Autour du théorème de Thalès

Daniel PERRIN

Introduction

René Cori m'a demandé de parler du théorème de Thalès, à la fois en essayant d'en dégager les principaux aspects mathématiques et en dressant un panorama succinct de sa place dans l'enseignement secondaire français depuis une cinquantaine d'années. Ce n'est pas très aimable de la part d'un vieil ami de me confier un travail qui, si l'on en croit ce que dit Philippe Meirieu dans une interview au journal *Le Monde* (28 mars 2006), ne saurait être qu'inutile :

Il est plus important aujourd'hui de connaître la différence entre le civil et le pénal que de savoir résoudre (sic) *le théorème de Thalès.*

Je devrais donc plutôt vous parler du civil et du pénal, comme nous le conseille P. Meirieu, en expliquant bien toutefois comment le **parallélisme** entre ces notions implique la **proportionnalité** des peines afférentes ...

Plus sérieusement, je voudrais préciser que je ne prétends pas être compétent sur ce sujet du théorème de Thalès. En préparant cet exposé j'ai d'ailleurs découvert nombre de choses que le lecteur connaît sans doute depuis longtemps. Je le prie de bien vouloir m'en excuser.

1 Les énoncés du théorème de Thalès

Je rassemble dans ce paragraphe un certain nombre d'énoncés du théorème de Thalès[1]. Je me contente des énoncés plans, ceux de l'espace s'y ramenant aisément, et je reprends essentiellement la classification de Guy Brousseau (cf. [Brousseau]). Il y a trois types principaux d'énoncés du théorème. Dans tous les cas les deux mots clés en sont : parallèles et proportions (ou rapports). Comme Brousseau, je parlerai de rapports d'abscisses, de projection et d'homothétie. Dans la plupart des cas on a deux cadres possibles : celui du triangle, cher à Euclide, et celui de trois parallèles (ou plus), mais dans tous les cas, il y a des parallèles et des sécantes. Ensuite, il y a plusieurs types de

[1] Bien entendu, cette appellation est sujette à caution. Même en France elle est récente (la fin du XIX-ième siècle). On disait auparavant *théorème des lignes proportionnelles.*

rapports possibles : de longueurs, de mesures algébriques, de vecteurs. Enfin, il y a une éventuelle réciproque.

1.1 Rapport d'abscisses

1.1.1 L'énoncé euclidien

Je donne d'abord la version d'Euclide (Livre VI, prop. 2), donc dans le triangle, et en termes de rapports de longueurs :

1.1 Théorème. *Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés du triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.*

Avec des notations, cela donne :

1.2 Théorème. *Soit ABC un triangle, B' et C' des points situés respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$. On suppose que $(B'C')$ est parallèle à (BC). Alors on a $\dfrac{B'B}{B'A} = \dfrac{C'C}{C'A}\cdot$ Réciproquement, si on a cette égalité de rapports, la droite $(B'C')$ est parallèle à (BC).*

Le point important c'est qu'ici les rapports font intervenir des segments pris sur la **même** sécante.

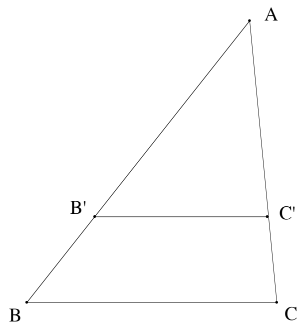


Figure 1

1.1.2 Variantes

Il y a de nombreuses variantes de cet énoncé.

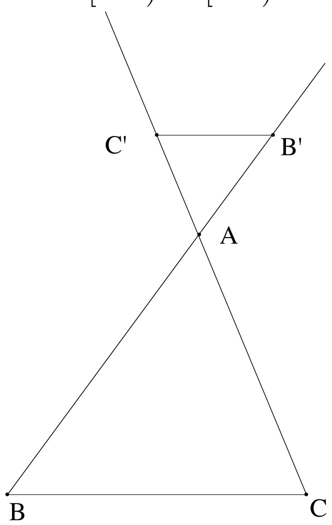
• D'abord, on peut remplacer les rapports de longueurs par des rapports de mesures algébriques et écrire : $\dfrac{\overline{B'B}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\overline{C'C}}{\overline{C'A}}\cdot$ Il faut pour cela avoir choisi des repères[2] sur les droites (AB) et (AC). C'est en ce sens qu'on peut parler

[2]Contrairement à ce que disent certains manuels (par exemple [CT3-1960]) qui insistent sur le fait de choisir la même unité sur les deux côtés, cela n'est pas du tout nécessaire. Au contraire, un choix de repères avec des unités différentes sur les côtés conduit à une preuve plus simple (voir par exemple [QR3-1968]). Plus profondément, cette latitude sur les choix d'unités traduit le fait que Thalès est un théorème affine et non un théorème métrique.

de rapports d'abscisses. On peut même utiliser des rapports de vecteurs : $\dfrac{\overrightarrow{B'B}}{\overrightarrow{B'A}} = \dfrac{\overrightarrow{C'C}}{\overrightarrow{C'A}}$, puisque les vecteurs $\overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{B'A}$ (par exemple) sont colinéaires.

• On notera aussi qu'il y a six[3] variantes "algébriques" de cet énoncé obtenues en remplaçant le rapport $r = \dfrac{B'B}{B'A}$ par $\dfrac{B'A}{B'B}$ ou $\dfrac{AB}{B'A}$ ou $\dfrac{B'A}{AB}$ ou $\dfrac{AB}{B'B}$ ou $\dfrac{B'B}{AB}$, ce qui revient à remplacer r par $1/r$, $1+r$, $1/(1+r)$, $(1+r)/r$ et $r/(1+r)$, et en effectuant la même transformation sur le rapport qui fait intervenir C. Le passage à l'une quelconque de ces variantes peut se faire uniquement par manipulation algébrique des rapports (vus comme nombres dans la conception moderne ou comme proportions chez Euclide).

• Ensuite, on peut donner une variante de ce théorème en permettant aux points B' et C' de varier, non seulement sur les côtés du triangle, mais sur les droites (AB) et (AC) (y compris de l'autre côté de A, on parle alors de la variante du papillon). Bien entendu, pour la réciproque il faut, soit utiliser les invariants orientés (mesures algébriques ou vecteurs), soit préciser la position des points B', C' en imposant qu'ils sont en même temps dans les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ ou dans les demi-droites opposées.



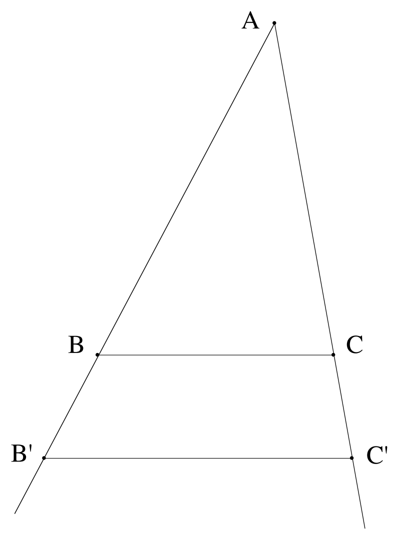


Figure 2

• Enfin, il y a la variante des trois parallèles :

1.3 Théorème. *Soient D et D' deux droites. Trois droites Δ_A, Δ_B et Δ_C coupent respectivement D et D' en A, A' ; B, B' ; C, C'. On suppose Δ_A, Δ_B et*

[3]Et encore, je ne tiens pas compte d'éventuels signes !

Δ_C parallèles. Alors on a l'égalité de rapports $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$· Réciproquement, si on suppose Δ_A et Δ_B parallèles et si on a l'égalité de rapports (orientés), la droite Δ_C est parallèle à Δ_A et Δ_B.

