

Pourquoi faut-il enseigner les mathématiques aujourd'hui ?

Daniel PERRIN

Introduction

Je remercie la régionale d'Alsace de l'APMEP de m'avoir invité à faire cette conférence.

C'est Jean-Pierre Darou qui m'en a proposé le titre : pourquoi faut-il enseigner les mathématiques aujourd'hui ? J'avoue que, dans un premier temps, je me suis senti un peu démuni face à cette requête et que j'ai demandé à l'infléchir vers une question qui m'est plus familière : pourquoi faut-il enseigner la géométrie ? Mais, en réfléchissant, j'ai perçu dans le choix du thème initial une telle inquiétude des professeurs, par rapport à l'enseignement de leur discipline, que je me suis senti obligé de tenter d'y répondre. Je note que cette inquiétude est relativement nouvelle : je suis convaincu que personne, dans un parterre de profs de maths, ne se serait posé cette question il y a trente ans. Je vais donc essayer de vous rassurer : oui, je suis convaincu qu'il faut continuer à enseigner les mathématiques !

Dire pourquoi est une vaste question et, comme tout mathématicien professionnel, j'ai mes propres réponses et elles sont multiples. Certaines suffisent à me convaincre totalement, par exemple : les mathématiques sont une incomparable école de formation au raisonnement, à la pensée rationnelle, à la rigueur (et je reviendrai sur ce point plus loin), les mathématiques sont un élément essentiel de la culture de l'humanité (Michèle Audin place la connaissance des polyèdres réguliers sur le même plan dans le patrimoine culturel de l'humanité que l'*Odyssée*, les sonates de Beethoven ou les statues de l'île de Pâques), les mathématiques sont belles (je considère que le théorème de Pascal ou la loi de réciprocité quadratique sont parmi les choses les plus belles que je connaisse). Enfin, et c'est peut-être le maître mot que je mettrais en avant pour justifier mon propre désir de faire des mathématiques, les mathématiques permettent de **comprendre**.

Comprendre à la fois des phénomènes de la nature, mais aussi les relations entre les concepts (le nombre, la forme) ; comprendre la relation entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre, comprendre pourquoi les nombres premiers de la forme $4k+1$ sont sommes de deux carrés et pas les autres, etc. C'est, à la question : pourquoi faire des mathématiques ? la réponse de Jacobi : *pour l'honneur de l'esprit humain* ou encore, celle de Hilbert : *le problème est là, tu dois le résoudre !*

J'espère que ces raisons sont aussi celles qui vous ont motivé pour faire ce métier, mais, même si nous sommes tous ici convaincus par cela, ce ne sont pas de bonnes raisons pour le public, ni sans doute pour certains de nos ministres. Ainsi, Luc Ferry, l'actuel ministre, lorsqu'il était président du CNP se déclarait volontiers sceptique sur la nécessité d'enseigner les mathématiques à tous les élèves du collège et du lycée. Il faut garder en mémoire qu'on disait exactement les mêmes choses à propos du latin (il forme le raisonnement, il a une grande importance culturelle et il comporte des choses magnifiques), ce qui n'a pas empêché sa disparition presque totale.

En revanche, la réponse qui risque d'emporter l'adhésion du plus grand nombre, c'est le fait que les mathématiques sont utiles, à la fois dans les sciences¹ (physique, chimie, biologie, géologie, informatique), les techniques (ingénieur, etc), en économie et en finance, utiles enfin dans la vie courante. Il est donc important d'étudier les mathématiques et, pour cela, sauf à nier la nécessité de tout enseignement, il faut bien les enseigner.

C'est parce que je suis convaincu que c'est ce point que nous devons mettre en avant pour justifier l'importance de notre discipline que je me sentais peu qualifié pour cette conférence car il se trouve que les mathématiques que je pratique, comme chercheur, n'ont pas d'applications – pas encore ? – à ma connaissance et je suis donc mal placé pour développer ce point. Je vais pourtant essayer de donner quelques éléments de réponse qui auront deux origines :

- 1) l'histoire des sciences,
- 2) un certain nombre de discussions avec mes collègues.

Ces arguments justifient totalement, à mon avis, la nécessité d'enseigner les mathématiques aux futurs scientifiques, informaticiens, économistes etc. et c'est déjà un point essentiel. Ce sera ma réponse à Claude Allègre, en quelque sorte. J'essaierai ensuite de voir quelle est la nécessité de l'enseignement des mathématiques à tous, de la maternelle à l'université (APMEP oblige !). Cette fois c'est à Luc Ferry que je répondrai par ce moyen.

¹Contrairement à l'opinion de Claude Allègre, qui est un scientifique de valeur, mais qui a dit des bêtises sur le sujet.

1 Pourquoi les mathématiques : parce qu'elles sont utiles

Oui, les mathématiques sont utiles. L'histoire nous l'enseigne et l'actualité nous le confirme.

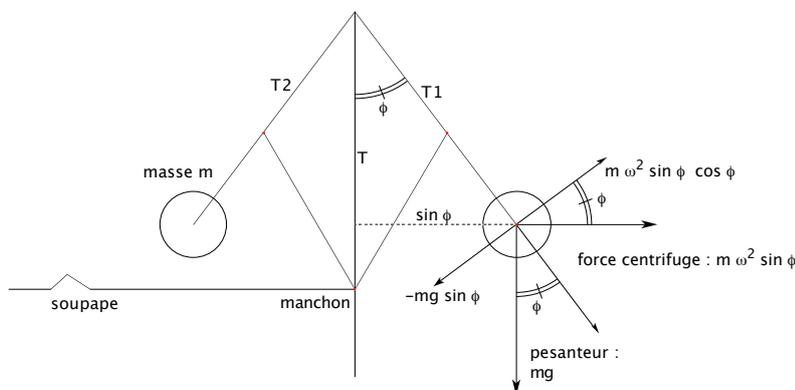
1.1 Les mathématiques qui existent s'appliquent : l'exemple du régulateur à boules

Il y a un vieil exemple de mathématiques appliquées que j'aime particulièrement, c'est celui du régulateur à boules. J'aime bien cet exemple, parce que les mathématiques y ont permis de résoudre un problème concret, avec une solution assez inattendue.

Je raconte brièvement cet exemple, que j'emprunte au livre de Pontrjagin : *Equations différentielles ordinaires* (Editions Mir, 1969).

