

Les géométries non euclidiennes

Daniel PERRIN

Le but de cet exposé est de donner une idée de ce que sont les géométries non euclidiennes. Pour cela, on va partir du postulat d'Euclide sur les parallèles et en montrer quelques conséquences (sur la somme des angles d'un triangle, les perpendiculaires, les médiatrices). On examinera ensuite les vaines tentatives de démonstration de ce postulat et les premières apparitions des géométries non euclidiennes. On étudiera notamment la géométrie sphérique (et sa sœur la géométrie elliptique), en montrant le théorème de Girard sur la somme des angles d'un triangle sphérique. On abordera ensuite la géométrie hyperbolique, principalement dans le modèle du disque de Poincaré, en revenant sur les trois questions initiales : somme des angles, perpendiculaires et médiatrices.

1 Le postulat d'Euclide et ses conséquences

Dans tout ce qui suit, quand on parle de triangle, il est supposé non aplati.

1.1 L'axiome d'Euclide

1.1.1 L'axiome originel d'Euclide

Voici le cinquième postulat d'Euclide, dans la traduction de Peyrard (celle de Kayas formule les choses de manière plus moderne), voir fig.1.

1.1 Axiome. *Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

1.1.2 La variante de Proclus

Pour prouver le cinquième postulat, Proclus (410-483) prétend démontrer un lemme qui affirme que si une droite coupe une droite elle coupe aussi ses parallèles. Son raisonnement est le suivant. On a deux parallèles (BE) et (CD) et une droite (EF) passant par E . Alors, quand F est de l'autre côté de E par rapport à (CD) et que la distance EF tend vers l'infini, la distance

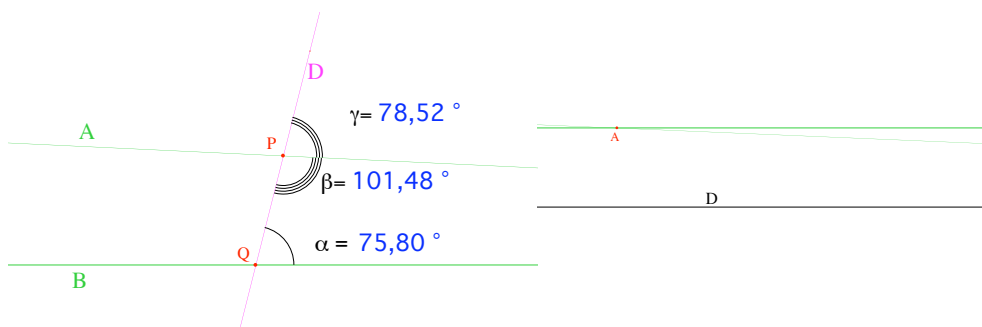


FIGURE 1 – L’axiome dans les versions d’Euclide et de Proclus.

FH de F à la droite (BE) dépasse la distance des deux parallèles, donc (EF) coupe (CD) .

Outre le fait que l’assertion “ FH tend vers l’infini” n’est pas évidente (c’est ce qu’on appelle l’axiome d’Aristote, que l’on peut prouver avec l’axiome d’Archimède, voir [H] Prop. 35.6), le point fautif essentiel est que la distance d’un point de (CD) à (BE) n’est pas nécessairement constante. Nous verrons qu’en géométrie hyperbolique elle tend vers l’infini quand on s’approche de l’horizon.

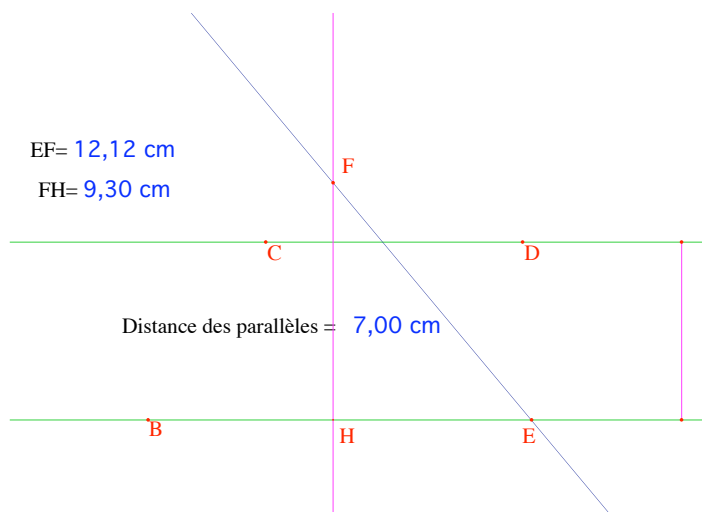


FIGURE 2 – Le raisonnement de Proclus.

Dans ce qui suit, nous prendrons le résultat annoncé par Proclus comme axiome :

1.2 Axiome. *Étant donné un point A du plan et une droite D , il existe une et une seule droite parallèle à D passant par A .*

Cet axiome est équivalent au postulat d'Euclide comme nous le verrons ci-dessous. Il sera repris par Playfair (1748-1819).

1.2 Des résultats indépendants du postulat

Pour alléger les notations on parlera de l'angle π au lieu de l'angle plat (ou encore de deux droits).

1.2.1 Le premier cas d'égalité des triangles

1.3 Proposition. (Premier cas d'isométrie des triangles) Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose qu'on a $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Alors, les triangles sont isométriques¹ et, en particulier on a les égalités d'angles $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

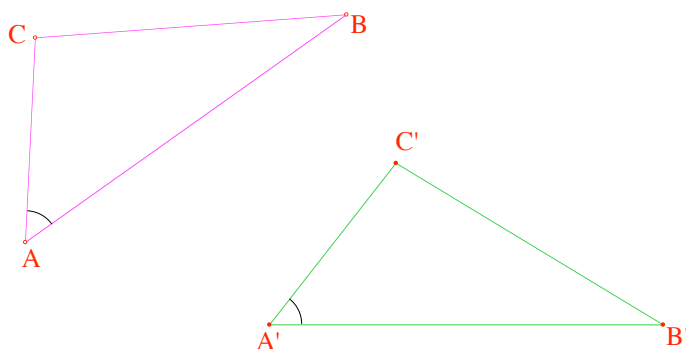


FIGURE 3 – Le premier cas d'égalité des triangles.

Démonstration. Euclide “prouve” ce résultat par la méthode de superposition. Sa démonstration repose sur un axiome implicite. D’ailleurs, dans le système d’axiomes revu par Hilbert, cette proposition est devenue un axiome. Je propose plutôt d’ajouter à l’axiomatique d’Euclide un axiome de transitivité d’un groupe de “mouvements” sur les drapeaux² qui permet de rendre correcte la preuve d’Euclide. L’existence d’un tel groupe est ce qui permet de prouver l’homogénéité du plan : points et droites sont tous “pareils” et de donner un sens aux notions d’égalité de longueurs et d’angles : deux segments sont de même longueur s’ils sont superposables, c’est-à-dire s’il existe

1. Euclide (et on continue ainsi jusque vers 1960) dit “égaux”.

2. Un drapeau est formé d’un point, d’une demi-droite issue de ce point et d’un demi-plan limité par cette demi-droite. Dire que le groupe des mouvements est transitif sur les drapeaux signifie que l’on peut amener un drapeau sur un autre par un mouvement.

un mouvement qui envoie l'un sur l'autre. Mon opinion est qu'en dépit de son apparence "moderne", cette version de l'homogénéité est plus proche d'Euclide et de l'intuition que la version de Hilbert.

1.2.2 Angles opposés par le sommet

1.4 Proposition. *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

Démonstration. Ils sont supplémentaires d'un même troisième³.

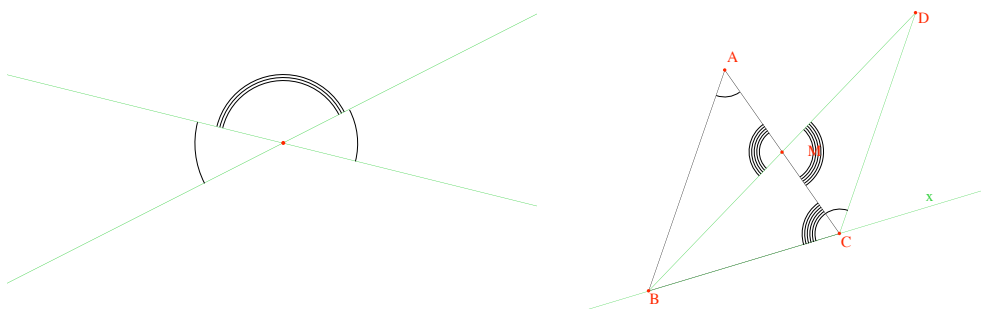


FIGURE 4 – Angles opposés par le sommet et somme de deux angles.

1.2.3 La somme de deux angles d'un triangle

1.5 Proposition. *Soit ABC un triangle. La somme de deux des angles de ABC est plus petite que π .*

Démonstration. Montrons par exemple qu'on a $\widehat{A} + \widehat{C} < \pi$. On considère le milieu M de $[AC]$, puis on construit le point D symétrique de B par rapport à M . Les triangles AMB et CMD sont isométriques (on a $AM = CM$, $BM = DM$ par construction, et les angles \widehat{AMB} et \widehat{CMD} sont opposés par le sommet). On en déduit l'égalité d'angles $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$. La somme des angles en A et C du triangle est donc \widehat{BCD} qui est $< \pi$.

