Le grand théorème de Poncelet

Daniel PERRIN

Plan

Triangles et cercles

Le théorème de Poncelet (1813)

Une preuve inspirée de celle de Jacobi (1828)

Voir ma page web : http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/
Géométrie projective et applications aux géométries non euclidiennes et euclidienne (Partie III : coniques)

Une excellente référence historique est l'article de Bos, Kers, Oort et Raven :
Poncelet's closure theorem
Expo. Math. 5, 289-364 (1987).

Le point de départ : un triangle, son cercle circonscrit et son cercle inscrit

Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, R son rayon, I le centre du cercle inscrit, r son rayon. On pose $d = OI$.

On a la formule (Chapple, 1746) :

$$R^2 - d^2 = 2rR$$

(souvent attribuée à Euler).

Conséquence :

d'autres triangles inscrits-circonscrits

On considère l'application $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$ de l'espace des triangles dans l'espace des couples de cercles, qui associe à un triangle ses cercles circonscrit et inscrit. Les variétés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ sont de dimension 6, mais Φ tombe dans la sous-variété de dimension 5 définie par $R^2 - d^2 = 2rR$.

Il en résulte que ses fibres sont de dimension 1. Cela signifie que, pour deux cercles donnés de l'image (i.e. inscrit et circonscrit à un triangle), il y a une infinité de triangles inscrits-circonscrits.

Plus précisément :

Si A' est un point quelconque du cercle circonscrit et si on mène les tangentes issues de A' au cercle inscrit, elles recoupent le circonscrit en B', C' et $(B'C')$ est encore tangente à l'inscrit.

C'est le premier exemple du théorème de Poncelet : si on a deux cercles et si une ligne inscrite-circonscrite se referme en trois coups, toutes les lignes inscrites-circonscrites se referment en trois coups.

Généralisations

• La même propriété vaut en remplaçant le cercle inscrit par le cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$.

• La propriété se conserve si l'on transforme les cercles par une application affine.

• La propriété se conserve si l'on transforme les cercles par une application projective (appelée aussi homographie).

• La propriété vaut pour des polygones à un nombre quelconque de côtés.

Le plan projectif

Le plan projectif s'obtient à partir du plan affine en adjoignant une droite à l'infini.

Algébriquement on peut le voir comme l'ensemble des points de coordonnées homogènes (x, y, t), avec $x, y, t \in k$, corps quelconque.

Homogène signifie qu'on identifie (x, y, t) et $(\lambda x, \lambda y, \lambda t)$ avec $\lambda \neq 0$.

Les points à l'infini correspondent à $t = 0$. Les autres aux points $(x, y, 1)$.

Les bonnes transformations du plan projectif sont les homographies, induites par les applications linéaires bijectives de k^3.

Le plan projectif (suite)

Les courbes algébriques projectives ont des équations homogènes, par exemple la droite affine $ux + vy + w = 0$ devient $ux + vy + wt = 0$, la conique $y - x^2 = 0$ devient $yt - x^2 = 0$. On retrouve les courbes affines en faisant $t = 1$, on a leurs points à l'infini en faisant $t = 0$.

Dans le plan projectif, deux droites distinctes ont toujours un point commun, à distance finie ou à l'infini. Les coniques propres non vides sont toutes équivalentes par homographie.

Jean-Victor Poncelet

Né en 1788, élève de l'École Polytechnique, lieutenant du génie dans les armées napoléoniennes. Il participe à la campagne de Russie. Il est laissé pour mort à la bataille de Krasnoi en 1812 et passe 15 mois en captivité à Saratov.

C'est là qu'il fonde la géométrie projective et démontre son "grand théorème".

Le grand théorème de Poncelet (version originale)

Applications d'analyse et de géométrie (1862), sixième cahier :

Il est impossible, généralement parlant, d'inscrire à une courbe donnée du deuxième degré un polygone qui soit en même temps circonscrit à une courbe de ce degré, et quand la disposition particulière de ces courbes sera telle que l'inscription et la circonscription simultanée soient possibles pour un seul polygone essayé à volonté, il y en aura, par là même, une infinité jouissant de cette propriété à l'égard des coniques données.