Vous avez sans doute appris au lycée qu'il existait autrefois un dispositif inventé par Watt au XVIII^{ème} siècle qui servait à réguler le fonctionnement d'une machine à vapeur (il était notamment utilisé pour réguler le mouvement des ascenseurs des mines). Or, si ce dispositif fonctionnait correctement à la fin du XVIII^{ème} siècle et jusqu'au milieu du XIX^{ème}, son fonctionnement devint alors beaucoup moins satisfaisant, malgré tout le soin apporté à sa fabrication, sans que les ingénieurs ne comprennent quelle était la source des problèmes.

C'est un ingénieur russe nommé Vichnegradski qui résolut le problème en 1876 en utilisant la théorie de Liapounov sur la stabilité des équations différentielles qui venait d'être élaborée.



Voici le problème. On a un régulateur, constitué par une tige T verticale sur laquelle sont fixées deux tiges (de longueur unitaire) avec deux masses égales à leurs extrémités, et ces tiges T_1, T_2 , sous l'effet de la force centrifuge, peuvent s'écarter de la position verticale d'un même angle ϕ , voir la figure ci-dessus. Solidaire des tiges T_1, T_2 , il y a un manchon qui coulisse sur T et commande une soupape qui règle le débit de vapeur : plus la vitesse de rotation est grande (donc l'angle ϕ grand), plus la soupape libère de vapeur et donc diminue la vitesse. La condition d'équilibre du système (de manière statique) est évidente : $\omega^2 \cos \phi = g$.

En revanche la dynamique du dispositif est plus compliquée. Elle est régie par l'équation différentielle suivante :

$$m\phi'' = m\omega^2 \sin \phi \cos \phi - mg \sin \phi - b\phi'$$

où m est la masse des boules, ω la vitesse angulaire de rotation et b un coefficient de frottement. En fait, par le dispositif de soupape, la vitesse de rotation ω dépend aussi de ϕ et on a une autre équation : $J\omega' = k \cos \phi - F$ où F est une constante et J le moment d'inertie du volant de la machine.

On a donc un système de deux équations, mais, comme l'une est du second ordre, on introduit $\psi = \phi'$ pour se ramener à un système de trois équations du premier ordre :

$$\begin{aligned}\phi' &= \psi \\ \psi' &= \omega^2 \sin \phi \cos \phi - g \sin \phi - \frac{b}{m}\psi, \\ \omega' &= \frac{k}{J} \cos \phi - \frac{F}{J}.\end{aligned}$$

On est maintenant en pays de connaissance mathématique. Bien entendu, les équations ne sont pas linéaires (il y a un terme en ω^2 et des sinus et cosinus), mais, si on se place au voisinage de la position d'équilibre² $\phi = \phi_0$, $\psi = 0$, $\omega = \omega_0$, on peut développer par la formule de Taylor. On peut alors regarder le système linéaire obtenu en ne conservant que les termes du premier ordre (c'est-à-dire l'application linéaire tangente, définie par une matrice 3×3). Bien entendu, on sait résoudre ce système linéaire (avec l'exponentielle de matrice). De plus, le théorème de stabilité de Liapounov donne une condition suffisante de stabilité qui ne porte que sur le système linéaire et qui est (c'est bien naturel !) que les valeurs propres de la matrice soient de parties réelles négatives (pour n'avoir que des exponentielles décroissantes dans les solutions du système linéaire). On est ramené à un problème qui porte sur le polynôme caractéristique, qui est le polynôme de degré 3 suivant, à coefficients > 0 :

$$P(X) = X^3 + \frac{b}{m}X^2 + \frac{g \sin^2 \phi_0}{\cos \phi_0}X + \frac{2kg \sin^2 \phi_0}{J\omega_0}.$$

Le lemme suivant (exercice pour le lecteur, il faut déjà montrer qu'il y a une seule racine réelle) donne la condition cherchée :

1.1 Lemme. *Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients réels positifs. Les trois racines de P ont des parties réelles < 0 si et seulement si on a $ab > c$.*

Le calcul donne ici la condition de stabilité : $\frac{bJ\omega_0}{2Fm} > 1$.

Cela permet à Vichnégradski de montrer que, pour renforcer la stabilité il faut :

²Caractérisée par $k \cos \phi_0 = F$ et $\omega_0^2 \cos \phi_0 = g$.

- 1) Diminuer la masse.
- 2) Augmenter le frottement.
- 3) Augmenter le moment d'inertie J .
- 4) Augmenter la "non uniformité" $\nu = \frac{\omega_0}{2F}$.

Les conclusions de Vichnégradski permettent d'expliquer le fonctionnement défectueux des régulateurs au XIX^{ème} siècle. En effet, toutes les grandeurs avaient évolué dans le mauvais sens : on utilisait des boules de plus en plus lourdes, l'augmentation des vitesses imposait la diminution du moment d'inertie et surtout ... l'amélioration des techniques d'usinage des pièces diminuait le frottement. C'est ce point que je trouve particulièrement intéressant car il aboutit à une conclusion qui allait dans le sens contraire de l'amélioration apparente de la technologie³. On notera que, dans cet exemple, la physique est bien connue (c'est la loi fondamentale de la mécanique), mais que ses conséquences mathématiques ne sont pas évidentes.

Le travail de Vichnégradski devait d'ailleurs permettre de redonner une nouvelle jeunesse au régulateur de Watt, notamment par une augmentation artificielle du frottement.

Notons aussi, et c'est encore un argument pour enseigner les mathématiques décontextualisées, que la même théorie des équations différentielles que l'on vient de voir s'appliquer en mécanique est tout aussi importante en électricité, en hydraulique, etc.

1.2 Des exemples plus récents : statistiques

Mon collègue statisticien Pascal Massart m'a donné des exemples d'applications des statistiques relevant de plusieurs secteurs, certains traditionnels, d'autres nouveaux. Dans tous ces domaines, les statistiques jouent un rôle d'aide à la décision. Elles permettent de réfuter un modèle, d'en sélectionner un meilleur parmi plusieurs, de repérer des phénomènes, d'analyser le passé. Voici quelques exemples.