(En fait, pour être tout à fait rigoureux, il faut faire de la convexité et dire que D est dans l'angle \widehat{ACx} . Pour cela on montre qu'il est dans deux demi-plans⁴, l'un limité par (BC) contenant A , l'autre limité par (AC) et

3. Ici on utilise en fait deux axiomes : l'homogénéité, qui permet de dire que les angles plats sont tous égaux, et la conservation par les mouvements de l'addition géométrique des angles (la mise côte à côte).

4. Cette preuve n'est donc pas valable en géométrie elliptique. D'ailleurs, là les choses sont plus compliquées, ne serait-ce que la notion même de triangle.

ne contenant pas B . Pour ce dernier c'est parce que $[BD]$ coupe (AC) en M , pour l'autre parce que M y est, donc aussi la demi-droite $[BM)$.)

1.2.4 Perpendiculaires et parallèles 1

1.6 Proposition. *Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.*

Démonstration. Sinon, ces droites formeraient un triangle avec deux angles droits.

1.3 Des conséquences du postulat

Dans ce paragraphe, on suppose que le postulat d'Euclide (sous la forme de Proclus) est vérifié.

1.3.1 Transitivité du parallélisme

1.7 Proposition. *La relation de parallélisme est transitive.*

Démonstration. Supposons D parallèle à D' et D' parallèle à D'' . Il s'agit de montrer que D et D'' sont parallèles. Sinon, D et D'' sont distinctes et se coupent en M . Mais alors, par M il passe deux parallèles à D' contrairement au postulat d'Euclide.

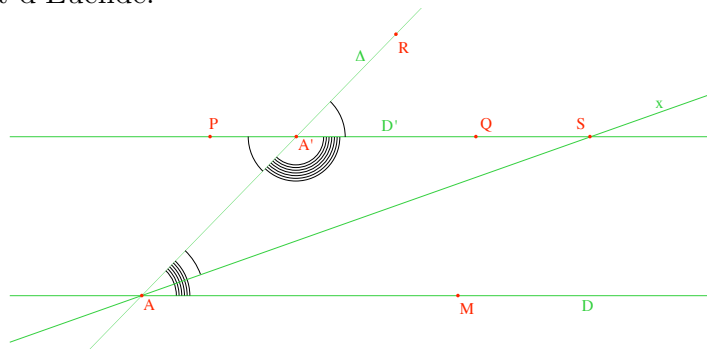


FIGURE 5 – Angles et parallèles.

1.3.2 Angles alternes-internes et correspondants

1.8 Proposition. *Soient D, D' deux droites parallèles. Une droite Δ coupe D en A et D' en A' . Alors les angles alternes internes $\widehat{PA'A}$ et $\widehat{A'AM}$ sont égaux, ainsi que les angles correspondants $\widehat{RA'Q}$ et $\widehat{A'AM}$.*

Démonstration. La deuxième assertion résulte de la première en utilisant les angles opposés par le sommet. Pour l'autre, on raisonne par l'absurde en supposant, par exemple, l'angle en A' plus petit que l'angle en A . On trace alors la demi-droite $[Ax)$, située dans le demi-plan limité par (AA') qui contient Q , de telle sorte qu'on ait $\widehat{PA'A} = \widehat{A'Ax}$. Comme l'angle $\widehat{A'Ax}$ est plus petit que $\widehat{A'AM}$, la demi-droite $[Ax)$ est dans le demi-plan limité par (AM) qui contient A' . La droite (Ax) est distincte de D , donc, par le postulat d'Euclide, elle n'est pas parallèle à D' et la coupe donc en S . Comme la demi-droite $[Ax)$ est contenue dans l'angle $A'AM$, elle coupe la demi-droite $[A'Q)$ en S . Mais alors, dans le triangle $A'SA$, la somme des angles en A et A' est égale à π , ce qui est absurde en vertu de 1.5.

1.3.3 Perpendiculaires et parallèles 2

1.9 Proposition. *Soient D, D' deux droites parallèles et soit Δ une droite perpendiculaire à D . Alors elle est aussi perpendiculaire à D' .*

Démonstration. Notons A le point d'intersection de D et Δ . On note d'abord que Δ coupe D' (sinon il y aurait deux parallèles à D' passant par A : D et Δ). On appelle A' le point d'intersection de D' et Δ . Les angles alternes-internes en A et A' étant égaux, on voit que Δ est perpendiculaire à D' .

1.10 Théorème. *La somme des angles d'un triangle est égale à π .*

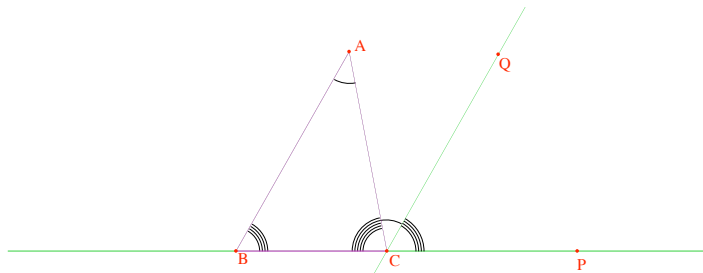


FIGURE 6 – Somme des angles d'un triangle.

1.3.4 La somme des angles d'un triangle

Démonstration. On prolonge la demi-droite $[BC)$ en $[BP)$ et on trace la parallèle (CQ) à (AB) passant par C . En vertu de 1.8 on a les égalités d'angles : $\widehat{BAC} = \widehat{ACQ}$ (alternes-internes) et $\widehat{ABC} = \widehat{QCP}$ (correspondants). On en déduit que la somme des angles du triangle est égale à $\widehat{BCA} + \widehat{ACQ} + \widehat{QCP} = \widehat{BCP} = \pi$.

1.3.5 Le concours des médiatrices

1.11 Proposition. *Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

Démonstration. Soit D la médiatrice de $[AB]$ et D' celle de $[AC]$. Ces droites se coupent. En effet, sinon, elles seraient parallèles, donc (AB) qui est perpendiculaire à D le serait aussi à D' (1.9). Mais alors (AB) et (AC) seraient toutes deux perpendiculaires à D' , donc parallèles (1.6). C'est absurde puisque ces droites se coupent en A .

Soit O le point d'intersection de ces médiatrices. On a $OA = OB = OC$, donc il est aussi sur la médiatrice de $[BC]$.

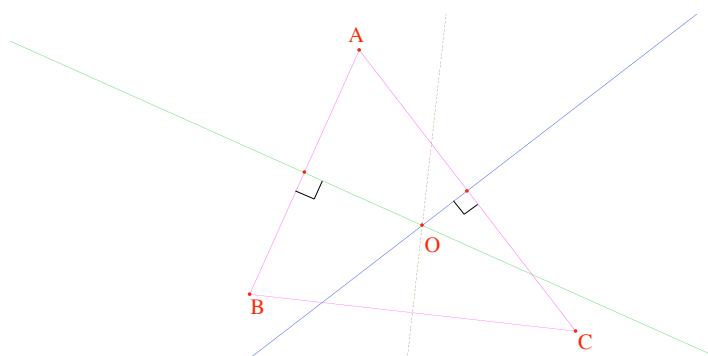


FIGURE 7 – Concours des médiatrices.

2 Un peu d'histoire

2.1 Les tentatives de preuve de l'axiome des parallèles

Beaucoup de géomètres (Proclus, Clavius, Clairaut, Simson, etc.) ne se sont pas satisfaits de devoir prendre le postulat d'Euclide comme un axiome et ont essayé de le prouver. Toutes ces tentatives ont été infructueuses, mais parfois intéressantes. Lorsqu'elles n'étaient pas évidemment fausses, elles revenaient le plus souvent :

- soit à donner une nouvelle définition de parallèle (par exemple, l'ensemble des points équidistants d'une droite donnée situés d'un même côté de cette droite),
- soit à remplacer l'axiome d'Euclide par un autre (par exemple celui de Proclus, ou celui de Clairaut sur le rectangle).

2.1.1 Équivalence des axiomes d'Euclide et de Proclus

Supposons Proclus vérifié. Alors, avec les notations de la figure 1, les droites A et B ne sont pas parallèles (sinon, les angles α et γ , qui sont correspondants, seraient égaux et on aurait $\alpha + \beta = \pi$).

Supposons Euclide vérifié. Soit D une droite et $A \notin D$. Soit M un point de D . On note $[My)$ l'une des deux demi-droites issues de M et portées par D . On considère la droite (AM) et on note $[Mx)$ la demi-droite opposée à $[MA)$. Soit E une droite passant par A et $[At)$ l'une de ses demi-droites.

Si on a $\widehat{AMy} + \widehat{MAt} < \pi$, les droites D et E se coupent par Euclide. Si la somme de ces angles est $> \pi$ elles se coupent aussi comme on le voit en regardant les demi-droites opposées. La seule droite qui puisse être parallèle est donc celle qui vérifie $\widehat{AMy} + \widehat{MAt} = \pi$.

