple contenu des classes. L'idée essentielle c'est que les contenus de l'enseignement supérieur, même s'ils ne s'appliquent pas tels quels dans les classes, donnent aux maîtres un **temps d'avance** sur leurs élèves.

5.1.4 L'algèbre linéaire

C'est l'un des enseignements majeurs de la réforme des maths modernes : vouloir enseigner l'algèbre linéaire avant la géométrie c'est mettre la charrue avant les bœufs et il est sans doute plus raisonnable de réserver cette introduction aux premières années de l'enseignement supérieur, en la préparant dans le second degré par une pratique de la géométrie vectorielle[58]. Il y a actuellement consensus sur ce point.

5.1.5 Transitivité

J'ai essayé de montrer ci-dessus que cette idée de transitivité est essentielle. Tout cela a pu sembler bien théorique, mais ce principe a des conséquences très pratiques : c'est le défaut de transitivité qui donne naissance aux invariants (dont on redira dans un instant l'importance), et les critères de transitivité sont souvent les théorèmes les plus efficaces qui soient, et notamment les cas d'isométrie et de similitude des triangles.

5.1.6 Invariants

Là encore, les justifications théoriques ne font que voler au secours de la victoire : chacun sait que les invariants sont des outils fondamentaux du géomètre. Ce qui précède n'a pour but que d'insister sur les plus mal-aimés d'entre eux : aires et angles notamment.

5.1.7 Les géométries riches

[58]Comme il est dit dans [Kahane] : *D'ailleurs, l'intérêt du lien entre algèbre linéaire et géométrie nous semble plutôt en sens inverse, dans le fait que la géométrie usuelle en dimensions* 2 *et* 3 *fournit un support intuitif pour travailler en dimension supérieure à* 3, *voire en dimension infinie (par exemple en analyse fonctionnelle), voire sur un anneau au lieu d'un corps, etc.* Pour une discussion sur ce thème, voir la thèse de G. Gueudet-Chartier, Grenoble, Université Joseph Fourier, 2000.

En ce qui concerne les géométries riches, on peut déplorer que les lycéens d'aujourd'hui n'en voient plus aucune. De ce point de vue, il ne semble pas impossible d'aborder, en terminale S et en utilisant les complexes, quelques rudiments de géométrie anallagmatique. En vérité, j'évoque surtout ce point pour rassurer les professeurs : si le cœur de la géométrie est en dimension 2 et 3 (et éventuellement 4), il n'y a pas à regretter de négliger les dimensions supérieures.

5.2 Comparer les géométries

Les premiers principes évoqués ayant été traités ci-dessus, je reviens sur le dernier qui est peut-être le moins évident. Même si, du point de vue de l'enseignement, c'est essentiellement la géométrie euclidienne qui nous intéresse, la connaissance des autres géométries est loin d'être inutile[59]. En effet, elle nous apprend une foule de choses et la comparaison avec la géométrie euclidienne permet d'en montrer les spécificités. La première chose qu'il faut noter, me semble-t-il, c'est que la géométrie euclidienne, parmi les géométries métriques, n'est pas une géométrie générique. Au contraire, elle est singulière[60] car elle correspond à une forme quadratique dégénérée et nous allons voir qu'il y a beaucoup d'outils qui ont un sens en euclidien et pas dans les autres géométries. Cette idée est importante car, en dépit du souhait d'unification et de généralisation qui obsède toujours les mathématiciens, elle impose sans doute de ne pas traiter la géométrie euclidienne comme les autres.

5.2.1 La taille des groupes

Une première différence entre les géométries réside dans la taille de leurs groupes. Certes, tous les groupes d'isométries, euclidien ou non, sont de dimension 3, mais en géométrie euclidienne on dispose d'un groupe, directement lié à la structure et de dimension 4 : le groupe des similitudes, que Klein appelle le groupe principal. La manifestation géométrique de cet excédent est l'existence des similitudes (et notamment des homothéties) dans le cas euclidien. Ces transformations ne conservent certes pas les distances, mais elles conservent cependant les angles et aussi les rapports de distances. On

[59]Le lecteur trouvera ci-dessous quelques figures de géométrie hyperbolique ou elliptique qui sont là à titre de publicité pour le travail d'Yves Martin [Martin].