- Parmi les applications traditionnelles des statistiques on peut citer le contrôle de qualité et la fiabilité. Une entreprise (qui fabrique par exemple des semi-conducteurs) souhaite améliorer la qualité de ses produits. Elle leur fait subir des tests extrêmes et relève les durées de vie. Les physiciens de l'entreprise ont en tête plusieurs modèles plausibles pour le comportement des objets en fonction des divers paramètres (par exemple : la durée de vie est inversement proportionnelle à la température, etc.). Les statistiques jouent alors un rôle d'aide à la décision de manière double. Elles permettent de

³Cela me rappelle une anecdote qu'on raconte à propos d'un chef d'orchestre qui faisait répéter la sixième symphonie (pastorale) de Beethoven et notamment le passage de l'orage. Il n'était jamais satisfait de la prestation de l'orchestre répétant sans cesse : *non, non, ça ne va pas* et le faisait recommencer perpétuellement, jusqu'au moment où l'un des musiciens excédé lui dit : *mais, maître, nous jouons du mieux que nous pouvons* et le chef de s'écrier, *c'est ça, justement, vous jouez trop bien*.

réfuter un modèle (lorsque les statistiques ne concordent pas). Mais elles permettent aussi d'en sélectionner un meilleur parmi plusieurs, en fonction des résultats.

- Un autre domaine, plus récent, où les statistiques interviennent de manière massive, est la génomique, même si leur présence est moins visible que celles de la biologie ou de l'informatique⁴.

L'un des champs d'application est l'analyse des séquences ADN (le codage se fait en écrivant des mots à l'aide des seules quatre lettres A,C,G,T, initiales des protéines qui interviennent). Le travail du statisticien est de repérer des phénomènes (fréquence inhabituelle de telle lettre, de tel groupement de lettres, etc.), à charge ensuite pour le biologiste d'interpréter ces phénomènes. Une application est la réalisation d'arbres phylogéniques (i.e. généalogiques) des espèces et notamment la recherche d'ancêtres communs.

- Dans le même ordre d'idée épistémologique, se trouve le domaine de la prédiction. Par exemple le laboratoire de statistiques d'Orsay a travaillé avec AirParif sur des modèles de prévision à 24 heures de la qualité de l'air en région parisienne. L'outil essentiel de ce travail est l'analyse du passé. Bien entendu, la connaissance d'un certain nombre de phénomènes physiques est essentielle (le rôle du vent, de la température, etc.), mais ce qui est étonnant c'est qu'on n'est pas forcé d'avoir entièrement compris les phénomènes pour les expliquer, voire les prédire⁵. P. Massart a, à cet égard, une formule frappante :

La nature s'est montrée plusieurs fois. Elle a eu tort : on peut maintenant la reconnaître.

1.3 Des exemples plus récents : analyse numérique

Dans un autre domaine, mon collègue François Allouges qui est spécialiste d'analyse numérique (et travaille avec le CEA) m'a donné lui aussi plusieurs exemples actuels d'interactions des mathématiques avec les autres disciplines (physique, informatique) pour traiter de vrais problèmes. Je note au passage que la phrase qu'il a utilisée pour résumer sa motivation est "comprendre les choses". Comme quoi ...

Dans les problèmes ci-dessous, le schéma est toujours un peu le même.

1) On a une modélisation qui vient de la physique et consiste le plus souvent en une EDP (équation aux dérivées partielles). En général cette équation est bien connue.

2) Les mathématiciens (purs) essaient de montrer des théorèmes fondamentaux relatifs à cette EDP (existence, unicité, régularité des solutions).

⁴Le lecteur pourra consulter les articles de F. Muri-Majoube et B. Prum et de G. Didier, I. Laprévotte et M. Pupin dans La Gazette des mathématiciens numéros 89 (juillet 2001) et 92 (avril 2002).

⁵On reverra cette idée à propos de Kepler.

- 3) En général, on ne sait pas calculer des solutions exactes. Les mathématiciens (appliqués) cherchent donc à construire des solutions approchées en fabriquant des algorithmes (stables).
- 4) Il reste à programmer ces algorithmes en un temps raisonnable (c'est de l'informatique, mais il y a encore de gros problèmes mathématiques).

Voici quelques exemples précis qui concernent de vrais problèmes appliqués et nouveaux :

- Le président de la République a décidé de l'arrêt total des essais nucléaires français qui doivent être remplacés par des simulations. Or, si les équations aux dérivées partielles qui régissent une explosion nucléaire sont connues, elles sont beaucoup trop compliquées pour être résolues, même numériquement. De plus il y a des facteurs d'échelle qui font que les méthodes utilisées (éléments finis, etc.) ne s'appliquent pas dans le domaine considéré (en gros on saurait faire si l'explosion était confinée à 1 millimètre cube!).
- Un autre sujet d'actualité est la sécurité des centrales nucléaires. Là encore il y a des problèmes très difficiles. Un exemple : un écoulement d'eau bouillante dans un tuyau. L'équation est connue (équation du diphasique), mais on ne sait rien en dire (même pas si elle a des solutions). C'est un cas linéairement instable (contrairement au régulateur) où on subodore que la stabilité vient de la non-linéarité. Or EDF utilise de tels écoulements et veut savoir si ses tuyaux sont adaptés.
- Une autre demande présidentielle, à propos d'essais nucléaires, est de vérifier si les autres pays en font ou pas (la Chine, etc.). Pour cela on installe des sismographes en utilisant le fait qu'il ya des guides d'ondes naturels dans les océans (phénomène lié à la variation de la salinité avec la profondeur). Là encore il y a des problèmes mathématiques fondamentaux (où placer les sismographes pour restituer le signal initial)⁶.

Bref, pour conclure sur ce paragraphe : oui les mathématiques sont utiles, et elles sont présentes dans la plupart des domaines de l'activité humaine.

2 Les mathématiques qui ne sont pas utiles aujourd'hui le seront un jour

Les derniers exemples d'applications que je viens de donner et qui concernent les bombes nucléaires vous ont peut-être paru bien belliqueux. Certes, et je me souviens de Roger Godement disant de son

⁶Pour donner une idée du développement de ce type de problèmes, une douzaine de bourses de recherche sont proposées par le CEA de Saclay pour les mathématiques l'an prochain et le CEA est en train de lancer un projet de master "Mathématiques de la modélisation, Simulation et Application en Physique".

ton rogne : *au moins quand on travaille sur les groupes d'homotopie des sphères on ne travaille pas pour la bombe atomique. Voire!* Les mathématiques réservent parfois des surprises quant à leurs applications et je serais plus prudent sur le sujet, comme on va le voir sur deux exemples, l'un historique, l'autre actuel.

2.1 Kepler et la géométrie

Vous savez que les grecs anciens (Platon, Euclide, etc.) étudiaient (et enseignaient) les mathématiques (*Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre*, disait Platon) et à cette époque bénie, elles étaient étudiées pour des raisons philosophiques, pour la beauté qu'elles recelaient, l'harmonie qui les sous-tendait, la connaissance qu'elles permettaient d'approcher. En revanche, même si elles avaient des applications, ce n'est pas dans cet objectif qu'elles étaient étudiées (Platon se moque des "calculateurs").