Cette droite existe en vertu de la transitivité sur les drapeaux comme dirait l'autre⁵. En effet, on considère le drapeau défini par M , $[Mx)$ et le demi-plan contenant $[My)$ et on l'envoie sur A , $[Ax)$ et le même demi-plan⁶. L'image de $[My)$ est une demi-droite $[Az)$ et on a $\widehat{xMy} = \widehat{MAz}$, d'où $\widehat{AMy} + \widehat{MAz} = \pi$.

Cette droite est parallèle à D . En effet, si elle coupait D en B , la somme des angles en M et A du triangle MAB serait égale à π , ce qui contredit 1.5.

2.2 La période intermédiaire : Saccheri, Legendre

Le principe de ces géomètres, Saccheri (1667-1733), Legendre (1752-1833), a été de partir de l'hypothèse que le postulat des parallèles est faux et d'écrire les conséquences de cette hypothèse. Leur espoir, bien entendu, était d'aboutir à une contradiction, ce qui aurait montré que le postulat était vrai. D'ailleurs ils y sont parvenus, en commettant une erreur, ou en rajoutant un axiome, comme Legendre qui ajoute l'axiome :

étant donné un angle \widehat{ABC} et un point P intérieur à cet angle, il existe une droite passant par P qui coupe les droites (AB) et (BC) .

Il ne présente pas cette assertion comme un axiome, mais il dit : ... *or il répugne à la nature de la ligne droite, qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée, puisse être renfermée dans un angle.*

5. Bel exemple de schizophrénie !

6. En termes modernes on fait une translation de vecteur \overrightarrow{MA} .

2.3 Les géométries non euclidiennes : Gauss, Bolyai, Lobatchevsky

2.3.1 Bolyai

Janos Bolyai (1802-1860) est hongrois, capitaine au corps du génie dans l'armée autrichienne. Il est le fils du mathématicien Wolfgang Bolyai qui a montré le fameux théorème du découpage et qui est un ami de Gauss, le plus grand mathématicien de l'époque. Il écrit vers 1830 *La science absolue de l'espace* où il développe toute une géométrie sans l'axiome des parallèles. Comme il le dit : *À partir de rien, j'ai créé un étrange et nouvel univers*. Son père l'incite à publier ses travaux⁷ et ce texte apparaît en appendice d'un ouvrage du père *Tentamen*, 1831. Le père envoie ce texte à Gauss qui répond, en substance : *je savais déjà tout cela depuis longtemps, mais je n'avais pas osé le publier de peur de la réaction du public*⁸. Cela déprime complètement Janos, qui était, il faut le dire d'un tempérament ombrageux⁹.

2.3.2 Lobatchevsky

Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1792-1856) est russe, il devient recteur de l'université de Kazan en 1826 et publie en 1829 en russe, puis en 1837 en français son article *Géométrie imaginaire*. Outre les formules relatives à l'aire d'un triangle en fonction des angles, Lobatchevsky développe des formules pour le cercle, introduit des objets nouveaux, inexistantes en géométrie

7. Il lui fait remarquer que les découvertes apparaissent souvent simultanément en plusieurs endroits, comme les violettes au printemps !

8. Voici précisément la lettre de Gauss à Bolyai père :

Parlons maintenant un peu du travail de ton fils. Si je commence en disant que je ne puis louer ce travail, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement ; mais je ne puis dire autre chose ; le louer serait me louer moi-même ; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit, coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. Quant à mon travail personnel, dont d'ailleurs j'ai confié peu de chose jusqu'ici au papier, mon intention était de n'en rien laisser publier de mon vivant.

En effet, la plupart des hommes n'ont pas l'esprit juste sur les questions dont il s'agit, et j'ai trouvé seulement bien peu d'entre eux qui prissent un intérêt particulier à ce que je leur ai communiqué à ce sujet. Pour pouvoir prendre cet intérêt, il faut d'abord avoir senti bien vivement ce qui fait essentiellement défaut, et sur ces matières la plupart des hommes sont dans une obscurité complète. C'était, au contraire, mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi. Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière si remarquable.

9. Il a à son actif 13 duels victorieux au sabre.

euclidienne comme les horocycles. Malgré cela, il est congédié de son poste en 1846.

2.4 Les modèles non euclidiens : Beltrami, Klein, Poincaré, Riemann

Les travaux de Bolyai et Lobatchevsky, s'ils sont essentiels et précurseurs n'ont, comme Gauss le craignait, pas entraîné l'adhésion de leurs contemporains. En vérité, pour croire à l'**existence** des géométries non euclidiennes, il faudra attendre de les voir vraiment, et dans un cadre euclidien (ou presque). C'est la problématique des modèles. Bien entendu, comme les géométries euclidiennes ne sont pas euclidiennes (sic) on se doute bien qu'on ne parviendra à les représenter dans le cadre euclidien qu'au prix de renoncements. L'objectif de la quête (désespérée) d'un modèle est de satisfaire aux exigences suivantes :

- avoir un “plan” qu'on puisse représenter comme une partie d'un plan ou d'un espace euclidien,
- avoir un plan qui ressemble à un plan et, en tous cas, qui soit de dimension 2, donc une surface,
- avoir des droites qui ressemblent à des droites, ou au moins qui soient des courbes, simples si possible,
- conserver les propriétés usuelles d'incidence,
- avoir une compatibilité entre les invariants des géométries (longueur, angle) et ceux du modèle (par sa structure euclidienne), donc avoir une représentation isométrique et/ou conforme, avec, notamment, des cercles qui ressemblent à des cercles,
- enfin, avoir une structure métrique sur le modèle telle que les droites apparaissent comme les géodésiques pour cette structure (les lignes de plus court chemin).

En fait, cette recherche de modèle est totalement désespérée si l'on ne réduit pas les exigences.

Dans le cas de la géométrie elliptique, on ne peut avoir de modèle conforme qu'avec des arcs de cercles au lieu de droites. De plus, ces modèles ne seront pas vraiment des parties d'un espace euclidien (on devra toujours identifier des points). Cela tient au fait que le plan elliptique est un plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ et que ce plan ne se plonge pas dans \mathbf{R}^3 , comme l'exprime le théorème suivant (cf. [Gramain] Ch. VII §1 Th. 2) :

2.1 Théorème. *Le plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ n'est pas orientable donc ne se plonge pas comme une surface de \mathbf{R}^3 .*

Dans le cas hyperbolique, on verra que dans certains des modèles les droites seront rectilignes (le modèle \mathbf{K}), mais pas dans les autres, que certains seront conformes ($\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$), mais pas les autres et qu'enfin, le seul qui soit isométrique (\mathbf{B}) n'est qu'un modèle partiel de la géométrie. Là encore, cela est incontournable et le théorème suivant permet de comprendre pourquoi (cf. [Do Carmo 1] (Differential geometry of curves and surfaces) 5.11 p. 446) :

2.2 Théorème. (Hilbert)

Une surface riemannienne complète à courbure négative constante ne se plonge pas isométriquement dans \mathbf{R}^3 .

3 Une géométrie sans parallèles : la géométrie sphérique

Elle est souvent négligée par les auteurs qui parlent de géométrie non euclidienne, sans doute à cause du fait qu'elle ne vérifie pas les axiomes d'ordre (qui ne sont pas **explicitement** dans Euclide, mais qui sont sous-jacents). En effet, les droites de cette géométrie sont (topologiquement) des cercles, autrement dit, il n'y a pas d'ordre naturel sur ces droites.

3.1 Les géodésiques de la sphère

On considère, dans l'espace euclidien E la sphère S de centre O et de rayon 1.

Lorsqu'on travaille sur la sphère, les géodésiques, qui vont remplacer les droites, sont les grands cercles, c'est-à-dire les cercles intersections de S avec les plans diamétraux. Ce sont donc des cercles de rayon 1. Si l'on pense au cas de la sphère terrestre, les méridiens sont des grands cercles, mais pas les parallèles, à l'exception de l'équateur. Bien entendu il y a d'autres grands cercles, qui ne passent pas par les pôles (sur une sphère géométrique on peut prendre comme pôles n'importe quel couple de points antipodiques, c'est-à-dire symétriques par rapport à O). Précisément, si A et B sont deux points de S distincts et non antipodiques, il existe un unique grand cercle qui passe par A et B , c'est l'intersection de S avec le plan (ABO) .

Il n'est pas évident de montrer que les grands cercles sont les géodésiques. On peut s'en convaincre expérimentalement en utilisant un globe terrestre et une ficelle. On peut aussi montrer déjà que, parmi les cercles tracés sur S et joignant A et B , le grand cercle est le plus court. (L'idée c'est que les autres ayant un rayon plus petit sont plus courbés, donc plus longs, voir le problème proposé en annexe pour une preuve au niveau terminale.)

3.2 La formule de Girard

Nous admettrons qu'il existe une mesure des aires, additive et invariante par déplacement, pour les parties "raisonnables" de la sphère. En particulier, l'aire de la sphère tout entière est égale à 4π .

Si P et Q sont deux points antipodiques il y a une infinité de grands cercles qui les joignent (penser aux méridiens qui joignent le pôle nord et le pôle sud). Deux demi-grands cercles joignant P et Q déterminent ce que nous appellerons un fuseau (on pensera aux fuseaux horaires).