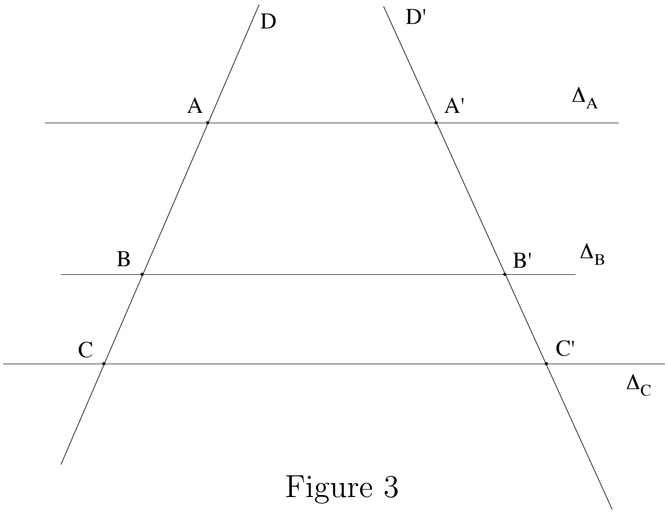


Figure 3

Là encore on peut utiliser des rapports de mesures algébriques ou de vecteurs (et, pour la réciproque, c'est plutôt plus simple, sinon il faut préciser la position des points), et on a des variantes algébriques comme ci-dessus.

1.2 Rapport de projection

Dans la version du triangle (voir fig. 1), il s'agit de l'énoncé suivant :

1.4 Théorème. *Soit ABC un triangle, B' et C' des points situés respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$. On suppose que $(B'C')$ est parallèle à (BC). Alors on a $\frac{AB'}{AC'} = \frac{B'B}{C'C}$· Réciproquement, si on a cette égalité de rapports, la droite $(B'C')$ est parallèle à (BC).*

Ce qu'exprime ce théorème c'est que le rapport de projection de (AB) sur (AC) a un sens indépendant du segment considéré. Ici les rapports font intervenir des segments pris sur des sécantes **distinctes**.

1.2.1 Variantes

Là encore, il y a de nombreuses variantes de cet énoncé.

• On peut remplacer les rapports de longueurs par des rapports de mesures algébriques, mais, **attention**, pas par des rapports de vecteurs, car les vecteurs concernés ne sont plus colinéaires. On peut ajouter que le rapport

$\dfrac{AB'}{AC'} = \dfrac{B'B}{C'C}$ est aussi égal à $\dfrac{AB}{AC}\cdot$ C'est encore un lemme algébrique : si on a $a/b = c/d$, ce rapport est aussi égal à $(a+c)/(b+d)$.

• On a aussi les variantes du théorème obtenues en permettant aux points B' et C' de varier sur les droites (AB) et (AC), avec les mêmes précautions que dans le cas euclidien (fig. 2), et la variante des trois parallèles (fig. 3) :

1.5 Théorème. *Soient D et D' deux droites. Trois droites Δ_A, Δ_B et Δ_C coupent respectivement D et D' en A, A', B, B', C, C'. On suppose Δ_A, Δ_B et Δ_C parallèles. Alors on a l'égalité de rapports $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}\cdot$ Réciproquement, si on suppose Δ_A et Δ_B parallèles et si on a cette égalité de rapports (orientés), la droite Δ_C est parallèle à Δ_A et Δ_B.*

• Il faut signaler enfin une variante de 1.4 qui a joué un rôle important dans les années 1980-90. Dans cette variante, le triangle est rectangle (ou encore, la projection est orthogonale). Cette forme mène à la définition du cosinus :

1.6 Théorème-Définition. *Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites formant un angle aigu et soient $A, B \in [Ox)$ et A', B' leurs projetés orthogonaux sur $[Oy)$. Alors, le rapport de projection est indépendant du point de Ox : on a $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}\cdot$ Ce rapport est appelé cosinus de l'angle $\widehat{xOy}$ et noté $\cos \widehat{xOy}$.*

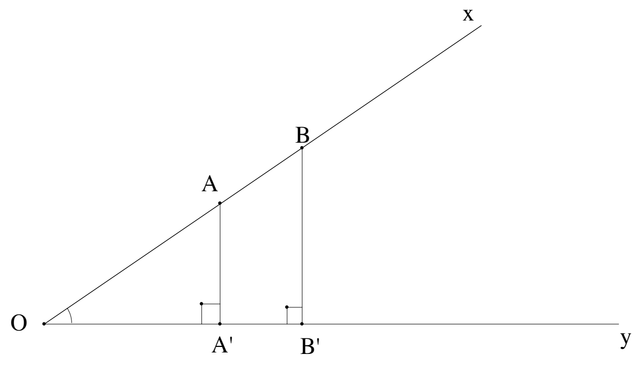


Figure 4

1.3 Rapport d'homothétie

L'énoncé est le suivant (voir fig. 1) :

1.7 Théorème. *Soit ABC un triangle, B' et C' des points distincts de A situés respectivement sur droites $[AB]$ et $[AC]$. On suppose que $(B'C')$ est* *parallèle à (BC). Alors on a* $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}\cdot$ *Réciproquement, si on a l'égalité de deux rapports, la droite $(B'C')$ est parallèle à (BC).*

Cette fois, le rapport est celui de l'homothétie de centre A qui transforme B en B' et le troisième rapport correspond à la variation de la longueur dans cette homothétie. On notera que les rapports font intervenir des segments pris sur la **même** sécante comme dans le cas des rapports d'abscisses, mais aussi le rapport de segments situés sur les **parallèles**. On a encore les variantes mesures algébriques et vecteurs, ainsi que celle qui permet à B' (resp. C') de varier sur toute la droite (AB) (resp. (AC)) (mais pour la réciproque il faut les rapports de grandeurs orientées). En revanche, on n'a plus directement la variante des trois parallèles 1.3 (notamment dans le cas où D et D' sont parallèles dans lequel la transformation en jeu est une translation).

On trouve dans certains manuels du début des années 1960 un théorème qui relève de l'homothétie et que j'ai envie d'appeler l'anti-Thalès car les rapports y sont pris sur les parallèles :

1.8 Théorème. *Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des segments homologues proportionnels.*

En clair : si des droites D_A, D_B, D_C concourantes en O coupent deux droites parallèles Δ et Δ' en A, B, C et A', B', C' respectivement, on a $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}\cdot$ On montre ce résultat en appliquant 1.7 aux deux triangles OAB et OBC (je suppose ici $A' \in [OA]$) : $\frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ et en permutant extrêmes et moyens.

2 Les démonstrations du théorème de Thalès

2.1 Introduction

Il y a, en première approximation, deux types de systèmes d'axiomes cohérents pour faire de la géométrie : celui hérité d'Euclide, éventuellement modifié ou précisé par ses successeurs (voir [Hilbert], [CF], [Lion], [Perrin4]) et celui issu de l'algèbre linéaire. Bien entendu, au bout du compte, ces systèmes mènent aux mêmes géométries et notamment à la géométrie euclidienne. Dans celle-ci, le théorème de Thalès est un théorème reconnu comme important, mais ses démonstrations sont très différentes selon les entrées choisies.

Pour écrire ce qui suit, j'ai beaucoup utilisé l'article [Bkouche].

2.2 Le théorème de Thalès chez Euclide

Bien entendu, le résultat d'Euclide (Livre VI, proposition 2) ne porte pas de nom. Il s'agit du théorème vu ci-dessus en 1.2.

2.2.1 Les outils sur les aires

La démonstration d'Euclide utilise les aires et repose sur ce que j'appelle le lemme du trapèze et le lemme des proportions (fig. 5).

2.1 Lemme. (Lemme du trapèze) *Soient ABC et DBC deux triangles de même base $[BC]$ dont les sommets A et D sont sur une parallèle à (BC)*[4]*. Alors les deux triangles ont même aire.*

2.2 Lemme. (Lemme des proportions) *Soient ABC et $AB'C'$ deux triangles ayant en commun le sommet A et dont les côtés $[BC]$ et $[B'C']$ sont portés par la même droite. Le rapport des aires $\mathcal{A}(ABC)$ et $\mathcal{A}(AB'C')$ est égal au rapport des longueurs BC et $B'C'$.*

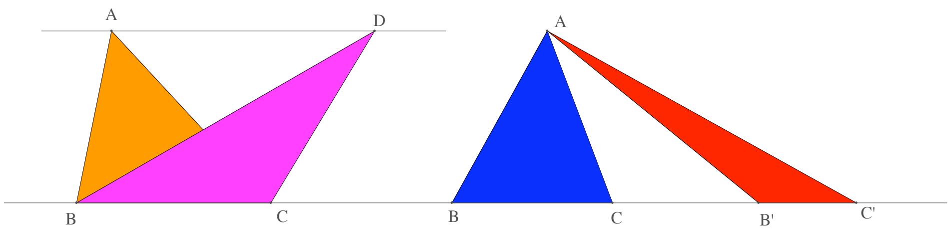


Figure 5

2.3 *Remarque.* Avec la mesure des aires et la formule $base \times hauteur/2$, ces lemmes sont immédiats. Pour la démonstration originelle d'Euclide, voir ci-dessous.