Pourtant, certaines de ces mathématiques "pures", comme nous dirions aujourd'hui, ont vu leur position retournée, parfois longtemps après. C'est le cas avec les travaux de Kepler.

Rappelons que Kepler (1571-1630) est connu pour ses célèbres lois concernant le mouvement des planètes. Il vient après Copernic et son système héliocentrique, il est contemporain de Galilée et il précède Newton. Il est le disciple de l'astronome danois Tycho Brahé et bénéficie des observations, d'une précision extraordinaire pour l'époque, de celui-ci.

Kepler est au début astrologue et enseigne les mathématiques (il n'y a pas de sot métier). L'histoire (la légende?) raconte que c'est en dessinant au tableau la figure formée d'un triangle équilatéral et de ses cercles inscrit et circonscrit qu'il eut une sorte de révélation. *La joie que me donna ma découverte ... je ne saurais jamais la dire.*

Quelle est donc cette découverte? Kepler remarque que le rapport 2 entre les rayons R et r de ces cercles est aussi celui des rayons⁷ des orbites de Saturne et de Jupiter et il essaie d'étendre cette constatation aux autres planètes. Il n'y parvient qu'en utilisant des figures à 3 dimensions et là, une évidence merveilleuse le frappe : les 5 intervalles entre les 6 planètes du système solaire correspondent exactement aux polyèdres réguliers (connus depuis Platon et que Kepler connaît parfaitement, il découvrira même deux des polyèdres réguliers étoilés) : le cube entre Saturne et Jupiter, le tétraèdre entre Jupiter et Mars, le dodécaèdre entre Mars et la Terre, l'icosaèdre entre la Terre et Vénus et enfin, l'octaèdre entre Vénus et Mercure. Il publie cette découverte dans le *Mysterium Cosmographicum* en 1596. Voilà comment des mathématiques, réputées pures jusque là (les polyèdres réguliers, sommets de la géométrie d'Euclide n'avaient

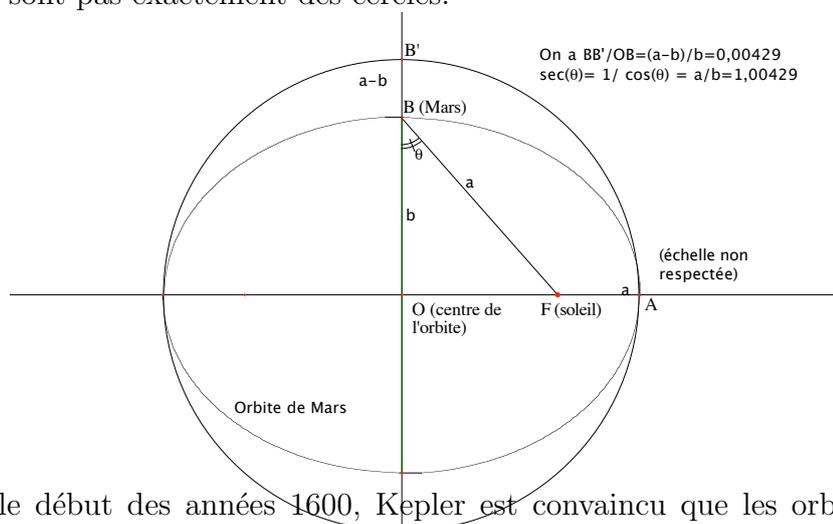
⁷A cette époque on pense que les trajectoires des planètes sont des cercles.

pas d'applications) deviennent tout à coup explications du monde : *j'avais résolu le secret de l'Univers* dit Kepler.

Bien. Il est temps de discuter un peu. En fait, tout cela est absolument faux et paraît totalement absurde à nos yeux. D'abord, comme vous le savez, il n'y a pas 6 planètes dans notre système solaire, mais 9 (Uranus, Neptune et Pluton étaient alors inconnues)⁸. Ensuite, contrairement à ce qu'affirme Kepler, les solides ne s'ajustent pas du tout aux orbites (on soupçonne que Kepler triche, plus ou moins consciemment, avec ses données, notamment pour Mercure et Vénus). Mais, il est sincèrement convaincu (et même encore vers la fin de sa vie) d'avoir découvert quelque chose d'essentiel et ce qui fonde cette croyance, c'est l'idée d'un agencement divin de l'univers, qui doit donc trouver son écho dans les mathématiques, autre symbole de perfection.

On voit que cette vision métaphysique le mène à une erreur grossière. Pourtant, c'est aussi cette même foi en les mathématiques qui va lui permettre de faire sa découverte principale.

Au départ, il y a le système de Copernic, qui affirme (comme Platon et Ptolémée) que les orbites des planètes sont des cercles, mais de centre le soleil (c'est l'apport de Copernic). Mais Copernic est un piètre expérimentateur et les mesures de Tycho Brahé montrent que le centre des orbites n'est pas exactement le soleil et même, que celles-ci ne sont pas exactement des cercles.



Dès le début des années 1600, Kepler est convaincu que les orbites sont des ovales⁹, mais ce n'est qu'en 1609 dans l'*Astronomia nova* qu'il énonce sa première loi, avec là encore la conviction profonde que

⁸La même mésaventure est arrivée à d'autres lois empiriques comme la loi de Titius-Bode qui prétendait donner les distances du soleil aux planètes (en fonction de la distance Terre-Soleil) en partant de la suite 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, ..., en ajoutant 4 et divisant par 10. Cette loi ne résista pas à la découverte de Neptune et Pluton.

⁹Et cela le perturbe beaucoup : il dit avoir rencontré *une charretée de fumier : l'ovale*. Il dit aussi : *si seulement la forme était une ellipse parfaite, on trouverait toutes les réponses dans Archimède et dans Apollonius*.

l'explication du monde est dans les mathématiques et notamment dans les travaux des anciens.

Le détail qui provoque la découverte est remarquable, Kepler note la coïncidence de deux chiffres relatifs à l'orbite de Mars (la plus elliptique de toutes) : d'une part l'épaisseur de la lunule qui différencie l'orbite d'un cercle et qui est égale à 0,00429 fois le rayon de celui-ci, d'autre part, la sécante (i.e. l'inverse du cosinus) de l'angle de sommet Mars et passant d'une part par le soleil et d'autre part par le centre de la trajectoire, vaut 1,00429 ! Bien entendu cela s'explique en termes d'ellipse, le premier chiffre est $\frac{a-b}{b}$, l'autre est a/b , voir figure ci-dessus, mais c'est ce fait qui a mis Kepler sur la bonne piste.