[60]Jacqueline Lelong-Ferrand, avec sa vision de géomètre différentielle, considérait que la géométrie hyperbolique était encore assez proche de la géométrie euclidienne mais que la géométrie elliptique en était radicalement différente. Avec mon regard d'algébriste, je ne partage pas tout à fait cette opinion, voyant au contraire comme voisines les deux géométries non euclidiennes et comme exotique la géométrie euclidienne.

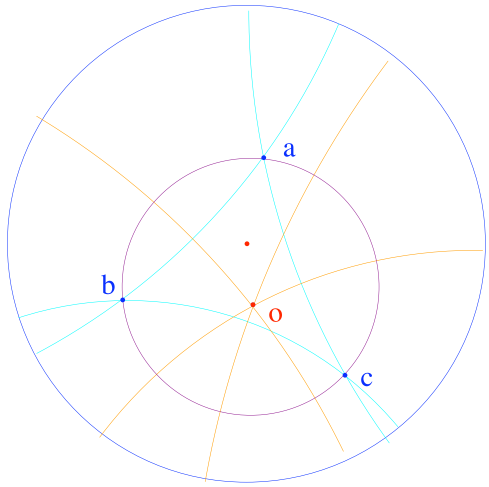

Figure 15: Concours des médiatrices hyperboliques

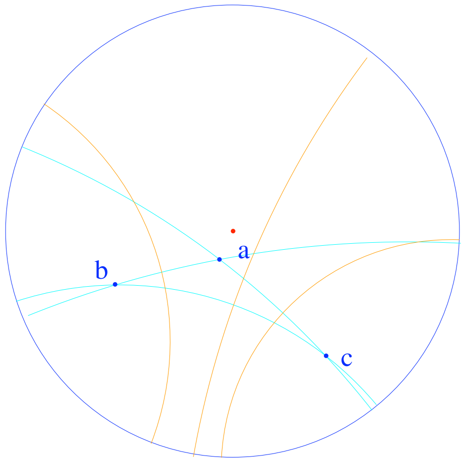

Figure 16: Concours dites-vous ?

sait quelle place tiennent ces derniers dans la géométrie euclidienne (penser au théorème de Thalès, entre autres) et combien Euclide utilise les cas de similitude des triangles. Il n'y a rien de tel en géométrie non euclidienne.

5.2.2 Le dévissage des groupes

Une autre différence essentielle entre les géométries est la suivante. Dans la géométrie euclidienne le groupe des similitudes $Sim(X)$ possède une chaîne de sous-groupes distingués : les isométries $Is(X)$, les déplacements $Is^+(X)$, les translations $T(X)$. Autrement dit on a affaire à un groupe très "dévissé" comme disent les théoriciens des groupes. Ce n'est pas du tout le cas du groupe des isométries non euclidiennes qui est simple[61] (ou presque), dans les deux cas. De plus, les quotients de $Sim(X)$, à chaque cran, sont abéliens, et cela fournit, dans chaque cas, des invariants "orientés", qui ont des propriétés algébriques (ils se multiplient ou s'ajoutent). Le quotient Sim/Is est décrit par le rapport de similitude, qui est un réel $\neq 0$ et se comporte multiplicativement, le quotient Is/Is^+ correspond au caractère direct ou indirect des transformations, c'est-à-dire au signe, avec la règle du même nom, le quotient Is^+/T est isomorphe au groupe additif des angles orientés, enfin le quotient T/Id est isomorphe au groupe additif des vecteurs. On voit que

[61] C'est-à-dire qu'il n'a pas de sous-groupe distingué non trivial.

chaque pas donne naissance à un invariant fondamental. Il n'existe rien de tel en géométrie non euclidienne, au moins de manière globale. Tout juste peut-on, en se limitant aux transformations qui conservent une droite ou un point, obtenir des vecteurs **sur une droite** et des angles orientés **autour d'un point**, mais rien qui, comme les notions euclidiennes correspondantes, fonctionne dans tout le plan[62].