Lignes de Poncelet

Soient Ω et C deux coniques propres du plan projectif.

On appelle **ligne de Poncelet** inscrite dans Ω et circonscrite à C une suite de points $a_i \in \Omega$ ($i \in \mathbf{Z}$) tels que, pour tout i, les droites $(a_i a_{i-1})$ et $(a_i a_{i+1})$ soient les deux tangentes à C issues de a_i.

Une telle ligne est dite **périodique** de période $n \in \mathbf{N}^*$ si l'on a $a_i = a_{i+n}$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Le grand théorème de Poncelet (version moderne)

S'il existe une ligne de Poncelet inscrite dans Ω et circonscrite à C qui soit périodique de période n, toutes les lignes de Poncelet associées à Ω et C sont périodiques de période n.

Deux précautions

• On peut supposer que le corps de base est algébriquement clos, par exemple le corps des complexes $\mathbf{C}$. Les coniques Ω et C se coupent alors en quatre points, éventuellement confondus.

• Nous ferons l'hypothèse simplificatrice que les coniques Ω et C sont **transverses** (autrement dit qu'elles se coupent en quatre points distincts).

On montre alors qu'en choisissant un repère convenable, les coniques Ω et C ont pour équations :

$$y^2 - xt = 0 \quad \text{et}$$

$$\alpha y^2 + 2\beta yt + \gamma t^2 - 2xy = 0 \quad \text{avec} \quad \gamma \neq 0.$$

Le principe de la preuve, 1 : la conique duale C^*

Une droite projective D a pour équation $ux + vy + wt = 0$, on lui associe ses coordonnées homogènes (u, v, w), de sorte que les droites forment aussi un plan projectif dit "dual". Dire que D est tangente à la conique C d'équation :

$$\alpha y^2 + 2\beta yt + \gamma t^2 - 2xy = 0$$

s'écrit :

$$(\alpha\gamma - \beta^2)u^2 + 2\gamma uv - 2\beta uw - w^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une conique du plan dual, que l'on note C^*, et dont les points sont les tangentes à C.

Le principe de la preuve, 2 : la variété d'incidence V

La **variété d'incidence** V est l'ensemble des couples (on les appelle des **drapeaux**) $(m, D) \in \Omega \times C^*$ (un point de Ω et une tangente à C) qui vérifient $m \in D$.

C'est donc l'ensemble des couples (x, y, t); (u, v, w) de $\Omega \times C^*$ vérifiant l'équation $ux + vy + wt = 0$.

Il est clair que cet ensemble est le mieux adapté pour étudier les lignes de Poncelet.

Le principe de la preuve, 3 : l'application de Poncelet F

On définit une application $F : V \to V$, dite **application de Poncelet**, en deux temps :

Soit (m, D) un point de V, soit m' le point où D recoupe Ω. On pose $F_1(m, D) = (m', D)$.

Soit D' la deuxième tangente à C issue de m'. On pose $F_2(m', D) = (m', D')$ et $F = F_2 \circ F_1$, soit $F(m, D) = (m', D')$.

Reformulation du théorème de Poncelet

S'il existe un élément $(m_0, D_0) \in V$ et un entier $n \geq 1$ tels que :

$$F^n(m_0, D_0) = (m_0, D_0)$$

on a alors

$$F^n(m, D) = (m, D)$$

pour tout $(m, D) \in V$.

Le principe de la preuve, 4

la structure de groupe sur V

Nous allons montrer que la variété d'incidence V est munie d'une structure de groupe abélien dont la loi est notée $\oplus$ et qu'il existe $B \in V$ tel que l'application F soit donnée par la formule $F(P) = P \oplus B$.