En effet, il connaît bien les coniques (et notamment les résultats d'Archimède et Apollonius) et reconnaît dans la coïncidence numérique la situation de l'ellipse. Il formule alors :

Première loi : Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil est un foyer.

Notons que la deuxième loi de Kepler (découverte avant la première) concerne le temps de révolution des planètes. Le paradoxe apparent c'est que le rapport des rayons des orbites de Saturne et Jupiter est de 2, tandis que le rapport des périodes est de 30/12 et non de 24/12 comme on pourrait s'y attendre. Kepler est le premier à penser (avec une autre belle idée géométrique) que les durées sont proportionnelles aux aires balayées et non aux distances parcourues (c'est la deuxième loi).

La troisième loi relie la période à la distance au soleil : le rapport T^2/d^3 est constant.

Je trouve l'histoire de Kepler magnifique, ne serait-ce que comme illustration des voies détournées qu'emprunte souvent la découverte. Mais, au-delà de l'aspect historique, j'en retiens deux faits essentiels. D'abord, il y a cette mutation d'un domaine (les coniques) qui relevait jusqu'alors essentiellement des mathématiques pures (même si Archimède avait tenté d'incendier la flotte romaine avec un miroir parabolique) et qui, d'un coup, devenaient explications du monde.

Ensuite, ce qui me fascine dans la démarche de Kepler, c'est cette foi extraordinaire (de source essentiellement religieuse) en les mathématiques. Il ne peut penser que Dieu a créé le monde sans référence à la perfection mathématique. On a vu que cette conviction pouvait le conduire à des délires, mais aussi qu'elle est à la source d'une des principales découvertes de l'humanité. Il faut bien comprendre que Kepler n'explique à peu près **rien** du point de vue physique (il a, tout au plus, l'idée d'une force venant du soleil et d'une autre située dans la planète elle-même, mais il est convaincu de l'existence d'une explication) et qu'il n'y a aucune preuve qui corrobore ces intuitions. Ce sera à Newton que reviendra le mérite d'énoncer la loi de la gravitation qui permet de prouver mathématiquement les

lois empiriques de Kepler à partir de la loi physique de la gravitation universelle. Ce qui est remarquable dans cet exemple (et on retrouve un peu ce que dit Pascal Massart à propos de l'exemple de la prédiction de la qualité de l'air vu plus haut), c'est justement que les mathématiques permettent de prévoir le déroulement des phénomènes (ici les trajectoires des planètes et leur loi horaire), avant même que l'explication physique n'ait véritablement été obtenue. Au contraire, ici, celle-ci ne viendra qu'après et en s'appuyant sur la description mathématique.

Attention, ma conclusion, à propos de Kepler, n'est pas qu'il faut vouer aux mathématiques un culte quasi-divin¹⁰, mais cet exemple montre tout de même qu'on peut, de temps en temps, leur faire un peu plus confiance. Pour simplifier à outrance, je dirais que, comme le réel peut se décrire, au moins de manière approchée, à l'aide des mathématiques, celles-ci vont permettre de calculer sur le réel, donc de le prévoir.

2.2 Un exemple actuel : les nombres premiers et le code RSA

Il y a de nombreux autres exemples de théories mathématiques préexistant à leurs applications :

- les imaginaires et leur utilisation en électricité,
- la géométrie riemannienne et la relativité,
- les espaces de Hilbert et la mécanique quantique,
- la logique et l'informatique,
- le mouvement brownien et la finance, etc.

Bien sûr, il y a beaucoup des mathématiques actuelles qui n'ont pas d'applications et celles que je pratique en sont un exemple. Il faut toutefois être prudent à ce sujet. En effet, si vous m'aviez posé, dans les années 1970, la question de savoir à quoi servaient les recherches mathématiques en théorie des nombres (sur les nombres premiers ou les courbes elliptiques, par exemple) je vous aurais répondu sans hésiter, à rien, c'est pour l'honneur de l'esprit humain (comme dit Jacobi) et j'aurais peut-être ajouté qu'en tous cas elles ne servaient pas à la bombe atomique (comme dit Godement). Et, de fait, à l'époque, les applications de ces belles théories étaient inexistantes. Trente ans plus tard, je suis bien obligé de dire que j'aurais proféré alors une bêtise, puisque depuis l'irruption des nombres premiers en cryptographie, avec le code RSA, ils jouent maintenant un rôle de premier plan dans presque tous les secteurs de la communication, de la finance, etc. et que parmi les plus grands utilisateurs se trouvent justement ... les militaires.

¹⁰Je serais plutôt, de ce point de vue, sur la longueur d'onde de Laplace : *Dieu ? Je n'ai pas besoin de cette hypothèse.*

Je demande maintenant aux espions du ministère de sortir de la salle

Maintenant que nous sommes entre nous, je dois dire que les choses ne sont pas tout à fait aussi simples. Je vais évoquer deux points.

Le premier point est le dilemme exact-approché. Vous savez tous construire un hexagone régulier à la règle et au compas. On peut montrer qu'en revanche, l'heptagone régulier n'est pas constructible. Cependant s'il ne l'est pas **exactement**, il l'est, de manière approchée, avec une précision aussi grande que l'on veut (une construction pas si grossière consiste à prendre la moitié du côté du triangle équilatéral comme côté de l'heptagone). Même en imaginant que cette construction ait des applications essentielles, je ne vois pas bien quelle importance pourrait avoir l'impossibilité de la construction exacte, dans la mesure où l'on peut réaliser la construction avec une précision plus fine que la taille de la plus petite particule, par exemple.

Le second point est l'importance de la démonstration pour les mathématiciens. Je prends deux assertions de théorie des nombres : le grand théorème de Fermat et la conjecture de Goldbach¹¹. Imaginons que ces assertions deviennent, pour une raison ou une autre, essentielles pour les applications. L'une est démontrée (depuis quelques années), l'autre ne l'est pas, mais on l'a vérifiée pour tous les entiers jusqu'à une borne immense. Croyez-vous que, pour les applications, cela fasse une différence ? Sans doute pas, encore que ...

Bref, ceux d'entre vous qui regrettent le temps où les mathématiques étaient extérieures au monde réel peuvent se rassurer : il nous reste des préoccupations qui ne sont pas tout à fait celles des autres !