2.2.2 La preuve d'Euclide pour Thalès

On montre la variante $\frac{B'B}{BA} = \frac{C'C}{CA}$.

[4]De sorte que l'un des polygones $ABCD$ ou $ADBC$ est convexe, donc un trapèze.

On a $\mathcal{A}(BCC') = \mathcal{A}(BCB')$ par le lemme du trapèze et donc $\dfrac{CC'}{CA} = \dfrac{\mathcal{A}(BCC')}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{\mathcal{A}(BCB')}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{BB'}{BA}$ par le lemme des proportions. Pour la réciproque, on trace la parallèle à (BC) passant par B'. Elle coupele côté $[AC]$ en C''. On a $\dfrac{CC''}{CA} = \dfrac{BB'}{BA}$ par le sens direct, donc $CC' = CC''$, donc[5] $C' = C''$.

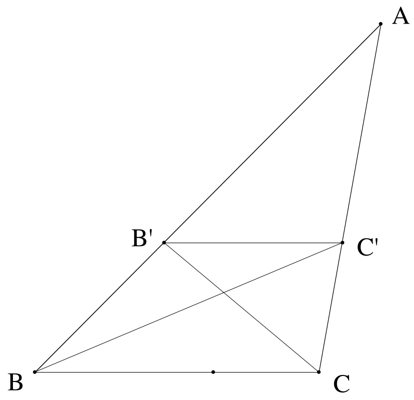


Figure 6

2.2.3 Preuve des résultats sur les aires

Dans la version d'Euclide, le lemme du trapèze et celui des proportions ne sont pas tout à fait de même nature. Tous deux reposent sur le lemme du demi-parallélogramme, voir ci-dessous, mais si le lemme du trapèze est un pur lemme de découpage, le lemme des proportions, en revanche, utilise la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire, en langage moderne, une méthode d'encadrement ou de passage à la limite. Dans les deux cas, le point de départ est le suivant :

2.4 Lemme. (Lemme du demi-parallélogramme) *Soit $ABCD$ un parallélogramme. Chaque diagonale partage $ABCD$ en deux triangles de même aire.*

Démonstration. C'est clair par symétrie centrale ou par les propriétés angulaires et les cas d'égalité, selon les prérequis géométriques en vigueur.

Un corollaire de ce lemme est le suivant :

2.5 Lemme. *Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit M un point de $[BC]$. Alors, l'aire du triangle AMD est la moitié de celle du parallélogramme.*

Démonstration. Il suffit de tracer la parallèle à (AB) passant par M et d'appliquer 2.4 aux deux parallélogrammes obtenus.

[5] Il faut voir que les points C' et C'' sont tous deux dans $[AC]$, c'est clair pour C' et pour C'' il faut utiliser un argument de demi-plans, cf. 2.9. Euclide utilise la réciproque du lemme du trapèze en signalant le problème de position : *Les triangles égaux* – i.e. de même aire – *de même base et situés du même côté de celle-ci sont aussi entre les mêmes parallèles.* Ce genre de questions ne sera complètement élucidé que dans [Hilbert].

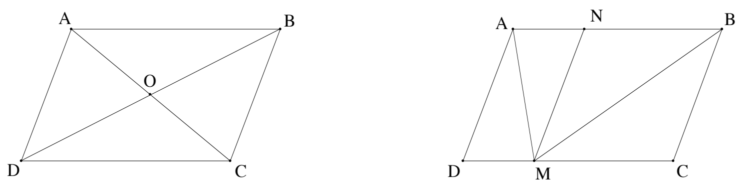


Figure 7

2.2.4 Preuve du lemme du trapèze

On peut supposer par exemple que $ABCD$ est convexe. Menons par C et D les parallèles à (AB) qui recoupent respectivement (AD) et (BC) en C' et D'. Il y a deux cas de figures. Supposons par exemple que D est dans le segment $[AC']$ les aires des triangles ABC et DBC sont toutes deux égales à la moitié de l'aire du parallélogramme $ABCC'$ (cf. 2.5), donc sont égales.

Sinon, c'est C qui est dans $[BD']$ et on conclut en notant qu'on a $\mathcal{A}(ABC)+\mathcal{A}(CDD') = \mathcal{A}(BCD) + \mathcal{A}(CDD') = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABD'D)$.

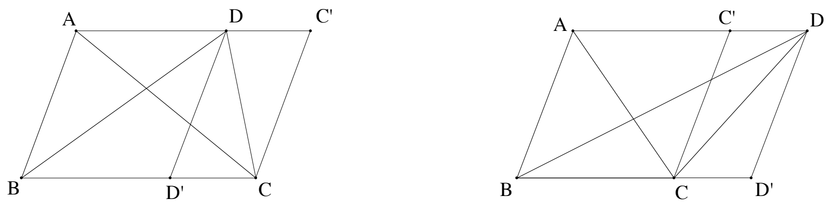


Figure 8

2.2.5 Preuve du lemme des proportions

Ce résultat est la proposition 1 du Livre VI d'Euclide, qui le démontre par la méthode d'exhaustion. Dans une approche moderne utilisant la mesure des aires, il provient de la formule de l'aire du triangle, cf. [ME]. Dans la preuve d'Euclide, on commence par établir le lemme suivant :

2.6 Lemme. *Soient ABC et $AB'C'$ deux triangles ayant en commun le sommet A et dont les côtés $[BC]$ et $[B'C']$ sont portés par la même droite. On suppose $BC = B'C'$. Alors on a $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AB'C')$.*

Démonstration. On trace la parallèle à (BC) pasant par A, et on porte sur cette parallèle un point A' tel que $AA' = BC$. Si l'on a bien fait attention au sens, les quadrilatères $AA'CB$ et $AA'C'B'$ sont des parallélogrammes[6]. On a

[6] Si ce ne sont eux, ce sont donc leurs frères.

donc $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AA'C)$ et $\mathcal{A}(AB'C') = \mathcal{A}(AA'C')$ en vertu de 2.4. Mais, on a aussi $\mathcal{A}(AA'C) = \mathcal{A}(AA'C')$ par le lemme du trapèze et on a gagné.

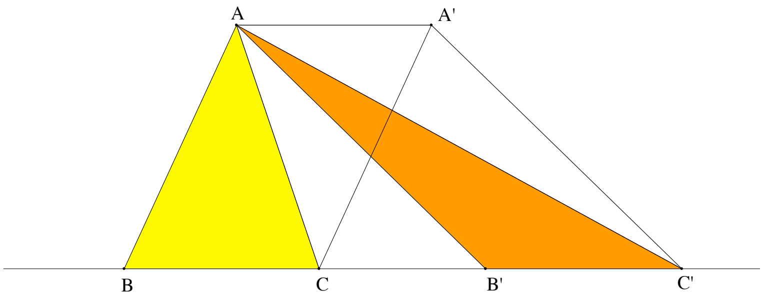


Figure 9

On déduit de ce lemme, que si BC est plus petit que $B'C'$, on a $\mathcal{A}(ABC) < \mathcal{A}(AB'C')$ en reportant le segment $[BC]$ dans $[B'C']$ et en utilisant l'axiome de croissance (ou d'additivité) des aires, *le tout est plus grand que la partie*, comme dit Euclide. On a le même résultat avec "plus grand". Le point crucial, ensuite, de la méthode d'exhaustion est de noter que si on reporte p fois $[BC]$ (resp. q fois $[B'C']$), l'aire de ABC (resp. $AB'C'$) est multipliée par p (resp. q) (c'est l'axiome d'additivité). Avec la remarque sur l'ordre, on en déduit que l'inégalité $p\,BC < q\,B'C'$ est équivalente à $p\,\mathcal{A}(ABC) < q\,\mathcal{A}(AB'C')$ et cela, pour nous comme pour Euclide, c'est exactement l'égalité des rapports $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(AB'C')}$. Dans notre langage, cela signifie que $\dfrac{p}{q} < \dfrac{B'C'}{BC}$ est équivalent à $\dfrac{p}{q} < \dfrac{\mathcal{A}(AB'C')}{\mathcal{A}(ABC)}$, autrement dit, on a deux réels r, r' qui sont tels que les rationnels qui les précèdent sont les mêmes, donc ils sont égaux, comme bornes supérieures du même ensemble. Pour Euclide c'est la définition de l'égalité des rapports[7], voir Livre V définition 5.