Poncelet en résulte car on a pour tout $P \in V$ et tout $n \in \mathbf{N}$:

$$F^n(P) = P \oplus nB.$$

Si on a $F^n(P_0) = P_0$ pour un P_0 c'est qu'on a $nB = 0$ dans le groupe V et on a alors $F^n(P) = P$ pour tout P.

Paramétrer les coniques

Du point de vue projectif, une conique est une droite projective $\mathbf{P}^1(k)$, paramétrée par deux coordonnées homogènes (λ, μ) ou (ξ, η).

Dans le cas de Ω dont l'équation est $y^2 - xt = 0$ on a un paramétrage évident :

$$x = \lambda^2, \quad y = \lambda\mu, \quad t = \mu^2.$$

Dans le cas de C^*, d'équation :

$$(\alpha\gamma - \beta^2)u^2 + 2\gamma uv - 2\beta uw - w^2 = 0,$$

on coupe par une droite (duale !) passant par $(0, 1, 0)$ et on a :

$$u = 2\gamma\xi^2, \quad v = \eta^2 + 2\beta\xi\eta + (\beta^2 - \alpha\gamma)\xi^2$$

$$w = 2\gamma\xi\eta.$$

Plonger $\Omega \times C^*$ dans $\mathbf{P}^3$

Les deux coniques sont des droites projectives, mais le produit $\Omega \times C^*$ **n'est pas** un plan projectif. On peut cependant le plonger dans l'espace projectif de dimension 3 (cette fois, quatre coordonnées homogènes (X, Y, Z, T)) par le plongement de Segre :

$$((\lambda, \mu); (\xi, \eta)) \mapsto (\lambda\xi, \lambda\eta, \mu\xi, \mu\eta).$$

Bien entendu, comme on part d'une variété de dimension 2, l'image est une surface, ici donnée par l'équation $XT - YZ = 0$.

Plonger la variété d'incidence dans $\mathbf{P}^3$

La variété d'incidence V est définie par l'équation $ux + vy + wt = 0$ dans $\Omega \times C^*$. Dans le plongement de Segre, cela donne une équation supplémentaire en (X, Y, Z, T) et l'image de V est définie dans $\mathbf{P}^3$ par les deux équations :

$$XT - YZ = 0 \quad \text{et}$$
$$YT + 2\beta XT + (\beta^2 - \alpha\gamma)XZ + 2\gamma X^2 + 2\gamma ZT = 0.$$

C'est une courbe W de degré 4 qui contient les trois points $O = (0, 1, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1, 0)$ et $A = (0, 0, 0, 1)$.

Projeter la variété d'incidence dans $\mathbf{P}^2$

On envoie maintenant W sur le plan (X, Y, Z) par la projection π de centre $A = (0, 0, 0, 1)$: à un point P distinct de A on associe le point d'intersection de la droite (AP) avec le plan $T = 0$. On a $\pi(X, Y, Z, T) = (X, Y, Z)$.

Cette projection induit un isomorphisme sur la **cubique** Γ_0 d'équation :

$$Y^2Z+2\beta XYZ+(\beta^2-\alpha\gamma)X^2Z+2\gamma X^3+2\gamma YZ^2 = 0$$

Le changement de variable $Y' = Y + \beta X + \gamma Z$ transforme Γ_0 en la courbe Γ d'équation :

$$Y'^2Z+\gamma(2X^3-\alpha X^2Z-2\beta XZ^2-\gamma Z^3) = 0.$$

Loi de groupe sur Γ

La courbe Γ est une cubique plane (qu'on appelle aussi courbe elliptique) et on sait qu'on a sur ce type de courbe une loi de groupe d'élément neutre le point à l'infini $\omega = (0, 1, 0)$ de l'axe des y (image de O).

La loi est définie ainsi : à $P, Q \in \Gamma$ on associe le troisième point d'intersection S de Γ et de la droite (PQ). Le point $P \oplus Q$ est alors le point d'intersection de Γ et (ωS) (parallèle à l'axe des Y).