Il y a deux façons équivalentes de définir l'angle d'un fuseau joignant P et Q . On peut le définir comme l'angle des tangentes en P aux demi-grands cercles qui limitent le fuseau, c'est-à-dire l'angle des demi-droites $[Pa)$ et $[Pb)$, cf. fig. 8 (on pourrait aussi bien utiliser les tangentes en Q). Si on appelle A et B les points d'intersection des demi-grands cercles limitant le fuseau et de l'équateur (c'est-à-dire du grand cercle situé dans le plan diamétral perpendiculaire à (PQ)), on peut aussi définir l'angle du fuseau comme l'angle \widehat{AOB} , cf. fig. 8. Comme les tangentes au fuseau en P sont dans un plan parallèle au plan (OAB) , l'angle \widehat{aPb} est bien égal à \widehat{AOB} par projection. La mesure en radians de cet angle est donc la longueur de l'arc AB de l'équateur.

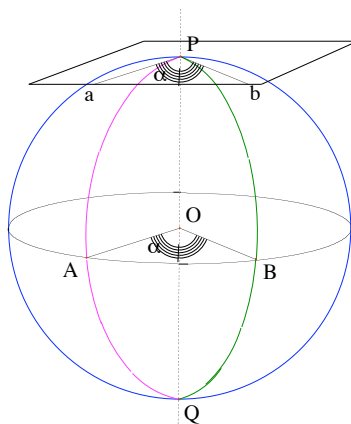


FIGURE 8 – Angle de deux grands cercles.

Ainsi, l'angle, mesuré en degrés, d'un méridien avec le méridien de Greenwich n'est autre que la longitude.

L'aire d'un fuseau d'angle θ radians vaut 2θ . En effet, l'aire du fuseau est proportionnelle à l'angle, et l'aire totale correspond à la longueur de l'équateur tout entier, donc à l'angle 2π , de sorte que l'aire du fuseau vaut $4\pi \times \frac{\theta}{2\pi} = 2\theta$.

Nous allons considérer des triangles curvilignes sur la sphère. Un tel triangle est donné par trois points A, B, C de la sphère, non antipodiques. Il est limité par les trois arcs de grands cercles qui joignent ces points (il y a deux arcs joignant deux points ; on choisit à chaque fois l'arc "mineur", c'est-à-dire le plus court des deux). Le triangle est alors l'intersection de trois fuseaux de sommets A, B, C , cf. fig. 9. Il a donc une aire et trois angles.

Contrairement au cas des triangles plans dans lesquels la somme des angles vaut toujours π , sur la sphère cette somme des angles dépend de l'aire comme le montre la formule suivante :

3.1 Théorème. (Formule de Girard). *Soit ABC un triangle tracé sur la sphère unité S , soient T son aire et α, β, γ ses angles, mesurés en radians. On a la formule :*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + T.$$

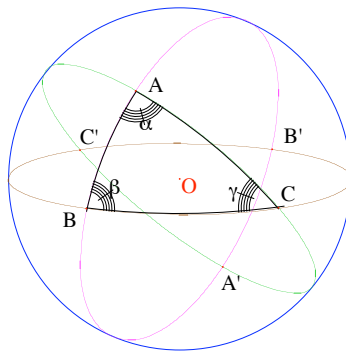


FIGURE 9 – La formule de Girard.

Démonstration. On se reportera à la figure 9 pour suivre cette démonstration. On considère le grand cercle de plan OBC que l'on prend comme équateur et on suppose le point A dans l'hémisphère nord. Nous allons calculer l'aire de l'hémisphère nord S^+ de deux manières. D'abord, puisqu'il s'agit de la moitié de la sphère, son aire vaut 2π . Ensuite, cf. fig. 9, S^+ est réunion du fuseau de sommet B contenant le triangle ABC , du fuseau de sommet C contenant ABC (en comptant le triangle une deuxième fois) et du fuseau de sommet A contenant le triangle opposé à ABC (son antipode), moins ce triangle, qui a pour aire T par symétrie. En définitive on a donc : $2\pi = 2\beta + 2\gamma - T + 2\alpha - T$ ce qui donne la formule voulue.

3.2 Exemple. Si on prend sur la Terre le pôle nord comme point A , la ville de Libreville au Gabon comme point B (10 degrés de longitude est) et le centre de Sumatra comme point C (100 degrés de longitude est), de sorte que B

et C sont sur l'équateur, on a un triangle qui a trois angles droits ! Comme c'est le quart de l'hémisphère nord, son aire est bien égale à $\pi/2$ et on vérifie la formule de Girard.

3.3 Le premier axiome et le quotient

La formule de Girard montre que sur la sphère on a des triangles joufflus, c'est-à-dire dont la somme des angles est plus grande que π . Si l'on en croit Euclide, ce doit être que le postulat n'est pas vrai sur la sphère lorsqu'on utilise comme droites les grands cercles. De fait, il y a une raison toute simple : deux grands cercles se coupent toujours. En effet, leurs plans ont une droite passant par O en commun, donc les cercles se coupent en les points d'intersection de cette droite et de la sphère. Il n'y a donc pas de droites parallèles dans la géométrie sphérique !

Il y a tout de même quelque chose de gênant avec cette géométrie, c'est que, même avant d'aller chercher le postulat des parallèles, il y a un autre axiome d'Euclide qu'elle ne vérifie pas, et c'est même le premier : par deux points distincts passe une droite et une seule. Ici, cet axiome est en défaut lorsque les points sont antipodes. En effet, on a vu qu'il y a alors une infinité de grands cercles qui les joignent (penser aux pôles et aux méridiens).

Il y a un moyen de remédier à cela qui consiste à identifier les points antipodes. Cela revient à remplacer la sphère par une autre surface \bar{S} , plus bizarre toutefois. Comme on identifie les points antipodes, on peut se limiter aux points de l'hémisphère nord, mais, attention, avec l'équateur compris et en identifiant les points antipodes de l'équateur. On peut se représenter un peu mieux cette surface en projetant l'hémisphère nord sur le plan équatorial. On obtient un disque, mais où les points diamétralement opposés doivent être identifiés. C'est ce qu'on appelle la géométrie elliptique qui vérifie cette fois les premiers axiomes d'Euclide. Les droites sont des arcs de cercles qui joignent deux points opposés du disque.

On peut faire avec cette géométrie à peu près toutes les opérations usuelles de la géométrie¹⁰.

3.4 Les angles

La définition des angles est un peu délicate en géométrie elliptique. En effet, il y a deux segments qui joignent deux points. On choisit en général le plus court des deux. Avec cette convention, on constate que, comme dans

10. Voir les macros Cabri d'Yves Martin :

<http://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Formateurs/Yves/these.html>

Pour construire un tel arc, passant par A, B et coupant le cercle de centre O et de rayon R selon un diamètre, on considère l'inversion i de pôle O et de puissance $-R^2$. On pose $A' = i(A)$ et $B' = i(B)$. Ces quatre points sont sur un cercle C' qui est le cercle cherché. En effet, les intersections M et N de C et C' sont échangées par i (car C et C' sont invariants) et donc elles sont alignées avec O .

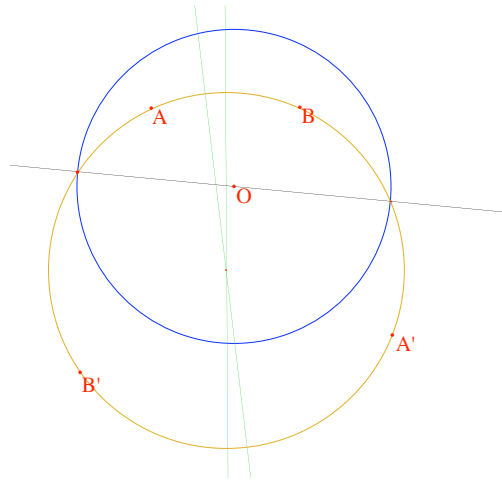


FIGURE 10 – Construction de la droite elliptique passant par deux points.

la géométrie sphérique, la somme des angles d'un triangle est toujours plus grande que π . On notera aussi que les triangles peuvent avoir de drôles d'allures !

3.5 Le concours des médiatrices

On peut faire l'expérience avec Cabri du concours des hauteurs ou des médiatrices : le théorème est vrai, comme en euclidien, voir fig. 11. Cela étant, il y a une différence : puisqu'il y a deux segments possibles joignant deux points, il y a aussi deux médiatrices (une intérieure et une extérieure).

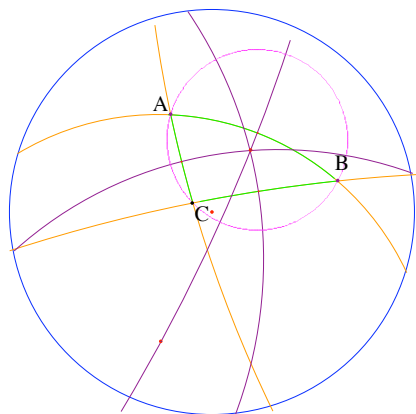


FIGURE 11 – Concours des médiatrices elliptiques.