3 Les mathématiques sont utiles pour tous

Il n'est pas facile, pour répondre à Luc Ferry, de dire pourquoi enseigner les mathématiques à tous. Je pourrais évidemment donner des arguments, des exemples, de bonnes raisons pour cela. Il suffirait que j'invoque la citoyenneté : comment comprendre la profusion de chiffres et de diagrammes dont on nous abreuve en permanence si ce n'est en étudiant les statistiques¹², comment comprendre le mécanisme des tranches de l'impôt sur le revenu¹³ si ce n'est en étudiant les fonctions affines par morceaux, comment démonter les contradictions des hommes politiques si ce n'est en étudiant la logique. Je pourrais aussi, s'agissant de la géométrie, parler de la vision géométrique, du

¹¹L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières non triviales pour $n \geq 3$; tout nombre pair ≥ 4 est somme de deux nombres premiers.

¹²Sur ce sujet, je vous renvoie à la partie *Statistiques* du rapport d'étape de la commission Kahane et à son annexe.

¹³Question pas tout à fait évidente : quand a-t'on intérêt à demander le rattachement de ses enfants majeurs au foyer fiscal ?

repérage, etc. Je pourrais : je l'ai fait dans le rapport d'étape de la commission Kahane auquel je vous renvoie.

Si je fais tout cela, vous serez sans doute partiellement convaincus, mais cela risque de rester abstrait et superficiel. C'est pourquoi j'ai choisi trois exemples personnels, trois fois où je me suis dit : finalement, faire des maths, ce n'est peut-être pas inutile.

3.1 Bricolages

Il m'arrive (pas très souvent) de faire quelques menus travaux dans ma maison. Je suis ce que les vrais professionnels appellent dédaigneusement un bricoleur, c'est-à-dire que je ne maîtrise vraiment aucune des techniques de base du bâtiment. En revanche, les mathématiques me sont plus familières et il m'est arrivé plusieurs fois de les mettre à profit¹⁴.

i) Le meuble récalcitrant.

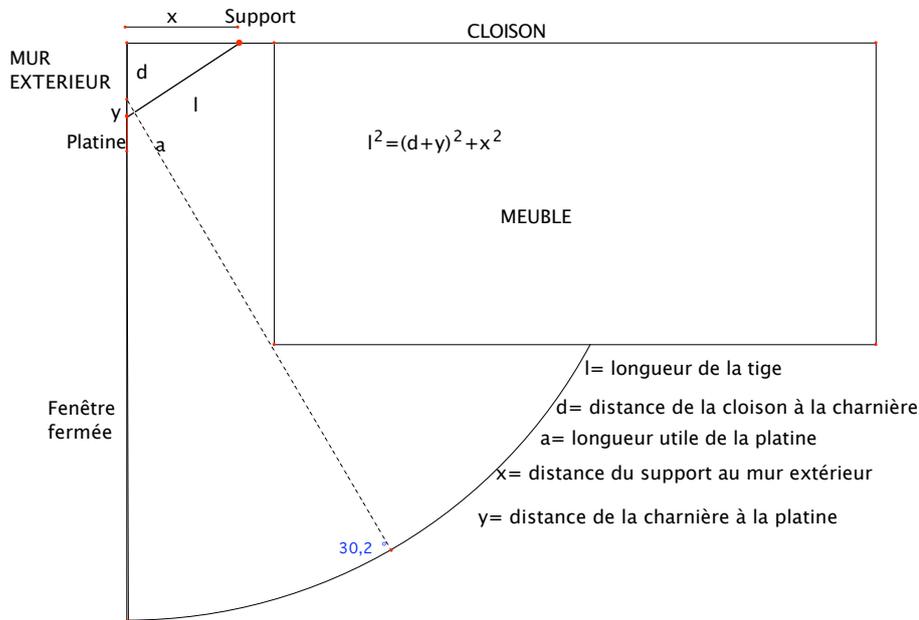
Le premier exemple est très simple. J'ai transporté de ma maison de la région parisienne à celle des Vosges un meuble de séjour très haut. Pour le transporter dans la pièce qui devait le recevoir il fallait le passer par un balcon de façon un peu périlleuse. De plus, la pièce en question était déjà aménagée et je ne voulais pas y faire des travaux salissants. J'ai donc pris la précaution de mesurer le meuble pour voir non seulement s'il tenait en hauteur (c'était le cas), mais aussi s'il pouvait pivoter pour se mettre en place (donc si la hauteur était plus grande que la diagonale, calculée par Pythagore) : ce n'était pas le cas. J'ai donc scié la base du meuble avant de le transporter et tout s'est bien passé.

ii) Le bidule de la cuisine.

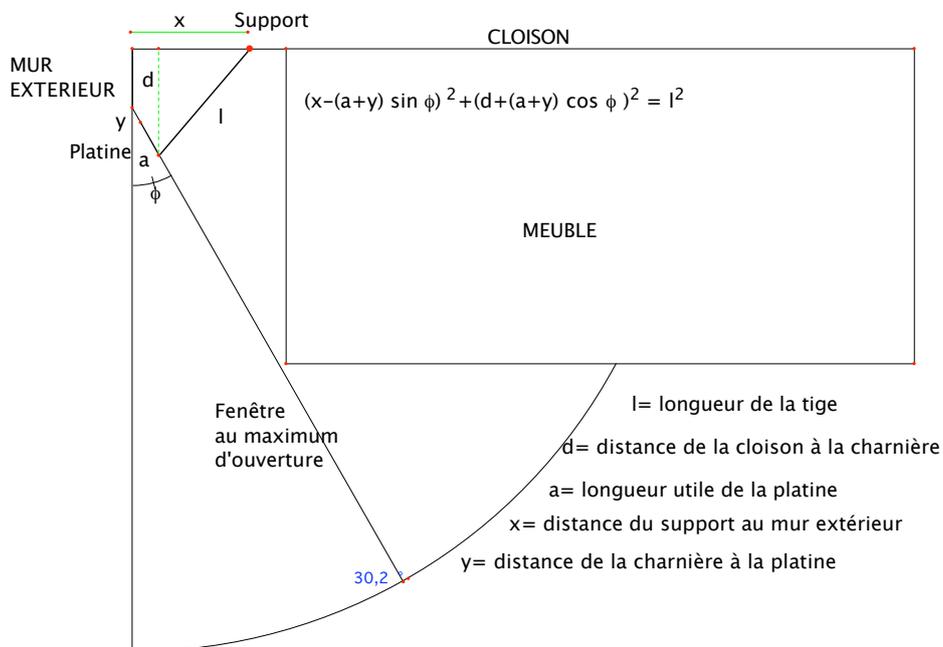
Il y a une quinzaine d'années j'ai installé moi-même des meubles de cuisine dans ma maison d'Antony. Pas de problème, sauf qu'une fois installés, la fenêtre cognait contre l'un des meubles, au risque de casser la vitre. J'ai fouillé ma cave à la recherche d'une idée de dispositif permettant de bloquer la fenêtre. J'ai trouvé un bidule en deux morceaux, une platine et un support, sans doute un reste d'un entrebâilleur de porte avec chaîne qui venait du précédent propriétaire de ma maison. Heureusement, vieux reste de mes ascendances paysannes, je ne jette rien. J'ai bricolé une tige métallique rigide que j'ai fixée au support et qui coulisse dans la platine, afin de bloquer la fenêtre avant le choc contre le meuble. Le problème qui restait était de déterminer la position de la platine sur la fenêtre (cf. l'inconnue y) et du support sur le mur (cf. l'inconnue x), voir la figure. C'est un véritable problème de mathématiques, du niveau d'un lycéen. On écrit deux équations, l'une correspond à la fenêtre fermée, la tige est à l'extrémité A de la