La loi de groupe sur W

Elle se déduit de celle de Γ en utilisant la projection à l'envers. Soient $P, Q \in W$. On considère le plan (P, Q, A). Il recoupe la courbe W en un quatrième point R. On considère alors le plan (R, O, A). Il recoupe W en le point $P \oplus Q$.

L'élément neutre de $\oplus$ est le point O.

Le calcul des involutions et de l'application de Poncelet

Rappelons qu'on associe à $P = (m, D) \in V$ successivement $P' = (m', D)$ puis $P'' = (m', D')$.

1) On a $F_1(P) = P' = A - P$. En particulier $F_1(O) = A$.

2) On a $F_2(P') = P'' = -P'$. En particulier $F_2(A) = -A = B$.

En définitive, on a $F(P) = P'' = P - A = P \oplus B$.

Calcul de $B \oplus B$

On effectue ce calcul dans Γ, d'équation :

$$Y'^2 Z + \gamma(2X^3 - \alpha X^2 Z - 2\beta X Z^2 - \gamma Z^3) = 0.$$

On a $\omega = (0, 1, 0)$, $B = (0, \gamma, 1)$ et $A = -B = (0, -\gamma, 1)$.

La tangente en B est la droite d'équation $Y = \beta X + \gamma Z$. On coupe Γ par cette tangente. On trouve le point B double et le point :

$$E = (\alpha\gamma - \beta^2, \alpha\beta\gamma + 2\gamma^2 - \beta^3, 2\gamma).$$

On a :

$$B \oplus B = -E = (\alpha\gamma - \beta^2, -\alpha\beta\gamma - 2\gamma^2 + \beta^3, 2\gamma).$$

Lignes de période 3 et 4

Dire qu'on a une ligne de période 3 c'est dire que $B \oplus B = -B = (0, -\gamma, 1)$ avec :

$$B \oplus B = (\alpha\gamma - \beta^2, -\alpha\beta\gamma - 2\gamma^2 + \beta^3, 2\gamma),$$

c'est-à-dire $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$.

Dire qu'on a une ligne de période 4 c'est dire que $B \oplus B$ est son propre opposé, c'est-à-dire $\alpha\beta\gamma + 2\gamma^2 - \beta^3 = 0$.

Constructions de lignes de Poncelet

Il n'est pas si facile de construire effectivement des lignes de Poncelet de longueurs données.

Pour les cas $n = 3$ et $n = 4$, on peut utiliser le calcul précédent. Pour $n \leq 5$ on peut construire des exemples en utilisant le fait que par 5 points passe une conique.

Pour $n = 6$ les choses se compliquent ...

Et pour $n = 17$?

Une citation de Poncelet

Après avoir envisagé d'appeler la reproduction de ses cahiers de Saratov "mémoires d'outre-tombe" il dit :

... un pareil titre ne pouvait convenir à ce livre modeste ni aux habitudes sérieuses et réservées de l'auteur, bien moins encore au caractère, aux aptitudes, au goût que suppose un amour sincère des vérités de la Géométrie, dont la culture approfondie réclame un esprit dégagé de toute passion étrangère, pour ainsi dire, de tout intérêt terrestre. Or telle était précisément la position morale et matérielle, en quelque sorte inévitable, de l'auteur de cet ouvrage dans les lointaines prisons de la Russie.

Il poursuit :

… il [Poncelet] *n'avait, en réalité, d'autre but que de se rendre utile à la classe ouvrière et à la jeunesse des écoles ; il voulait leur inspirer l'amour des vérités éternelles de la science, la haine de l'intrigue et des sophistiques subtilités d'un charlatanisme qui signale une époque où, parmi tant de conquêtes de l'esprit moderne, on déplore avec chagrin des aberrations, des passions de lucre qui déshonorent notre caractère, nos mœurs et jusqu'à notre littérature nationale.*