4 Une géométrie avec beaucoup de parallèles : la géométrie hyperbolique

4.1 Une première tentative un peu exotique

4.1.1 La définition

Dans ce paragraphe, on pose le problème de la recherche d'un modèle de géométrie non euclidienne, avec un exemple élémentaire, qui permet de s'apercevoir de la complexité du problème et notamment de l'importance des autres axiomes.

On considère la situation suivante, voisine de celle du demi-plan de Poincaré que nous verrons plus loin, mais plus simple. On se place dans \mathbf{R}^2 et le plan nouveau est le demi-plan supérieur : $\mathbf{H} = \{(x, y) \mid y > 0\}$. Les droites de \mathbf{H} sont soit les parallèles à l'axe des x contenues dans \mathbf{H} (qu'on appellera les seigneurs parce qu'elles sont moins nombreuses), soit les demi-droites d'origine un point de l'axe des x contenues dans \mathbf{H} (les manants). Il est immédiat que les axiomes d'incidence et d'ordre d'Euclide-Hilbert sont exaucés. Le postulat des parallèles, lui, ne l'est pas. En effet, si D est un seigneur et a un point de \mathbf{H} il y a une unique parallèle à D passant par a , tandis que si D est un manant, il y en a une infinité (toutes celles qui coupent D dans le demi-plan inférieur). Cela montre au passage que cette géométrie n'est pas homogène du côté des droites, ce qui suffit à la disqualifier. Précisément, c'est l'objet du paragraphe suivant.

4.1.2 Une ou plusieurs, il faut choisir

Dans ce paragraphe, on ne suppose pas que le postulat des parallèles est vrai. En revanche, on suppose les autres axiomes d'Euclide, soit sous la forme de Hilbert (avec notamment les cas d'isométrie des triangles), soit sous celle de la transitivité sur les drapeaux.

4.1 Proposition. *S'il existe une droite D qui vérifie l'axiome des parallèles pour tous les points A du plan, l'axiome vaut pour toutes les droites et tous les points.*

On notera que c'est bien la situation ci-dessus en prenant pour D un seigneur, ce qui montre que le plan proposé n'est pas satisfaisant.

Démonstration. 1) Si l'on suppose la transitivité sur les drapeaux, c'est immédiat en envoyant D' sur D par un mouvement u . On pose alors $A = u(A')$ et il y a autant de parallèles à D par A qu'à D' par A' .

2) Montrons le résultat avec les axiomes de Hilbert. Supposons qu'on ait D' et A' mettant en défaut le postulat. Soit B' le projeté de A' sur D' . Soit B un point de D et A un point de la perpendiculaire à D en B vérifiant $AB = A'B'$.

Soit Δ la perpendiculaire à $(A'B')$ en A' . Cette droite est parallèle à D' et il y en a une autre, disons Δ' . L'un des angles de Δ' et $(A'B')$ est plus petit qu'un droit, appelons le θ . On considère la droite E passant par A qui fait cet angle avec (AB) . Comme on a déjà une parallèle à D passant par A (la perpendiculaire à (AB) en A), l'unicité, supposée acquise pour D , montre que E coupe D en C . On considère le triangle ABC et le triangle $A'B'C'$, où C' est sur D' (du côté de l'angle θ) et vérifie $B'C' = BC$. Ces triangles sont égaux (l'angle droit et ses côtés). On en déduit $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} = \theta$, de sorte que C' est sur Δ' , ce qui est absurde.

Je ne sais pas montrer la conjecture suivante :

4.2 Conjecture. *S'il existe une droite D et un point $A \notin D$ vérifiant l'axiome des parallèles, l'axiome vaut pour toutes les droites et tous les points.*

4.1.3 Compléments

On voit sur cet exemple que les seuls incidence et ordre sont très insuffisants pour caractériser la géométrie euclidienne (contrairement à ce qui se passe en géométrie projective). Fidèle aux leçons de Klein, on cherche un groupe G qui opère sur \mathbf{H} . Il y en a un bien naturel qui est le groupe des applications affines du plan qui conservent \mathbf{H} . Il s'agit des applications définies par : $u(x, y) = (\alpha x + \beta y + a, \delta y)$, avec $\alpha \neq 0$ et $\delta > 0$. C'est un groupe algébrique de dimension 4, très dévissé. On peut considérer qu'il s'agit des similitudes de \mathbf{H} , les isométries, que l'on note I , étant définies par $\alpha = 1$. Dans ce groupe on trouve :

- les translations horizontales,
- les transvections horizontales,
- les affinités d'axe Ox ,
- et parmi les similitudes, les affinités d'axe vertical.

Il est facile de montrer que I est transitif sur \mathbf{H} , qu'il transforme droite en droite et qu'il est presque transitif sur les droites, mais qu'on ne mélange pas les torchons et les serviettes, ni les manants et les seigneurs. Il y a donc deux orbites de I ou de G sur les droites.

Comme on l'a vu, cette absence d'homogénéité est le péché originel de cette géométrie.

Notons aussi qu'il y a une espèce de distance sur \mathbf{H} . Si on a $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$, la distance $d(A, B) = AB$ est lexicographique : c'est $|\ln b_1 - \ln b_2|$ si $b_1 \neq b_2$ et c'est $|a_1 - a_2|$ si les b sont égaux.

La question, pour revenir à Euclide (ou plutôt à Hilbert) c'est : peut-on en déduire une notion de congruence des segments avec les axiomes usuels ? On peut définir la congruence avec la distance : $AB = CD$. Sur les droites, cette distance est additive (que ce soit chez les manants ou chez les seigneurs) et infinie des deux côtés. Il en résulte que les axiomes sont satisfaits.

Pour les angles c'est sans doute plus compliqué. On considère deux manants passant par $m = (0, 1)$: le premier manant est la verticale $x = 0$ de bout $b = (0, 0)$, le second la droite dont le bout est $b' = (x_0, 0)$. Les transformations qui fixent m sont les $(x, y) \mapsto (x + \beta y - \beta, y)$. Une telle transformation envoie b sur $(-\beta, 0)$ et b' sur $(x_0 - \beta, 0)$: c'est la translation de $-\beta$ sur les bouts et elle conserve donc leur distance.

Voici une idée d'angle : si on a deux manants D, D' se coupant en m , on regarde leurs traces sur Ox soient p, q et on dit que l'angle c'est $|p - q|$. Pour deux seigneurs, pas d'angle puisqu'ils sont parallèles. Pour un seigneur et un manant ?

4.2 Le modèle de Klein

4.2.1 Le modèle

L'idée est assez voisine de la précédente, mais en prenant le cercle unité au lieu de l'axe des x on évite d'avoir deux types de droites. On prend donc comme plan le disque unité ouvert, le cercle unité (appelé horizon) jouant le rôle d'infini. Les droites sont les segments ouverts limités par deux points de l'horizon. On a les axiomes d'incidence et d'ordre et le postulat des parallèles est en défaut.

Cette fois, on a un vrai modèle de la géométrie hyperbolique (voir [Per-rin]), en particulier on a la propriété de transitivité sur les drapeaux, essentielle pour assurer l'homogénéité du plan. Une façon de comprendre cela sans utiliser tout l'arsenal des homographies et du groupe $PO(q)$ consiste à penser en termes de points de Frégier.

4.2.2 L'approche par les points de Frégier

On considère le disque unité ouvert \mathbf{K} et son bord Γ . Si a est un point qui n'est pas sur Γ , on définit une application σ_a de Γ sur Γ en associant au point m le point d'intersection de (am) et Γ autre que m , sauf si (am) est tangente au cercle auquel cas m est un point fixe de la transformation. Il est

clair que σ_a est une involution de Γ .

On peut ensuite étendre σ_a au plan tout entier. Si m est un point du plan, on trace deux droites passant par m (les droites roses de la figure ci-dessous) qui coupent le cercle en b, c , et d, e . On construit les images b', c', d', e' de b, c, d, e et on obtient m' à l'intersection de $(b'c')$ et $(d'e')$. Bien entendu, il faut voir que cette construction ne dépend pas des choix des droites passant par m . L'expérience Cabri le montre et la preuve repose sur le théorème de Pascal.

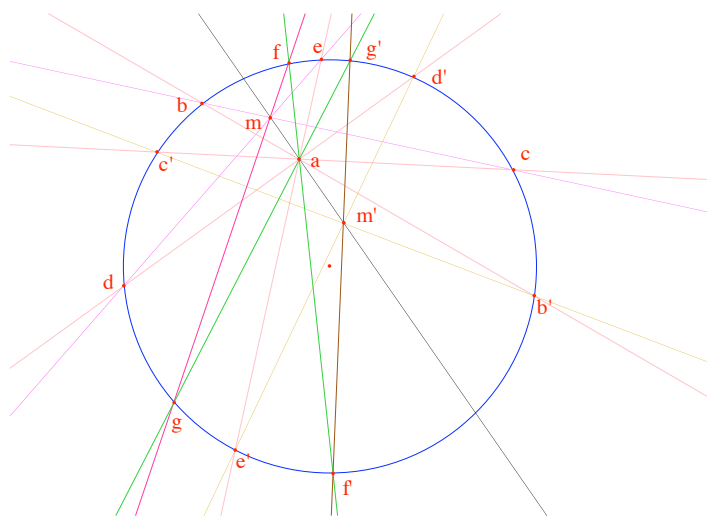


FIGURE 12 – Définition de l'involution de Frégier

On peut alors montrer la transitivité sur les drapeaux. On se donne d'abord deux droites D, D' qui coupent l'horizon respectivement en b, c et d, e . Si a est le point d'intersection de (bd) et (ce) , l'involution de point de Frégier a envoie D sur D' . On a ainsi la transitivité sur les droites. Si on prend ensuite m sur D et m' sur D' , on envoie D sur D' . Le point m va sur $m'' \in D'$. Il reste à montrer que si l'on a $m, m' \in D$, on peut envoyer m sur m' en conservant D . Si on note d le pôle de D on procède comme sur la figure ci-dessous : l'involution de point de Frégier a accomplit le travail demandé.