2.7 *Remarque.* Le raisonnement ci-dessus, sous une forme ou sous une autre, est indispensable. Dans l'approche par les mesures et la formule de l'aire du triangle, il intervient sous une forme voisine dans la preuve de la formule qui donne l'aire du rectangle : *longueur* $\times$ *largeur*, voir par exemple [ME] Ch. 7, 2.2. Cependant, il me semble plutôt plus simple à comprendre dans le cas de l'aire du rectangle, peut-être parce qu'il est simplement plus visuel ?

[7] *De quatre grandeurs A, B, C, D, la première est à la deuxième comme la troisième est à la quatrième quand n'importe quel équimultiple de la première et de la troisième est, en même temps, inférieur, supérieur ou égal à n'importe quel équimultiple de la deuxième et de la quatrième.* Autrement dit, la relation $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ est équivalente à $pA \leq qB \iff pC \leq qD$ pour tous $p, q \in \mathbf{N}^*$.

2.2.6 Le lemme de la médiane

On peut voir comme corollaire du lemme des proportions le résultat suivant qui nous sera utile pour prouver le théorème de la droite des milieux :

2.8 Lemme. (Lemme de la médiane) *Soit ABC un triangle et soit A' le milieu de $[BC]$. On a $\mathcal{A}(ABA') = \mathcal{A}(ACA')$ (la médiane AA' partage le triangle en deux triangles de même aire). Réciproquement, si on a l'égalité d'aires, le point A' est milieu de $[BC]$.*

En fait, ce lemme est un pur lemme de découpage[8] que l'on peut prouver sans utiliser le lemme des proportions. Pour cela, on mène les parallèles à (BC) et (AA') passant respectivement par A et C. Elles se coupent en D. Les parallélogrammes $ABA'D$ et $AA'CD$ ont même aire (le double de $\mathcal{A}(AA'D)$), donc les triangles ABA' et ACA' aussi par 2.4. Pour la réciproque, il suffit de considérer le milieu A'' de $[BC]$ et d'appliquer le sens direct. Si A'' est distinct de A', il est, par exemple, dans $[A'C]$ et on a $\mathcal{A}(AA''C) < \mathcal{A}(AA'C) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$, ce qui est absurde.

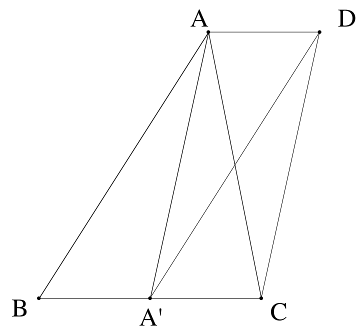


Figure 10

2.2.7 La place de Thalès chez Euclide

La proposition VI 2 est suivie presque immédiatement[9] de la preuve du "cas de similitude" *(si deux triangles ont leurs trois angles égaux, leurs côtés homologues sont proportionnels).* Ce résultat, qui joue un rôle crucial dans la suite, est démontré à l'aide de Thalès, en mettant le triangle en bonne position[10].

[8]Pour voir que les triangles ABA' et ACA' sont équivalents par découpage et recollement, sans avoir à leur ajouter une quelconque partie, on peut introduire les milieux B' et C' de $[AB]$ et $[AC]$ et découper les triangles en $ABA' = AB'A' \cup BB'A'$ et $ACA' = AC'A' \cup CC'A'$. Mais, on utilise ici le théorème de la droite des milieux, pour lequel on aurait bien envie d'utiliser le lemme de la médiane ! Aussi, il vaut mieux patienter.

[9]La proposition 3 concerne le résultat classique sur les segments découpés par la bissectrice d'un angle d'un triangle sur le côté opposé.

[10]Comme pour la preuve du premier cas d'isométrie, Euclide utilise implicitement ici l'existence de mouvements permettant d'amener un point sur un autre, une droite sur une autre, etc.

C'est par le biais des triangles semblables que Thalès intervient surtout dans la suite des *Éléments*. Sous sa forme originelle, on le retrouve dans les problèmes de constructions relatifs au partage des segments dans un rapport donné, dans un résultat sur la similitude des parallélogrammes limités par un point intérieur à un parallélogramme et dans une variante spatiale.

2.2.8 Comment prouver les variantes de Thalès à partir de celle d'Euclide ?

Les variantes de Thalès évoquées au paragraphe 2 ne sont pas directement dans Euclide, mais toutes se démontrent facilement à partir de 1.2. Précisément :

a) Les variantes orientées résultent de la version euclidienne par examen de la position des points. Je voudrais expliciter un peu ma position sur ce point, toujours épineux. Au niveau du collège, mon opinion est qu'on peut se contenter de constater cette position sur la figure. Cela gêne toujours certains collègues qui disent : *Mais, si on demande aux élèves de lire sur la figure, à quoi sert de leur demander de prouver d'autres propriétés ?* Je leur répondrai deux choses :

• Je fais une différence, au moins à ce niveau, entre lire les propriétés "fermées" (alignement, concours, égalités d'angles ou de longueurs) et les propriétés "ouvertes" (du même côté, à l'intérieur, etc.).

• Le professeur scrupuleux et angoissé peut, lui, toujours établir rigoureusement (pour son usage personnel) les assertions de position à partir des axiomes et notamment de l'axiome des demi-plans :

2.9 Axiome. *Une droite D partage le plan en trois parties disjointes : D et deux demi-plans ouverts. Deux points A, B sont dans le même demi-plan (on dit aussi "du même côté de D") si et seulement si $[AB]$ ne rencontre pas D.*

On déduit aussitôt de cet axiome le corollaire suivant :

2.10 Corollaire.
1) Si (AB) est parallèle à D et distincte de D, A et B sont dans le même demi-plan ouvert limité par D.
2) Deux points M, M', alignés avec A et distincts de A sont du même côté de A (autrement dit $A \notin [MM']$) si et seulement si M et M' sont du même côté de toute droite (différente de (MM')) passant par A.

Dans le cas de Thalès, si B' et C' sont situés sur les droites (AB) et (AC) avec $(B'C')$ parallèle à (BC), montrons par exemple que, si B' et B sont du même côté de A, il en est de même de C' et C. On considère la droite D parallèle à (BC) passant par A. Les points B et C sont dans le même demi-plan limité par D par 2.10.1, donc aussi B' par l'hypothèse et 2.10.2, donc aussi C' par 2.10.1.

b) Les variantes algébriques s'obtiennent avec les règles de calcul sur les réels (ou sur les rapports de grandeurs chez Euclide).

c) La variante homothétie : $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$ s'obtient à partir de la variante d'Euclide en traçant la parallèle à (AB) passant par C'. Elle coupe (BC) en C''. On applique alors Thalès au triangle ABC, mais avec la parallèle $(C'C'')$ et on a $\dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{BC''}{BC} = \dfrac{B'C'}{BC}$ car $B'C'C''B$ est un parallélogramme.