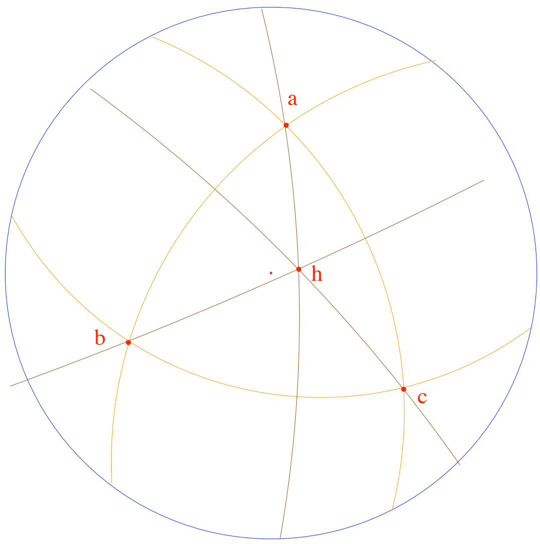

Figure 17: Concours des hauteurs elliptiques

5.2.3 Du côté de la géométrie affine

La géométrie euclidienne a une particularité importante, c'est d'être une géométrie affine, donc de donner lieu à la notion de parallélisme qui est un élément essentiel dans la géométrie d'Euclide alors qu'elle est sans intérêt en non euclidien. En elliptique, c'est évident car il n'y a pas de parallèles du tout. En hyperbolique, il y a deux notions de parallèles. La notion grossière (ne pas se couper) est manifestement trop vague (il y a une infinité de parallèles à une droite passant par un point, c'est une propriété ouverte, donc très faible). La notion fine (se couper sur l'horizon) semble plus pertinente, mais mon expérience c'est qu'elle ne présente guère d'intérêt non plus. C'est évidemment un paradoxe, car les géométries non euclidiennes sont nées de l'analyse de l'axiome des parallèles, mais la connaissance a parfois de ces errances.

[62]Par exemple, si l'on compose des rotations (resp. des translations), l'angle (resp. le vecteur) de la composée n'est pas la somme des angles (resp. des vecteurs).

Un autre aspect de ce caractère affine de la géométrie euclidienne, c'est l'importance de l'invariant aire, invariant affine fondamental. En géométrie non euclidienne, on peut définir encore cet invariant (par des voies différentielles voire algébriques), mais il est redondant, donc inutile. En effet, et c'est l'un des résultats fondamentaux de la théorie (le théorème de Gauss-Bonnet) l'aire d'un triangle est égale à l'écart à π de la somme de ses angles.

5.2.4 L'invariant angle : un bien meilleur outil en euclidien

C'est peut-être l'aspect le plus spectaculaire au niveau élémentaire[63] : si l'on souhaite utiliser l'invariant angle en géométrie non euclidienne, on est vite démuni car aucune des techniques euclidiennes ne s'y généralise. On a vu ci-dessus qu'on perd la somme des angles d'un triangle et tout ce qui va avec (complémentaires et supplémentaires notamment). Les triangles équilatéraux peuvent avoir à peu près n'importe quel angle. De même, les carrés peuvent avoir des angles variables, mais surtout pas quatre angles droits : il n'y a pas de rectangles en géométrie non euclidienne. Faute de parallèles, il n'y a plus d'angles alternes-internes ou correspondants. Le théorème de l'angle inscrit ne fonctionne plus en non euclidien. Enfin, comme on l'a vu, il n'y a plus d'angles orientés utilisables. Bref, si l'invariant angle existe encore en géométrie non euclidienne, il a perdu bon nombre de ses charmes.

Une conséquence fondamentale de cette pauvreté de la notion d'angle c'est que les cas d'isométrie des triangles ne sont guère utiles en géométrie non euclidienne. Je me demande parfois si ce fait n'est pas l'un de ceux qui leur a valu le long exil que leur a infligé la réforme des maths modernes.

5.2.5 La dualité

Je ne voudrais pas que le lecteur croie que la géométrie euclidienne est le paradis et que les autres sont infernales. Elles ont d'autres avantages, et notamment un atout fondamental, l'existence d'une dualité, totalement absente en euclidien.