¹⁴Avec l'aide de mon épouse, mathématicienne elle aussi !

platine, l'autre correspond à l'ouverture maximale (qui fait un angle de $\phi = 30$ degrés), la tige est à l'autre extrémité B de la platine. Les données sont l'angle ϕ , les longueurs $d = 6,5\text{cm}$ (distance de l'axe de la fenêtre au mur), $a = 4\text{cm}$ (longueur utile de la platine), $l = 15\text{cm}$ (longueur de la tige), les inconnues sont x (distance du support au mur de la fenêtre) et y (distance de la platine à l'axe de la fenêtre).



La première équation : $l^2 = (d + y)^2 + x^2$ (la fenêtre est fermée) vient de Pythagore.



La deuxième équation vient encore de Pythagore (la fenêtre est au maximum d'ouverture) $(x - (a + y) \sin \phi)^2 + (d + (a + y) \cos \phi)^2 = l^2$. En mettant les deux ensemble on tire y en fonction homographique de

x , en reportant dans la première équation on trouve une équation en x (qui se ramène à une équation algébrique du quatrième degré) :

$$l^2 = \left(d + \frac{2ax \sin \phi - a^2 - 2ad \cos \phi}{2a + 2d(\cos \phi - 1) - 2x \sin \phi} \right)^2 + x^2$$

et on calcule des valeurs approchées de x et y (c'est maintenant immédiat avec une calculatrice un peu perfectionnée ; à l'époque nous avons dû travailler un peu !) On trouve $x = 12,5\text{cm}$ et $y = 1,7\text{cm}$.

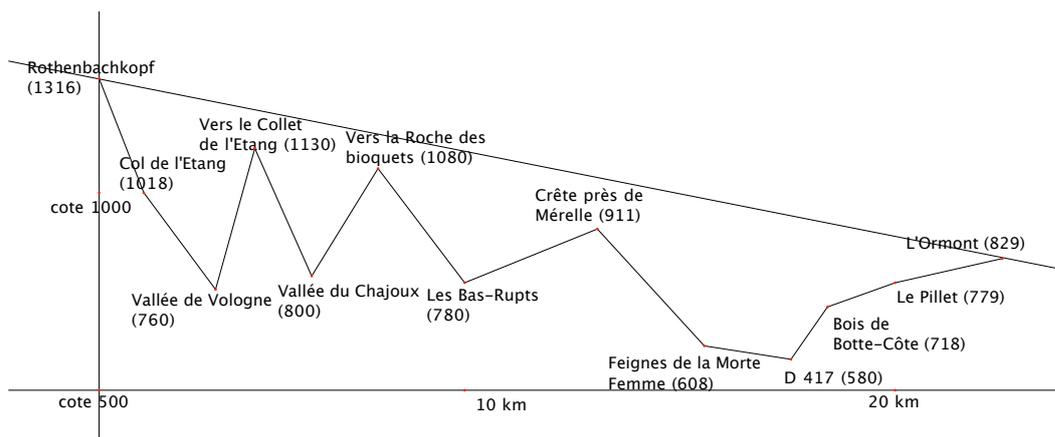
L'expérience que j'ai des menuisiers, plâtriers, charpentiers et autres hommes de l'art me fait penser que la plupart auraient réprouvé mon bricolage. Il tient pourtant toujours le coup, 15 ans après.

3.2 La montagne mystérieuse

Lors d'une promenade dans les Vosges nous avons découvert, du sommet du Rothenbachkopf, 1316 m, le paysage représenté sur la photo ci-dessous. Nous étions capables d'identifier la plupart des sommets environnants, sauf l'un d'entre eux, une montagne, en forme caractéristique de table. Nous avons donc entrepris une sorte de quête de cette montagne mystérieuse, qui a commencé avec une carte IGN. Il y a deux difficultés. La première est de déterminer la direction de la montagne. Même si nous n'avions pas de boussole, nous avons suffisamment de points de repères connus pour que cette difficulté puisse être surmontée, en particulier une ferme isolée au dessus du hameau du Nol à La Bresse (attention toutefois : une petite erreur d'angle au départ a de graves conséquences 20 kilomètres plus loin). L'autre difficulté est d'évaluer la distance, ce qui n'est pas du tout évident, d'autant qu'il y a un grand nombre de chaînes intermédiaires entre les deux.

L'intrusion essentielle (et assez minime) des mathématiques, et notamment de la géométrie, est l'idée de représenter la situation sur un dessin. Notre principe a été de tracer une droite sur la carte et d'établir une sorte de coupe en notant les altitudes et les distances des points rencontrés (sommets et vallées). Les mathématiques sont réapparues alors car un dessin à l'échelle s'est avéré illisible. Heureusement, l'affinité conserve l'ordre et l'alignement et nous avons pu augmenter l'échelle sur la verticale.

À partir d'une telle coupe, on détermine alors facilement, en traçant des droites, quels sont les sommets vus depuis le Rothenbachkopf dans la direction prescrite. Avec le nombre de plans intermédiaires et l'aspect des lignes de niveau nous avons pu conjecturer quelle était la montagne en forme de table : l'Ormont, une montagne qui domine Le Thôly, près de Gérardmer, à 20 km du Rothenbachkopf. Ce qui est étonnant c'est que l'Ormont n'est qu'à 829 m seulement bien que cette montagne ne semble pas tellement plus basse que d'autres, connues, qui culminent à plus de 1000 m.