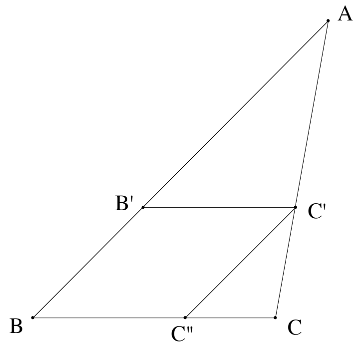


Figure 11

d) La variante papillon se ramène à l'état originel en effectuant la symétrie de centre A. Pour le papillon et l'homothétie, on peut aussi utiliser les triangles semblables (c'est, implicitement, ce que fait Euclide).

e) La variante projection pour le triangle vient du calcul "algébrique" de permutation des extrêmes et des moyens[11].

f) Enfin, pour la variante des trois parallèles 1.3, il y a plusieurs voies, illustrées par la figure 12.

• On mène par A' la parallèle à (AB). Elle recoupe Δ_B et Δ_C en B'' et C'' respectivement. On conclut en utilisant la forme d'Euclide et le fait que $AA'B''B$ et $BB''C''C$ sont des parallélogrammes.

• On trace (AC') et on applique la version d'Euclide (ou une variante algébrique) aux deux triangles ACC' et $AA'C'$.

[11] Il y a là, à mon avis, une subtilité si l'on pense en termes de grandeurs et non de nombres. En effet, si, disons dans le cas des trois parallèles, les rapports de longueurs AB/BC et $A'B'/B'C'$ sur une même droite sont clairement des rapports de grandeurs de même nature, je ne considère pas qu'il en soit ainsi pour les rapports de longueurs sur des droites différentes $AB/A'B'$ et $BC/B'C'$. C'est la métaphore utilisée plus bas entre les mètres et les yards, ou le prix et le poids de la viande, voir 4.1. Le passage de l'égalité $AB/BC = A'B'/B'C'$ à $AB/A'B' = BC/B'C'$ n'est donc pas si évident et il nécessite d'utiliser les nombres. Bien entendu, la difficulté échappe à Euclide qui est dans un cadre métrique, donc avec des longueurs partout.

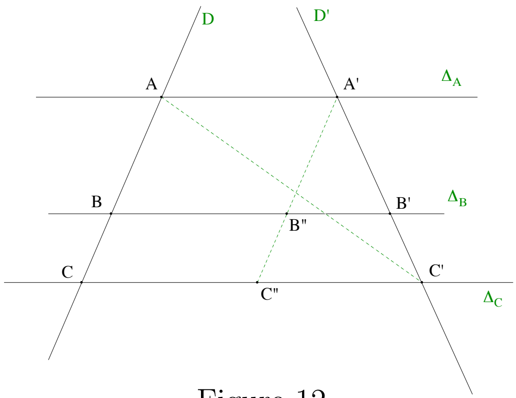


Figure 12

2.3 La preuve du théorème selon Arnauld, Lacroix et bien d'autres

2.3.1 Énoncé

Antoine Arnauld et Sylvestre Lacroix sont deux géomètres français qui ont publié des traités, le premier au milieu du XVII-ième siècle, le second au début du XIX-ième. Leur importance vient du fait que c'est leur approche qui a été utilisée dans l'enseignement français au niveau du collège, et ce jusqu'à l'époque des maths modernes.

Il y a deux différences entre cette version et celle d'Euclide, d'abord il s'agit de la variante des trois parallèles, ensuite, et surtout, la preuve est assez différente de celle d'Euclide et elle ne fait pas appel à la notion d'aires. La raison de ce choix est expliquée par Arnauld (janséniste de l'école philosophique de Port-Royal, comme Pascal) en terme de respect *du vrai ordre de la nature*, le détour par les aires étant vu comme un artifice. Je dirai plus loin ma position sur ce sujet. Le résultat montré est 1.3, dit sous la forme suivante :

2.11 Théorème. *Si trois droites parallèles coupent deux droites, la première aux points A, B, C, la deuxième aux points A', B', C', on a l'égalité* $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.

2.3.2 Le lemme des parallèles équidistantes

La méthode pour montrer 2.11 consiste à montrer d'abord le "lemme des parallèles équidistantes" :

2.12 Lemme. *Avec les notations précédentes, si on a $AB = BC$, on a aussi $A'B' = B'C'$.*

Démonstration. Il y a de nombreuses façons de prouver ce résultat.

• La version d'Arnauld repose sur l'égalité des angles alternes-internes, qu'il prouve en utilisant les sinus[12]. Il utilise encore les sinus pour prouver Thalès.

• Le plus souvent, dans les manuels antérieurs aux années 1960, le résultat est démontré en utilisant l'égalité des triangles.

Si les sécantes ne sont pas parallèles, on trace les parallèles à $(A'C')$ passant par A et B qui recoupent respectivement (BB') en B'' et (CC') en C''. Les triangles ABB'' et BCC'' sont alors égaux (isométriques en langage moderne) : on a $AB = BC$ et les angles en A, B et B, C sont correspondants. On en déduit $AB'' = BC''$, donc $A'B' = B'C'$ car $AB''B'A'$ et $BC''C'B'$ sont des parallélogrammes.

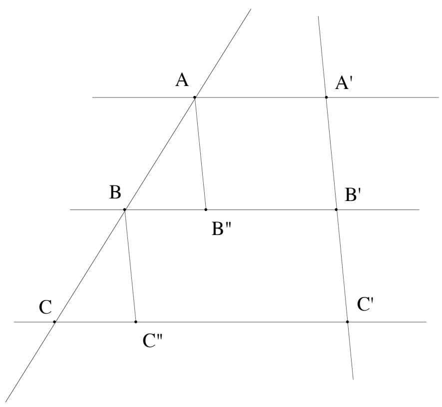


Figure 13

(J'appellerai cette preuve la preuve "classique").

Une variante de la preuve classique consiste à utiliser les translations, voir ci-dessous §2.5, variante de la méthode 3.

• Comme pour la variante de Thalès vue précédemment, on se ramène sans peine (soit en traçant la parallèle à $(A'C')$ passant par A, soit en joignant A et C') à montrer une propriété de "droites des milieux" :

2.13 Lemme. *Soient ABC un triangle, B' et C' des points situés respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$ et supposons que B' soit le milieu de $[AB]$ et que $(B'C')$ soit parallèle à (BC). Alors C' est le milieu de $[AC]$.*

[12]Bon, il est mort depuis longtemps, mais je ne résiste pas à l'envie de polémiquer avec lui. Arnauld affirme : *Les éléments d'Euclide étaient tellement confus et brouillés ...*, mais, sur cette preuve de l'égalité des angles alternes-internes, je trouve la démonstration d'Euclide (qui repose essentiellement sur le fait que la somme de deux angles d'un triangle est plus petite que deux droits), beaucoup plus simple et naturelle que la sienne ! En vérité, j'en veux à Arnauld d'avoir contribué à bannir de l'enseignement la méthode euclidienne d'utilisation des aires, dont je persiste à penser qu'elle est à la fois efficace et profonde.

Démonstration. Il y a une foule de possibilités pour prouver cette assertion. Vu l'importance de cette configuration dans les programmes actuels, je consacre un paragraphe spécial à ces preuves, voir paragraphe 2.5.

• Je signale enfin la preuve de [Choquet] qui repose sur le lemme suivant :

2.14 Lemme. *Soient $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ trois droites parallèles et soit τ_B la symétrie d'axe Δ_B.*
1) On suppose $\tau_B(\Delta_A) = \Delta_C$. Alors, si une droite D coupe les parallèles en A, B, C respectivement, B est milieu de A, C.
2) Réciproquement, si pour une sécante D, B est milieu de A, C, on a $\tau_B(\Delta_A) = \Delta_C$.

Démonstration. On introduit la perpendiculaire L à Δ_B en B et on utilise la relation $\sigma_B = \tau_B \tau_L$ où σ_B est la symétrie de centre B et τ_L la réflexion d'axe L.