4.3 Les angles

4.3.1 Perpendiculaires et angles

L'une des constantes des géométries, euclidiennes ou non, est l'existence de symétries axiales. C'est en pensant en termes de symétries qu'on peut

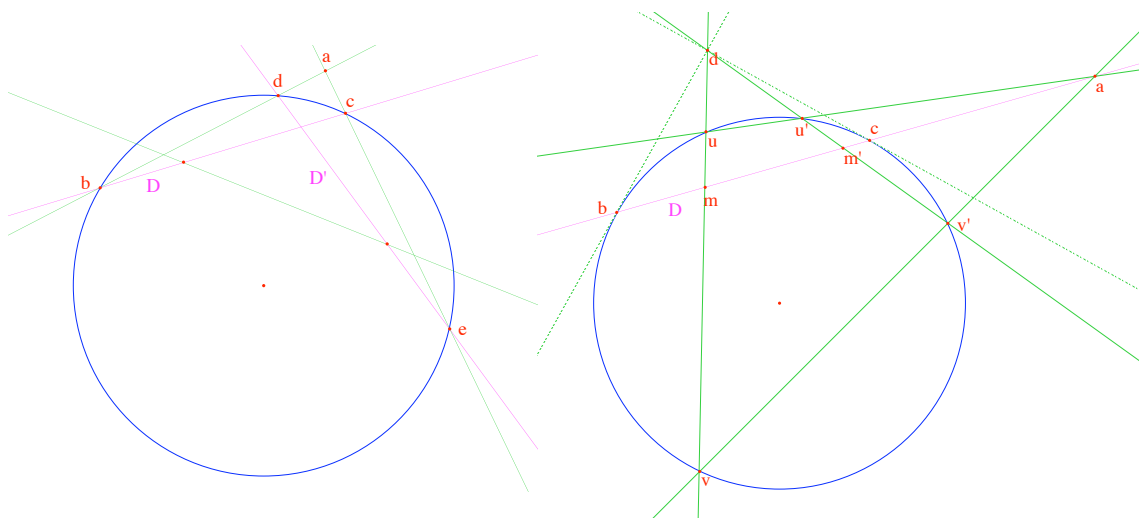


FIGURE 13 – Transitivité sur les drapeaux

comprendre ce qu'est une perpendiculaire dans le plan de Klein.

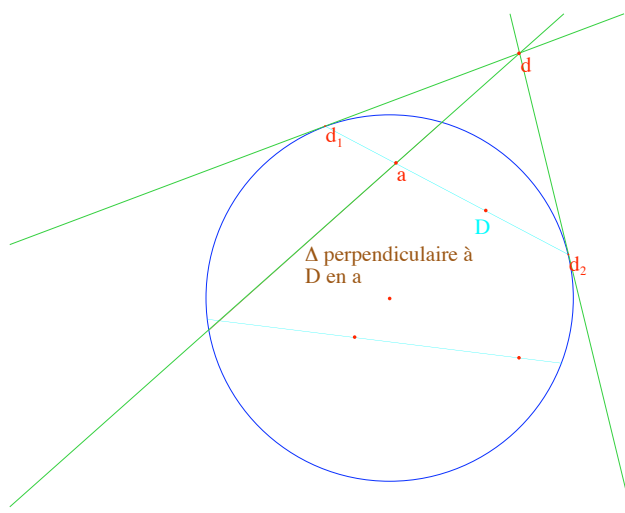


FIGURE 14 – Perpendiculaire dans le plan de Klein

Soit D une droite du plan et a un de ses points. On cherche à décrire la droite Δ perpendiculaire à D en a . Cette droite est l'unique droite passant par a et distincte de D qui soit invariante par la symétrie τ_D par rapport à D . Or, cette symétrie doit laisser invariant le cercle horizon et fixer la droite D . Elle doit donc fixer les bouts d_1 et d_2 de D , intersection de D avec le cercle Γ , donc aussi les tangentes à Γ en ces points, donc enfin le point

d'intersection d de ces tangentes. Ce point est ce que l'on appelle le **pôle** de la droite D par rapport à Γ . La droite (ad) est donc invariante par τ_D . C'est donc elle la perpendiculaire, voir fig. 4.3.1. Pourtant D et Δ n'ont pas l'air perpendiculaires au sens euclidien : le modèle ne conserve pas les angles, il n'est pas conforme.

Une autre manifestation de cette non conformité est la suivante. Comme la symétrie τ_D laisse invariante les tangentes, le même argument que ci-dessus semble indiquer que ces tangentes sont perpendiculaires à D , ce qui n'est manifestement pas le cas. C'est cette remarque qui va nous mener au modèle suivant.

4.4 Les modèles de Poincaré

4.4.1 Le disque

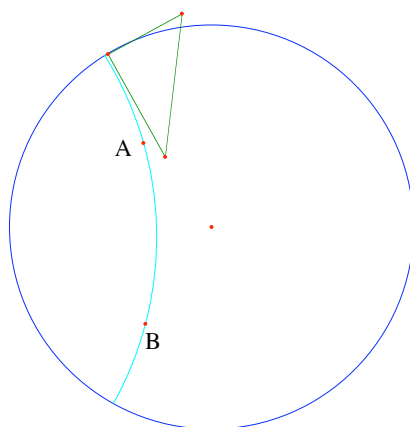


FIGURE 15 – Droite hyperbolique dans le disque de Poincaré

Un autre modèle du plan hyperbolique est ce qu'on appelle le disque de Poincaré. C'est le disque unité du plan euclidien ordinaire (privé du cercle unité, qu'on appelle horizon, et qui joue le rôle d'infini, comme dans le modèle de Klein). On le note **D**. Mais cette fois, pour rectifier le défaut constaté dans le plan de Klein, on va s'arranger pour que les droites soient orthogonales au bord. Bien entendu, c'est impossible avec des droites ordinaires. Le plus simple est d'utiliser comme droites les arcs de cercle orthogonaux au bord.

On a la propriété fondamentale d'Euclide : par deux points passe une droite et une seule. On peut la vérifier expérimentalement avec Cabri et la démontrer (par exemple en utilisant l'inversion).

Comme dans le modèle de Klein, il passe par un point une infinité de parallèles à une droite, mais cette fois, le modèle est conforme : les angles des droites (i.e. de leurs tangentes) sont les mêmes qu'en euclidien.

4.4.2 Le demi-plan

On utilise comme plus haut le demi-plan supérieur : $\mathbf{H} = \{(x, y) \mid y > 0\}$, mais cette fois les droites sont de deux sortes : les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés sur l'axe des x .

On a encore la propriété fondamentale d'Euclide : par deux points passe une droite et une seule (et ici la preuve est immédiate). Comme dans le disque de Poincaré, le postulat d'Euclide est faux. Ce modèle est encore un modèle conforme.

En vérité, les modèles \mathbf{D} et \mathbf{H} sont équivalents car on passe du plan au disque par l'application : $z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$.

4.5 Propriétés du disque de Poincaré

4.5.1 Angles et distances

Dans le plan hyperbolique on a, comme dans le plan euclidien, une notion de distance et une notion d'angle. On a vu que, dans les modèles de Poincaré, la notion d'angle est la même que celle du plan euclidien. En revanche, la notion de distance est très différente. En particulier, la distance tend vers $+\infty$ quand on se rapproche du bord.

Ces notions permettent de définir milieux, médianes, hauteurs, médiatrices, etc. Par exemple, on montre que, comme dans le plan euclidien, la médiatrice de $[AB]$ est à la fois la perpendiculaire à $[AB]$ au milieu de $[AB]$, mais aussi l'ensemble des points M qui vérifient $MA = MB$.

4.5.2 Différences et similitudes avec le plan euclidien

- La propriété des angles alternes-internes est fausse.
- La somme des angles d'un triangle est $< \pi$.
- L'expérience semble montrer que les médianes d'un triangle sont encore concourantes.
- Elle suggère la même propriété pour les médiatrices, et, dans ce cas, on peut le démontrer avec la caractérisation donnée ci-dessus. En effet, si O est l'intersection des médiatrices de A, B et A, C on a $OA = OB$ et $OA = OC$, donc $OB = OC$ et O est sur la médiatrice de B, C .