J'ai ensuite entrepris la vérification de la conjecture par une méthode plus fatigante, mais nettement plus sûre : je suis retourné au sommet du Rothenbachkopf et j'ai marché (avec quelques trajets en voiture aussi) dans la direction de la montagne mystérieuse. Pour chaque étape je prenais un point de repère sur la montagne du plan immédiatement suivant. C'est ainsi que je suis passé successivement par la vallée de Vologne à La Bresse, le sommet des Champis, la vallée du Chajoux, puis le Grouvelin (au-dessus de Gérardmer), la tête de Mérelle, la vallée de la Cleurie et enfin le sommet de l'Ormont, avec toutefois une petite déception à l'arrivée : c'était l'été 2000 et le sommet en question n'était qu'un immense enchevêtrement de bois abattus par la tempête de décembre 1999 et il était pratiquement impossible d'y accéder.

3.3 La cour d'assises

Je voudrais, pour mon dernier exemple, revenir sur un des aspects essentiels des mathématiques, le fait qu'elles contribuent puissamment à la construction de la rationalité et à l'apprentissage du raisonnement. En effet, elles permettent de comprendre la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, elles font le lien entre le général et le particulier (voir le passage de l'arithmétique à l'algèbre, ou en géométrie, le fait de dire des choses générales sur une figure particulière, la possibilité de développer un raisonnement logique qui ne soit pas brouillé par l'affectif ou par la complexité du réel), elles conduisent à organiser la pensée, à catégoriser les problèmes. Jean-Pierre Kahane le dit très bien dans l'introduction du rapport d'étape de la commission qu'il préside :

Elles forcent à expliciter les évidences, à décomposer les difficultés, à enchaîner les résultats, à dénombrer tous les cas possibles : elles sont la logique cartésienne en action.

Pour illustrer cet aspect de l'importance des mathématiques je vais encore une fois raconter un souvenir personnel.

En septembre 1996 j'ai été tiré au sort pour être juré de cour d'assises.

Ma première réaction a été d'être furieux de cette corvée. En effet, le moment était particulièrement mal adapté (c'était la rentrée du CAPES) et j'avais le sentiment de n'avoir aucune compétence pour faire ce travail, alors qu'il y a des magistrats dont c'est le métier. J'ai pourtant été obligé de le faire et j'ai donc assisté à deux procès (l'un pour meurtre, l'autre pour vol et viol). Je dois dire que j'ai changé d'avis sur la question et que je trouve cette expérience intéressante et le système de jury populaire pas si mauvais. Sur ce dernier point, j'ai constaté en effet que les jurés prenaient leur tâche très à cœur (ce qui n'est pas toujours le cas des magistrats professionnels) et que la diversité des origines amenait une réflexion souvent très intéressante. En ce qui me concerne j'ai pu constater à plusieurs reprises que ma formation de mathématicien (et surtout celle de professeur, habitué depuis plus de 25 ans à critiquer les prestations d'élèves des préparations à l'agrégation ou au CAPES) m'a été d'une très grande utilité. En effet, l'habitude de discuter, en mathématiques, des relations de cause à effet, de la logique des affirmations, des enchaînements, de penser une situation de manière globale, m'a permis, à plusieurs reprises de poser des questions (notamment à des témoins, policiers, médecins, etc.) qui ont montré un certain nombre de défaillances de l'enquête ou ont pu préciser certains points. En particulier, dans l'une des affaires, la reconstitution précise de la chronologie n'avait pas vraiment été effectuée soigneusement. Dans l'autre, l'accusation s'appuyait sur une analyse médicale, dont les circonstances montraient clairement qu'elle ne pouvait avoir aucune valeur. Cette faculté de raisonnement a aussi été très utile dans les discussions qui se sont déroulées ensuite entre les jurés et les magistrats.

Bref, je me suis tout à coup senti une vocation de Sherlock Holmes ! D'ailleurs, et c'est un des compliments les plus flatteurs que l'on m'ait jamais fait, l'un des greffiers m'a dit, à la fin : *Ah, je n'aimerais pas être votre élève : vous ne laissez rien passer !*

4 Conclusion

J'espère vous avoir un peu rassurés : oui, il est encore nécessaire en ce nouveau millénaire, d'enseigner les mathématiques. Attention toutefois, nous devons écouter ce que nous dit le monde extérieur et essayer de comprendre comment notre discipline a pu, en quelques années, passer d'un statut de discipline reine à celui de matière dont la survie même est contestée.

Il y a sans doute à cela des raisons sociales auxquelles nous sommes essentiellement étrangers : le statut de discipline dominante et de discipline sur laquelle se faisait la sélection a beaucoup nui aux mathématiques. De même, le développement de l'informatique, qui permet de faire sans peine des calculs autrefois réservés aux experts, a pu faire croire que les mathématiques étaient devenues inutiles.

Mais il y a aussi des points qui sont de notre ressort et qu'il est essentiel de prendre en compte. Je voudrais en citer deux.

D'abord, je crois que nous devons prêter plus d'attention que nous ne le faisons aux autres disciplines. Pour montrer que les mathématiques sont utiles, nous devons accorder plus de place dans nos enseignements aux activités de modélisation (et les discuter!). C'est ainsi que nous pouvons convaincre les autres, tous les autres, de l'importance des mathématiques.

Ensuite, s'agissant de l'apprentissage du raisonnement, il est important de ne pas le réduire à celui de la démonstration qui tourne souvent à l'exercice de style et dans lequel de nombreux élèves ont de la peine à rentrer. Il y a deux conditions pour cela. La première est de ne pas craindre d'étudier des problèmes ouverts (par exemple, en géométrie, les problèmes de lieux ou de constructions). La seconde est de disposer des bons outils pour faire des mathématiques. Par exemple, en géométrie encore, on peut penser que l'outil transformations n'est pas le mieux adapté au niveau du collège et qu'il serait plus pertinent de lui préférer l'usage des invariants et des cas d'isométrie ou de similitude des triangles.

Comme vous le voyez, je n'ai pas pu résister à faire état de mes convictions, voire de mes marottes, en m'écartant un peu du sujet proposé. Je vous prie de bien vouloir m'en excuser et je vous remercie de votre attention.