2.3.3 Preuve de 2.11

Il s'agit maintenant de déduire 2.11 du lemme des parallèles équidistantes 2.12. C'est facile si AB et BC ont une "partie aliquote", c'est-à-dire s'il existe une longueur a et des entiers p, q avec $AB = pa$ et $BC = qa$ (c'est le cas où AB et BC sont commensurables, ou encore où AB/BC est rationnel). Dans ce cas on choisit $U_1 \in [AB]$ avec $AU_1 = a$. On mène la parallèle à (AA') passant par U_1. Elle recoupe $(A'B')$ en U'_1.
On continue le découpage de $[AB]$ par des points $U_2, \dots, U_{p-1}, U_p = B$ avec $U_iU_{i+1} = a$, on trace les parallèles à (AA') qui fournissent $U'_2, \dots, U'_p = B'$. On procède de même en partageant $[BC]$ par des points $B = V_0, V_1, \dots, V_q = C$ avec $V_iV_{i+1} = a$ et en construisant $B' = V'_0, V'_1, \dots, V'_q = C'$ sur $[B'C']$ comme intersections de $(B'C')$ avec les parallèles à (AA'). Le lemme 2.12 montre que les $U'_iU'_{i+1}$ et les $V'_jV'_{j+1}$ sont tous égaux à $A'U'_1 := b$. On en déduit $A'B' = pb$ et $B'C' = qb$, d'où le résultat.

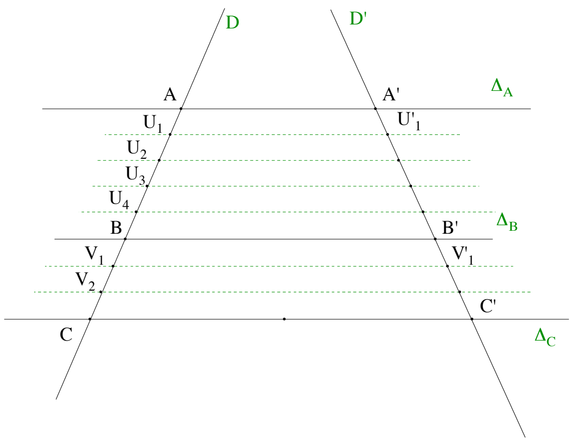


Figure 14

Le cas général est plus difficile et il faut utiliser, selon l'époque et les outils, la méthode d'exhaustion, un encadrement, un passage à la limite, etc.

Voici une démonstration qui utilise comme seuls ingrédients la densité des rationnels et des résultats de position que l'on peut, soit se contenter de lire sur la figure, soit prouver à l'aide des propriétés des demi-plans.

Il revient au même de prouver que $\lambda := AB/AC$ est égal à $\mu := A'B'/A'C'$, en sachant que cette propriété est vraie si λ est rationnel. On raisonne par l'absurde en supposant, par exemple, $\lambda < \mu$ et on choisit un rationnel r avec $\lambda < r < \mu$. Soit M le point de $[AB)$ qui vérifie $AM/AC = r$. Comme on a $\lambda < r$, le point B est dans $[AM]$. On trace la parallèle à (AA') passant par M. Elle coupe $(A'B')$ en M' et, en vertu du cas rationnel, on a $A'M'/A'C' = r$. Comme r est plus petit que μ, cette fois c'est M' qui est dans le segment $[A'B']$.

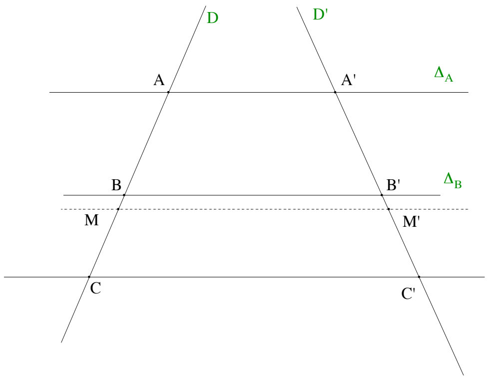


Figure 15

L'examen de la figure montre clairement que c'est absurde, mais pour l'établir rigoureusement, il faut faire le raisonnement de position suivant en termes de demi-plans, cf. [Hilbert]. Comme (AA') est parallèle à (BB'), les points A et A' sont dans le même demi-plan $\mathcal{E}$ limité par (BB') (sinon $[AA']$ couperait (BB')). Pour la même raison, M et M' sont dans le même demi-plan limité par (BB'). Comme les demi-plans sont convexes et comme M' est dans $[A, B']$, il est dans $\mathcal{E}$. En revanche, comme $[AM]$ coupe (BB') en B, M et A sont dans demi-plans distincts, donc M n'est pas dans $\mathcal{E}$: c'est une contradiction.

2.4 Thalès via l'algèbre linéaire

2.4.1 La preuve vectorielle

Cette fois l'entrée dans la géométrie est totalement différente et repose sur l'algèbre linéaire. C'est ce qu'on proposait aux lycéens[13] à l'époque des maths modernes (le début des années 1970). Les notions d'espace vectoriel, de sous-

[13] Mais pas aux collégiens, sauf dans certains manuels, voir [V4-1971].

espace et de dépendance linéaire sont supposées connues. Un plan affine E, associé à un plan vectoriel $\vec{E}$ sur un corps[14] k, est défini comme un ensemble de points, muni d'une application qui à deux points A, B associe un vecteur $\overrightarrow{AB} \in \vec{E}$ avec deux axiomes : la relation de Chasles ($\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$) et le fait que, pour $O \in E$ fixé, l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ est une bijection de E sur $\vec{E}$. La droite (AB) définie par deux points distincts A, B est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$; les droites (AB) et (CD) sont parallèles si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On peut alors énoncer :

2.15 Théorème. *Soient A, B, C, B', C' des points tels que A, B, B' (resp. A, C, C') soient distincts et alignés et que (BC) et $(B'C')$ soient parallèles (voir fig. 1). On suppose A, B, C non alignés. On pose $\overrightarrow{AB'} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \mu\overrightarrow{AC}$. Alors on a $\lambda = \mu$.*

2.16 *Remarque.* La conclusion peut s'écrire $\overrightarrow{AB'}/\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'}/\overrightarrow{AC}$ comme dans les variantes usuelles.

Démonstration. On a, par Chasles, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Comme $(B'C')$ et (BC) sont parallèles, on a $\overrightarrow{B'C'} = \nu\overrightarrow{BC}$. En remplaçant dans la première égalité, on en déduit : $\mu\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} + \nu\overrightarrow{BC}$. La distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à la somme vectorielle donne, avec la deuxième égalité, $\mu\overrightarrow{AC} = \mu\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC}$, d'où $\mu\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AB} + \nu\overrightarrow{BC}$. Comme on a supposé A, B, C non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont indépendants et on en déduit $\lambda = \mu = \nu$.

2.17 *Remarques.*
1) On voit que le théorème de Thalès, modulo la relation de Chasles, n'est rien d'autre que l'axiome de distributivité $\mu(\vec{x} + \vec{y}) = \mu\vec{x} + \mu\vec{y}$ des espaces vectoriels. Autrement dit, à peu de choses près, Thalès est un axiome. On verra ci-dessous que tel est bien son statut dans les commentaires des programmes du 22/11/1971.
2) On a renoncé depuis plus de vingt ans à une présentation de la géométrie à partir des espaces affines et vectoriels. Cependant, ce n'est pas pour autant que l'on doit renoncer à la notion de vecteur dans l'enseignement. La question se pose donc, sinon pour les élèves, du moins pour les professeurs, de définir rigoureusement les vecteurs, à partir d'une axiomatique de base plutôt de type euclidienne. Autrefois, on se contentait de dire qu'un vecteur est défini par sa direction, son sens et sa longueur. De manière plus formelle, un vecteur est une classe d'équivalence pour la relation d'équipollence (que

[14] Il n'y a pas besoin ici de structure métrique, ni même d'être sur $\mathbf{R}$.

l'on peut là encore définir soit avec direction, sens et longueur, soit à l'aide des parallélogrammes). Il y a un certain nombre de choses à vérifier, notamment que l'équipollence est bien une relation d'équivalence (la transitivité n'est évidente dans aucun des cas) et que l'addition des vecteurs a bien un sens. Le théorème de Thalès, dans cette optique, doit être prouvé par les méthodes évoquées précédemment (Euclide, Arnauld, etc.) et il fournit la distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à la somme vectorielle. Voir ci-dessous, annexe 2.6.
3) Attention, on trouve, dans certains livres des années 1960 (voir [B3-1960]), une "preuve" vectorielle de Thalès qui ressemble fort à celle de 2.15 vue ci-dessus. Cette preuve s'appuie sur la distributivité de la multiplication par un scalaire qui est énoncée comme une propriété des vecteurs. Cependant, comme dans la présentation retenue dans ces ouvrages, le point de départ est une axiomatique de type euclidien, je considère qu'il s'agit d'un cercle vicieux, car dans un tel système, seul Thalès justifie la distributivité.