4.6 Retour sur le concours des médiatrices

4.6.1 Le constat

Une expérience un peu plus soignée montre que les médiatrices ne sont pas toujours concourantes. C'est le cas, en particulier si l'on rend l'angle en A suffisamment obtus. Cependant, on ne peut pas penser qu'il ne subsiste pas quelque propriété dans ce cas. On pourrait imaginer, bien entendu, de remplacer le mot "concourantes" par "concourantes ou parallèles". Une réflexion sommaire montre que cette condition est beaucoup trop faible¹¹. En effet, la notion de parallèle (au sens usuel¹² : ne se coupant pas) est "ouverte". Cela signifie que si l'on bouge un peu deux droites parallèles, elles le restent. Dire que deux droites sont parallèles est donc une assertion très faible.

Pour le comprendre ce que l'on peut viser, revenons sur la notion de perpendiculaire.

4.6.2 Perpendiculaires

On a vu que, dans toute géométrie, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. En revanche, en géométrie hyperbolique, si l'on a deux parallèles, une perpendiculaire à l'une n'est pas nécessairement perpendiculaire à l'autre, comme on le voit aussitôt expérimentalement. Précisément, on montre que deux droites parallèles ont une seule perpendiculaire commune.

De plus si l'on a trois droites A, B, C leurs perpendiculaires communes deux à deux sont, en général, distinctes, de sorte qu'on met ainsi en évidence une nouvelle propriété pour trois droites, à côté du fait d'être concourantes, c'est d'admettre une perpendiculaire commune, condition qui implique le parallélisme, mais est bien plus forte.

L'expérience permet alors de constater que les médiatrices d'un triangle sont concourantes ou admettent une perpendiculaire commune. On a donc trouvé le résultat cherché.

4.6.3 Une preuve

Il reste à démontrer ce résultat. Pour cela, il faut avoir en tête une idée tout à fait essentielle qui est celle de la dualité entre points et droites.

11. Il y a à cet égard un paradoxe assez frappant. D'une part, les géométries non euclidiennes ont été inventées à cause du problème des parallèles, mais, d'autre part, la notion de parallélisme est à peu près sans intérêt dans ces géométries.

12. Le lecteur se convaincra expérimentalement que la notion forte : se couper à l'infini, c'est-à-dire sur l'horizon, ne convient pas non plus pour le problème des médiatrices.

Précisément, on sait qu'on a la caractérisation suivante des points d'une médiatrice :

- Un point M est sur la médiatrice de A, B si et seulement si A et B sont équidistants de M : $MA = MB$.

Mais, de manière duale, on a une caractérisation des droites perpendiculaires à une médiatrice :

- Une droite D est perpendiculaire à la médiatrice de A et B si et seulement si A et B sont équidistants de D (et du même côté).

Avec cela, on peut copier le raisonnement usuel. On considère les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. Si elles se coupent en O , ce point est équidistant de B et C , donc aussi sur la médiatrice de $[BC]$ et on est dans le cas concourant. Sinon, les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ admettent une perpendiculaire commune D . Les points A et B (resp. A et C) sont équidistants de D et du même côté. Il en est donc de même de B et C , de sorte que D est aussi perpendiculaire à la médiatrice de $[BC]$.

4.6.4 Une explication dans le plan de Klein

On comprend mieux la situation en la regardant dans le plan de Klein (mais en ne se limitant pas au disque). En effet, dans le plan étendu, les médiatrices sont concourantes soit dans le disque, soit à l'extérieur. Dans ce cas, la perpendiculaire commune est la **polaire** du point de concours extérieur par rapport au cercle.

4.7 Clairaut et Legendre désavoués

4.8 La pseudo-sphère de Beltrami (1868)

Ce modèle est le seul qui soit isométrique (c'est-à-dire où les angles et les distances hyperboliques sont les mêmes que dans l'espace euclidien), mais il a d'autres inconvénients.

Il s'agit d'une surface, appelée pseudo-sphère, à courbure négative. Cette surface est une surface de révolution, obtenue en faisant tourner une tractrice autour d'un axe. Rappelons que la tractrice est une courbe dont voici une représentation paramétrique :

$$x = \frac{1}{\operatorname{ch} t}, \quad y = t - \operatorname{th} t, \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

Ce modèle présente toutefois deux défauts :

- 1) Ce n'est un modèle que d'une partie du plan hyperbolique (en termes du demi-plan de Poincaré \mathbf{H} , des points $y \geq 1$).

2) Ce n'est pas un modèle bijectif (le plan hyperbolique s'enroule une infinité de fois autour de la pseudo-sphère).

5 Les applications de la géométrie hyperbolique

5.1 Les groupes fuchsien

L'un des charmes de la géométrie hyperbolique réside dans les sous-groupes discrets de son groupe d'isométries. Contrairement au cas du plan euclidien où il y a peu de tels sous-groupes (17, qui correspondent aux pavages du plan, voir l'Alhambra de Grenade), les sous-groupes analogues (dits fuchsien) sont en nombre infini pour le groupe de Lorentz (groupe des isométries du plan hyperbolique). L'origine de ces recherches remonte à Poincaré. Je cite *in-extenso* le texte extraordinaire de Poincaré (Science et méthode, 1909).

Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes; j'étais alors fort ignorant. Tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux : j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude; je ne pus m'endormir, les idées surgissaient en foule; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique. Je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries, si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.

A ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'Ecole des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification, je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je

repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquies de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne.

Etant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsliens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique ; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes, et que, par conséquent, il existait des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions ; j'en fis un siège systématique et j'enlevai, l'un après l'autre, tous les ouvrages avancés ; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire ; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine.

5.2 Les surfaces à courbure constante

On montre qu'il n'y a que trois types de surfaces à courbure constante : le plan (courbure nulle), la sphère (courbure constante et positive) et le plan hyperbolique (courbure constante négative, penser à la pseudo-sphère). (Dire la courbure : en un point on trace deux lignes orthogonales et on regarde leurs "centres". La courbure négative c'est le cas où l'un est d'un côté et l'autre de l'autre.)

5.3 La relativité

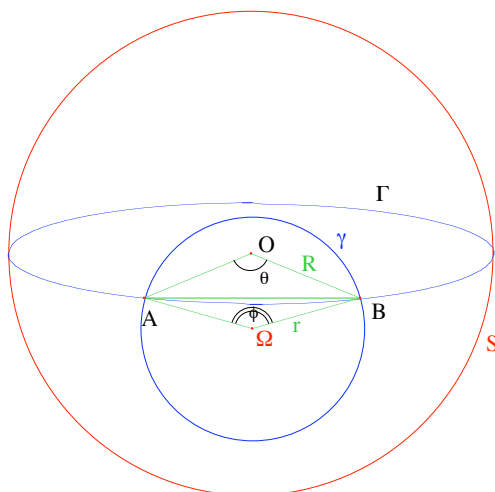
La géométrie hyperbolique est très liée à la théorie de la relativité. Explication : le modèle de Minkowski du plan hyperbolique, \mathbf{M} , est l'hyperboloïde de \mathbf{R}^3 d'équation $x^2 + y^2 - t^2 = -1$ (la nappe $t \geq 1$). On voit apparaître la forme quadratique de Lorentz (pour la physique on rajoute une variable d'espace z et on fait apparaître la vitesse de la lumière : $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$).

La distance entre deux événements (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) est alors donnée par $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$. (Par exemple : elle est positive pour deux événements simultanés ne se produisant pas au même endroit, négative pour deux événements non simultanés arrivant au même endroit.)

6 Annexe 1 : les géodésiques de la sphère

Ce qui suit est un problème pour des élèves de Terminale.

On considère une sphère S de centre O et de rayon R et deux points A et B , non antipodes, de cette sphère. On pourra penser à deux points situés sur l'équateur. Le but du problème est de montrer que, parmi les arcs de cercles tracés sur la sphère et joignant A et B , le plus court est celui qui correspond à un "grand cercle", c'est-à-dire à un cercle de centre O . En vérité, on peut montrer que l'arc de grand cercle est non seulement le plus court parmi les arcs de cercles joignant A et B , mais le plus court parmi tous les chemins possibles, tracés sur S , et joignant A et B , mais c'est beaucoup plus difficile. On dit que c'est une **géodésique** de la sphère.



On considère le grand cercle Γ , de centre O et de rayon R , passant par A et B (sur la figure il s'agit de l'équateur) et un autre cercle γ , de centre Ω et de rayon r , tracé sur S et passant par A et B . On appelle θ (resp. ϕ) l'angle au centre \widehat{AOB} (resp. $\widehat{A\Omega B}$).

- 1) Montrer que Ω est intérieur à la boule et en déduire qu'on a $r \leq R$.
- 2) Montrer qu'on a $AB = 2R \sin \frac{\theta}{2} = 2r \sin \frac{\phi}{2}$.
- 3) Montrer que la longueur de l'arc AB de Γ (resp. γ) est égale à $R\theta$ (resp. $r\phi$).
- 4) Soient $x, y \in]0, \pi/2[$. Montrer qu'on a $\frac{\sin x}{\sin y} \geq \frac{x}{y}$. (On étudiera la fonction $f(x) = y \sin x - x \sin y$ pour y fixé en se souvenant que l'arc est plus grand que la corde et plus petit que la tangente.)
- 5) Conclure.