5.3 Que faire ?

Mon opinion, c'est que la constatation que les géométries non euclidiennes sont fondamentalement différentes de la géométrie euclidienne sur nombre d'aspects a une conséquence didactique : celle de nous conduire à tenir compte, sans vergogne, de la spécificité de la géométrie euclidienne. J'ai déjà dit, à maintes reprises et en maints endroits, ce que j'entendais par là :

[63] Et cela revêt pour moi un sens didactique crucial !

un meilleur usage des invariants (longueur, angle, aire) et des cas d'isométrie et de similitude des triangles. Bien entendu, nous devons – tout de même – intégrer à notre enseignement quelques-uns des progrès essentiels qui ont été accomplis depuis Euclide. En vérité, j'en vois trois essentiels :

• Les nombres. C'est le talon d'Achille de la mathématique grecque. L'absence d'une notion utilisable de nombres rationnels, voire réels, a bloqué les grecs, les empêchant notamment de résoudre les problèmes classiques de construction à la règle et au compas (duplication du cube, trisection de l'angle, etc.). Heureusement, Stevin a inventé les décimaux, et nous disposons ainsi d'un outil que l'on peut enseigner dès le primaire, heureusement aussi, Descartes a inventé la géométrie analytique. Profitons-en.

• Les invariants orientés et vectoriels. Je pense aux vecteurs et aux angles orientés. Là encore il s'agit d'un progrès essentiel, notamment, dans le cas des vecteurs, par leur usage en physique[64]. Dans le cas des angles, l'usage des angles orientés est essentiel pour définir les rotations. Toutefois, je suis partisan de ne pas les introduire trop tôt, et avec modération. Au collège et au début du lycée, les angles non orientés sont bien suffisants

• La notion de groupe. On a vu que c'est le fondement de la géométrie au sens de Klein et il est important de s'en approcher. En revanche, il faut lui laisser le temps d'apparaître à son heure, sans doute à la toute fin du lycée.

D'une manière générale, ce que l'échec de la réforme des mathématiques modernes nous a appris, et qu'il ne faut jamais oublier, c'est qu'il est des apprentissages dont on ne peut faire l'économie et celui de la géométrie, à coup sûr, en est un, et que ces apprentissages demandent du temps et des efforts. En cette période où l'on ne cesse de diminuer le temps passé à l'École, il n'est sans doute pas inutile de le rappeler.

6 Références

[Accompagnement] *Document d'accompagnement des programmes, mathématiques, classe de seconde*, CNDP (2000).

[Artin] ARTIN Emil, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars (1978).

[Bourbaki] BOURBAKI Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann (1960).

[Cousin-Fauconnet] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin (1995).

[Deltheil-Caire] DELTHEIL Robert et CAIRE Daniel, *Compléments de géométrie*, Baillière (1951).

[64] Si toutefois les physiciens veulent bien se servir des outils que nous leur mitonnons !

[Dieudonné] DIEUDONNÉ Jean, *La géométrie des groupes classiques*, Springer (1971).

[DPR] DUPERRET Jean-Claude, PERRIN Daniel, RICHETON Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 2001.

[Euclide] EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Kayas, Éditions du CNRS (1978).

[Hilbert] HILBERT David, *Les fondements de la géométrie*, Dunod (1971).

[Kahane] KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob (2002).

[Kahane-FdM] KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *Rapport sur la formation des maîtres*, disponible en ligne :

http ://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/

[Klein] KLEIN Felix, *Le programme d'Erlangen*, Jacques Gabay (1991).

[Lion] LION Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert (2001).

[Martin] MARTIN Yves, *Conception et mise en oeuvre de micromondes de géométries non-euclidienne dans le cadre de la géométrie dynamique, illustrées avec Cabri-géomètre. Expérimentation en formation des maîtres.*, thèse Université de Grenoble (2003), disponible en ligne :

http ://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Formateurs/Yves/these.html

[Mumford] MUMFORD David, FOGARTY J., KIRWAN F., *Geometric invariant theory*, Springer (1994).

[Perrin1] PERRIN Daniel, *Introduction à la géométrie algébrique*, Interéditions (1995).

[Perrin2] PERRIN Daniel, *Cours d'algèbre*, Ellipses (1996).

[Perrin3] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005).

[Perrin4] PERRIN Daniel, *Géométrie projective et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes*, en préparation.

[Perrin5] PERRIN Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, en projet.

[Perrin6] PERRIN Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.* Repères IREM, 53, p. 91-110, 2003.

[Perrin7] PERRIN Daniel, *Autour du théorème de Thalès*, conférence à l'IREM de Paris 7, juin 2006.

[Perrin8] PERRIN Daniel, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, 2000.

[Russo] RUSSO François s.j., *Postface du programme d'Erlangen*, voir [Klein].