2.4.2 Les preuves par les transformations

On peut ranger parmi les preuves vectorielles de Thalès celles qui le présentent comme conséquence des deux résultats suivants :

2.18 Proposition. *Soit p la projection d'une droite affine D sur une droite affine D' parallélement à une direction δ. Alors p est une application affine.*

Dire que p est affine signifie que si on définit l'application vectorielle associée par $\vec{p}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{p(M)p(N)} := \overrightarrow{M'N'}$, l'application $\vec{p}$ est linéaire. Cela donne Thalès car, si on a A, B, C sur D avec $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, et si on pose $A' = p(A)$, $B' = p(B)$ et $C' = p(C)$, on a $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$.

La linéarité de la projection vectorielle n'est autre que le lemme suivant :

2.19 Lemme. *Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel écrit comme somme directe : $\vec{E} = \vec{V} \oplus \vec{W}$, de sorte que tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$ s'écrit de façon unique $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{V}$ et $\vec{w} \in \vec{W}$. La projection $\vec{p}$ de $\vec{E}$ sur $\vec{W}$ parallèlement à $\vec{V}$ qui à $\vec{u}$ associe $\vec{w}$ est linéaire.*

Démonstration. Le point qui nous intéresse c'est de montrer $\vec{p}(\lambda\vec{u}) = \lambda\vec{p}(\vec{u})$. Vu l'unicité de la décomposition, c'est exactement la formule $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$, donc la distributivité.

2.20 Proposition. *Soit h l'homothétie de centre O et de rapport λ (définie par $h(M) = M'$ avec $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$). Alors, h est une application affine dont* *l'application vectorielle associée est la multiplication par λ. Elle transforme une droite en une droite parallèle.*

Démonstration. Il s'agit de montrer la formule $\vec{h}(\overrightarrow{MN}) = \lambda\overrightarrow{MN}$. Posons $N' = h(N)$. Par définition de l'application vectorielle associée, on a $\vec{h}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$ et, par Chasles, ce vecteur est égal à $\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{ON} - \lambda\overrightarrow{OM}$. On conclut encore grâce à la distributivité de la multiplication scalaire.

2.5 Annexe : quelques preuves du théorème de la droite des milieux

2.5.1 Les énoncés

Je rassemble dans ce paragraphe quelques preuves[15] du théorème de la droite des milieux. En vérité, il y a deux théorèmes, réciproques l'un de l'autre :

2.21 Proposition. Variante parallèle *Soient ABC un triangle, B' et C' des points situés respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$. On suppose que B' est le milieu de $[AB]$ et que $(B'C')$ est parallèle à (BC). Alors C' est le milieu de $[AC]$.*

2.22 Proposition. Variante milieu *Soit ABC un triangle et soient B' et C' les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Alors, $(B'C')$ est parallèle à (BC).*

2.5.2 L'équivalence des deux versions

Si on a la variante "parallèle" et si B', C' sont les milieux, on trace la parallèle à (BC) passant par B'. Elle coupe $[AC]$ en son milieu C' par 2.21 de sorte que $(B'C')$ est bien parallèle à (BC). Inversement, si on a la variante "milieux" et si $(B'C')$ est la parallèle à (BC) par le milieu B' de $[AB]$, on considère le milieu C'' de $[AC]$. La droite $(B'C'')$ est parallèle à (BC) par 2.22. Le postulat d'Euclide assure qu'il n'y a qu'une parallèle à (BC) par B', de sorte que l'on a $C' = C''$.

Dans ce qui suit, pour chacune des méthodes proposées, j'essaierai cependant de donner une preuve indépendante pour chacune des deux versions.

[15] Le lecteur peut, à bon droit, estimer que j'ai du temps à perdre, mais j'ai trouvé cet inventaire intéressant.

2.5.3 Le mal-aimé

La plupart des preuves de 2.21 et 2.22 utilisent les caractérisations des parallélogrammes, comme quadrilatères ayant leurs côtés opposés parallèles ou leurs diagonales se coupant en leur milieu. Certaines utilisent le résultat suivant :

2.23 Proposition. (Le mal-aimé)[16] *Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose les côtés $[AB]$ et $[CD]$ parallèles et égaux (i.e. de même longueur). Alors $ABCD$ est un parallélogramme.*

Démonstration. J'en donne deux pour faire bonne mesure. Rappelons que dire que $ABCD$ est convexe c'est, au choix (voir [CF] ou [ME] ou [Perrin4]) :

• Pour tout côté, les autres sommets sont dans le même demi-plan limité par ce côté.

• Les diagonales se coupent (autrement dit, les autres sommets sont dans des demi-plans différents par rapport à une diagonale).

La preuve d'Euclide

Comme (AB) et (CD) sont parallèles, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont égaux comme alternes-internes (car ils sont dans des demi-plans différents par rapport à la diagonale (BD)). Les triangles ABD et CDB sont alors isométriques (l'angle précité et les côtés : $AB = CD$ et $BD = DB$). Les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{DBC}$ sont donc égaux et, comme ils sont en position d'alternes-internes par rapport à (BC) et (AD), ces droites sont parallèles.

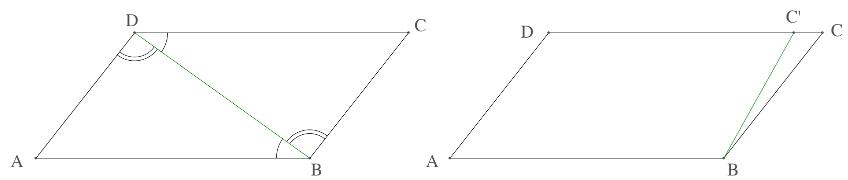


Figure 16

Une autre preuve

On mène la parallèle à (AD) passant par B. Elle n'est pas parallèle à (CD) (sinon (AD) et (CD) seraient parallèles), donc elle coupe (CD) en un point C'. Le quadrilatère $ABC'D$ est un parallélogramme, de sorte qu'on a $AB = DC' = DC$. Il suffit de montrer que C et C' sont du même côté de D, ou encore de (AD). Mais, par la convexité de $ABCD$, on sait que C est du côté de B par rapport à (AD) et C' y est aussi par 2.10.1.

[16] Je l'appelle ainsi car beaucoup d'enseignants de collège n'aiment pas utiliser ce résultat qui nécessite un argument de position.

2.5.4 Les preuves de la droite des milieux

Toutes les preuves des théorèmes de la droite des milieux que je connais nécessitent une construction supplémentaire, ce qui représente une réelle difficulté. En contrepartie, on a envie de dire que toute construction non stupide conduit à une démonstration[17].

• *Méthode 0* (Par les aires)

Dans les deux cas on trace les segments $[BC']$ et $[CB']$ et on utilise le lemme de la médiane 2.8 et le lemme du trapèze 2.1 ou leurs réciproques, cf. fig. 6. Précisément :

– Si $(B'C')$ est parallèle à (BC), on a $\mathcal{A}(AB'C) = \mathcal{A}(BB'C) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$ par la médiane, puis $\mathcal{A}(BB'C) = \mathcal{A}(BC'C)$ par le trapèze. On a donc $\mathcal{A}(BC'C) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$ et on en déduit que C' est le milieu de $[AC]$ par la réciproque du lemme de la médiane.

– Si C' est le milieu de $[AC]$, on a $\mathcal{A}(AB'C) = \mathcal{A}(BB'C) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$ par la médiane, et de même $\mathcal{A}(AC'B) = \mathcal{A}(CC'B) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$ et on en déduit $\mathcal{A}(BB'C) = \mathcal{A}(CC'B)$. La réciproque du lemme du trapèze donne alors le résultat.