7 Annexe 2 : une preuve élémentaire du “concours” des médiatrices

Ce qui suit est un problème (long et difficile), mais qui peut en théorie être proposé à des élèves de Terminale.

On appelle **demi-plan de Poincaré** l'ensemble suivant :

$$\mathbf{H} = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid y > 0\}.$$

On appelle **droites hyperboliques** les parties suivantes de \mathbf{H} :

- les demi-droites verticales d'origine située sur l'axe des x ,
- les demi-cercles centrés sur l'axe des x .

0) Montrer que les droites hyperboliques satisfont à l'axiome fondateur de la géométrie : *par deux points distincts de \mathbf{H} passe une droite hyperbolique et une seule.*

On appelle **horizon** ou bord de \mathbf{H} , l'ensemble formé de la droite réelle \mathbf{R} et d'un unique point à l'infini, noté ∞ . On considérera, par convention, que les droites de \mathbf{C} passent par ∞ , mais pas les cercles.

7.1 Étude des droites hyperboliques

1.1) Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$ vérifiant $a^2 + bc = 1$ et $c \geq 0$.

a) On note $C_{a,b,c}$ l'ensemble des points $x + iy$ vérifiant les relations :

$$c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0 \quad \text{et} \quad y > 0.$$

Montrer que $C_{a,b,c}$ est une droite hyperbolique. Dans le cas où cette droite hyperbolique est un demi-cercle, on précisera son centre et son rayon.

b) Montrer que les droites hyperboliques de \mathbf{H} sont toutes de la forme précédente.

1.2) Soient D et D' deux droites hyperboliques d'équations $c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0$ et $c'(x^2 + y^2) - 2a'x - b' = 0$ (avec les conditions de 1.1). On pose $\varphi(D, D') = aa' + \frac{1}{2}(bc' + b'c)$. Montrer que D et D' ont un point commun dans \mathbf{H} (resp. sur le bord de \mathbf{H}) si et seulement si on a $|\varphi(D, D')| < 1$ (resp. $\varphi(D, D') = \pm 1$).

7.2 Droites perpendiculaires

On dit que deux droites hyperboliques sont **perpendiculaires** si elles se coupent en un point de \mathbf{H} et si les tangentes aux deux “droites” en ce point sont perpendiculaires.

2.0) Montrer que, si ces droites hyperboliques sont des cercles, de centres o et ω et de rayons r et ρ , on a $o\omega^2 = r^2 + \rho^2$.

2.1) Soient D et Δ deux droites hyperboliques d'équations $c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0$ et $\gamma(x^2 + y^2) - 2\alpha x - \beta = 0$ avec $a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = 1$. Montrer que ces droites sont perpendiculaires si et seulement si on a $\varphi(D, \Delta) = 0$ ou encore $2a\alpha + b\gamma + c\beta = 0$.

2.2) Soient D, D' deux droites hyperboliques distinctes. Montrer que D et D' admettent une perpendiculaire commune si et seulement si elles n'ont pas de point commun ni dans \mathbf{H} , ni dans le bord de \mathbf{H} .

7.3 Le groupe hyperbolique

7.3.1 Homographies

Les homographies de \mathbf{C} sont les applications $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ et $ad - bc \neq 0$ (cette condition permet d'éviter que f ne soit constante). Une telle application définit une bijection de $\mathbf{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbf{C} - \{\frac{a}{c}\}$ (au moins si c est non nul ; on pourra calculer f^{-1} à titre d'exercice). Pour éviter qu'il ne manque ainsi des points, on complète \mathbf{C} en $\widehat{\mathbf{C}}$ en lui ajoutant, comme ci-dessus, un (unique) point à l'infini et on prolonge f sur $\widehat{\mathbf{C}}$ en posant $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$ (cela correspond aux limites en ces points).

On considère aussi les anti-homographies : $f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$.

3.1) Montrer que la composée de deux homographies est une homographie, que l'identité est une homographie et que l'inverse d'une homographie est une homographie.

3.2) Montrer qu'une homographie transforme une droite (resp. un cercle) en une droite ou un cercle (on pourra décomposer f en produit de similitudes et de transformations du type $z \mapsto 1/z$).

3.3) Montrer qu'une homographie distincte de Id admet au plus deux points fixes dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

3.4) Montrer que le produit d'une homographie et d'une anti-homographie est une anti-homographie, que celui de deux anti-homographies est une homographie, etc.

7.3.2 Homographies conservant le demi-plan

On considère l'ensemble G^+ des homographies à coefficients a, b, c, d réels vérifiant $ad - bc = 1$ et l'ensemble G^- des anti-homographies à coefficients réels aussi, mais avec $ad - bc = -1$. On pose $G = G^+ \cup G^-$.

3.5) Montrer que le produit de deux éléments de G^+ est dans G^+ . Étudier les divers cas mettant en jeu G^+ et G^- .

3.6) Soit f un élément de G . Montrer qu'on a $f(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$.

7.3.3 Les involutions de G^-

On s'intéresse aux involutions de G , c'est-à-dire aux éléments qui vérifient $f \circ f = \text{Id}$.

3.7) a) Soit $f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ un élément de G^- . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est une involution.

ii) f admet un point fixe dans \mathbf{H} .

iii) On a $a + d = 0$.

Montrer qu'on a alors la relation $a^2 + bc = 1$.

b) Montrer que l'ensemble des points fixes dans \mathbf{H} d'une involution de G^- est une droite hyperbolique.

c) Montrer, réciproquement, que si D est une droite hyperbolique, il existe une unique involution de G^- qui admet D comme ensemble de points fixes. On la note τ_D et on l'appelle **symétrie d'axe D** .

3.8) a) Soit D une droite hyperbolique et soit $f \in G$. Montrer que $f\tau_D f^{-1}$ est un élément de G^- , que c'est une involution et que ses points fixes sont exactement ceux de $f(D)$.

b) En déduire que tout élément $f \in G$ transforme une droite hyperbolique en une droite hyperbolique.

3.9) a) Soient D, D' deux droites de \mathbf{H} , distinctes et sécantes. Montrer que D et D' sont perpendiculaires si et seulement si on a $\tau_D \circ \tau_{D'} = \tau_{D'} \circ \tau_D$.

b) Montrer que les droites invariantes par τ_D et distinctes de D sont les perpendiculaires à D .

7.4 Le théorème des trois involutions

7.4.1 Le cas euclidien

4.1) Soient A, B, C trois droites distinctes du plan euclidien et τ_A, τ_B, τ_C les symétries par rapport à A, B, C . Montrer que la composée $u = \tau_A \circ \tau_B \circ \tau_C$ est une involution si et seulement si A, B, C sont concourantes ou parallèles.

On rappelle que le produit de deux symétries $s = \tau_A \circ \tau_B$ peut être de deux types :

1) Si A et B se coupent en o , s est la rotation de centre o et d'angle $2(B, A)$ (angle orienté des droites A, B).

2) Si A et B sont parallèles, s est la translation de vecteur $2\vec{v}$ où \vec{v} est le vecteur de la translation qui envoie B sur A .

7.4.2 Composées de symétries hyperboliques

4.2) Soient D, D' deux droites hyperboliques distinctes et $s = \tau_D \circ \tau_{D'}$. Montrer que l'on a les trois cas suivants :

a) Si D et D' se coupent en un point $o \in \mathbf{H}$, s admet un unique point fixe dans \mathbf{H} qui est le point o (et un autre dans le demi-plan $y < 0$).

b) Si D et D' ne se coupent ni dans \mathbf{H} , ni sur le bord, s a deux points fixes distincts sur le bord de \mathbf{H} .

c) Si D et D' se coupent sur le bord de \mathbf{H} en o , s a un unique point fixe dans $\hat{\mathbf{C}}$, qui est le point o .

Dans le cas a), s est appelée une “rotation hyperbolique”. On montrera que s n'admet aucune droite hyperbolique invariante. Dans le cas b), s est appelée une “translation hyperbolique”. On montrera qu'elle admet une unique droite invariante Δ qui est la perpendiculaire commune à D et D' . Dans le cas c), s est appelée un “déplacement parallèle”.

7.4.3 Le théorème des trois involutions en géométrie hyperbolique

Soient A, B, C trois droites hyperboliques. On dit que A, B, C sont en **faisceau** si elles sont concourantes en un point de \mathbf{H} , ou en un point du bord de \mathbf{H} , ou si elles admettent une perpendiculaire commune.

4.3) Soient A, B, C trois droites hyperboliques. Montrer que le produit $u = \tau_A \circ \tau_B \circ \tau_C$ est une involution si et seulement si les trois droites sont en faisceau (**théorème de Bachmann**).

7.5 Les médiatrices d'un triangle

7.5.1 Définition

Soient a, b deux points distincts de \mathbf{H} . Une droite hyperbolique D est appelée **médiatrice** de a, b si l'on a $\tau_D(a) = b$.

5.1) Soient a, b deux points distincts de \mathbf{H} . Montrer qu'il existe une unique médiatrice de a, b .

7.5.2 Le concours des médiatrices

5.2) Montrer que les médiatrices d'un triangle abc sont en faisceau.