• *Méthode 1*

(Variante parallèle)

On trace la parallèle à (AB) passant par C qui coupe $(B'C')$ en C''. Le quadrilatère $BB'C''C$ est un parallélogramme. On en déduit $BB' = CC'' = AB'$, de sorte que $AB'CC''$ est un parallélogramme (par le mal-aimé[18] !). Mais alors, ses diagonales se coupent en leur milieu et C' est milieu de $[AC]$.

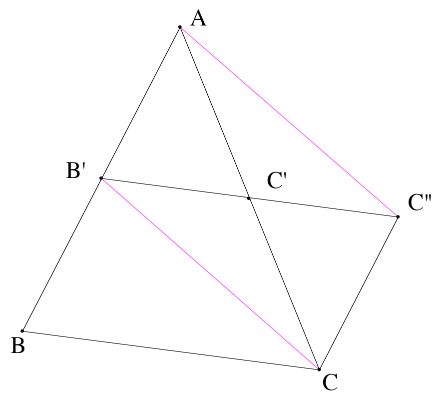


Figure 17

Pour la variante "milieux" on construit le même point C'', mais vu cette fois comme symétrique de B' par rapport à C'. Cette fois $AB'CC''$ est un parallélogramme (par ses diagonales) donc $BB'C''C$ aussi (par le mal-aimé).

• *Méthode 2*

(Variante parallèle)

[17] Mais toutes ne sont pas également intéressantes.

[18] Qu'il est légitime d'appliquer car ce quadrilatère est convexe puisque ses diagonales se coupent en C', voir ci-dessus.

Cette fois, on trace la parallèle à (AB) passant par C', qui recoupe (BC) en A'. On voit que $B'C'A'B$ est un parallélogramme, de sorte qu'on a $BB' = A'C' = AB'$. Il en résulte que $AB'A'C'$ est aussi un parallélogramme (par le mal-aimé) et donc $(A'B')$ est parallèle à (AC) et on a $A'B' = AC'$. Mais alors $B'C'CA'$ est un parallélogramme et on a $C'C = A'B' = AC'$: ouf.

Pour la variante milieu, je sais seulement faire avec une modification de la précédente. On considère A', défini comme milieu de $[BC]$ et D symétrique de A' par rapport à C'. Le quadrilatère $ADCA'$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. On en déduit que (AD) est parallèle à $(A'C)$, donc aussi à (BA') et qu'on a $AD = A'C = BA'$. Par le mal-aimé, $ADA'B$ est donc un parallélogramme. Mais alors, (AB) et (DA') sont parallèles et on a $AB = DA'$, donc aussi $B'B = A'C'$ car c'en sont des moitiés. Le mal-aimé[19] montre que $B'C'A'B$ est un parallélogramme et on a gagné.

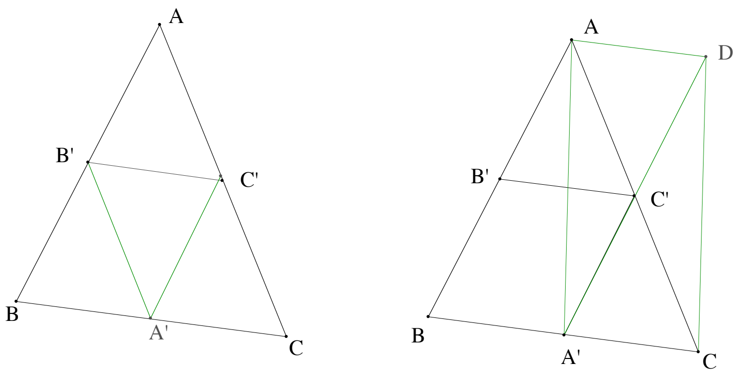


Figure 18

• *Méthode 3*

(Variante parallèle)

On trace la parallèle à (AC) passant par B' qui recoupe (BC) en A' et on montre que les triangles $AB'C'$ et $B'BA'$ sont isométriques comme dans la preuve "classique" ci-dessus, cf. fig. 13. On a donc $AC' = B'A'$ et on conclut en utilisant le fait que $B'C'CA'$ est un parallélogramme

Une variante de cette preuve, qui n'utilise pas les triangles isométriques, consiste à considérer la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB'}$. Elle transforme A en B' et B' en B (car on a $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{B'B}$). On sait qu'une translation transforme une droite en une droite parallèle. Il s'ensuit que t envoie $(B'C')$ sur (BC) et (AC') sur $(B'A')$, donc le point d'intersection C' s'envoie sur A'. Par conservation des longueurs, on a $AC' = B'A'$ et on conclut comme ci-dessus[20].

---

[19] À tort, comme on le voit !

[20] Vous pensez ce que vous voulez, mais moi je préfère les cas d'isométrie !

Pour la variante milieu, si l'on y tient, on peut copier ce qu'on a fait dans la méthode 3, en prenant pour A' le milieu de $[BC]$ et pour D le symétrique de A' par rapport à B' : la variante milieu est symétrique en les côtés du triangle.

• *Méthode 4*

(Variante parallèle)

La variante suivante est peut-être la meilleure. D'abord elle est très simple, et ensuite elle est la seule, à ma connaissance, parmi les variantes qui utilisent les parallélogrammes, qui permette d'éviter le théorème mal-aimé[21].

Soit C'' le symétrique de C' par rapport à B'. Le quadrilatère $AC'BC''$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. Il en résulte que (BC'') est parallèle à $(AC') = (C'C)$ et qu'on a $BC'' = AC'$. Le quadrilatère $BCC'C''$ est aussi un parallélogramme (ses côtés opposés sont parallèles). On a donc $BC'' = CC'$, d'où $CC' = AC'$.

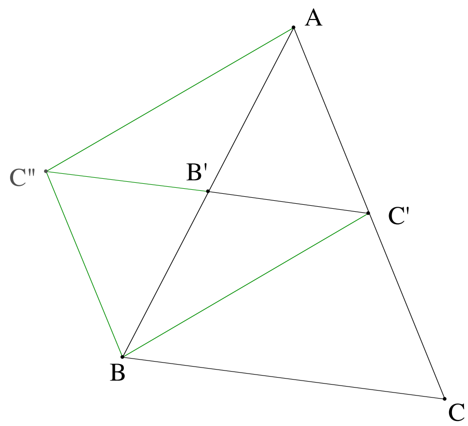


Figure 19

(Variante milieu) La construction est identique, $AC'BC''$ est un parallélogramme et $BCC'C''$ aussi (mais là, c'est le mal-aimé) et on a gagné.

• *Méthode 5*

On mène la parallèle à (AC) passant par B qui coupe $(B'C')$ en B'' et la parallèle à (BC) passant par A en D. Le quadrilatère $ADBC$ est un parallélogramme et B' est son centre. Le quadrilatère $BCC'B''$ est aussi un parallélogramme. On en déduit $BB'' = CC'$. Mais, comme la symétrie de centre B' échange (BD) et (AC), B va en A et B'' en C', de sorte qu'on a $BB'' = AC'$ et la conclusion.

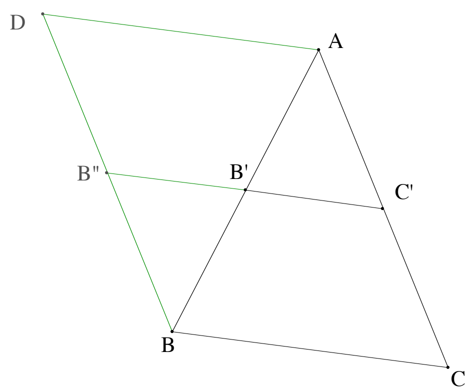


Figure 20

(On peut aussi montrer l'isométrie des triangles $B'B''B$ et $B'C'A$.)

[21] Cela peut être utile pour montrer que l'équipollence est une relation d'équivalence sans utiliser de considérations d'ordre, cf. 2.6 ci-dessous.

Le lecteur perspicace trouvera sans doute d'autres démonstrations tout aussi instructives. En tous cas, il y a tant de preuves de ce théorème de la droite des milieux qu'il serait vraiment dommage de ne pas le démontrer !

2.6 Annexe : discussion sur la définition des vecteurs

2.6.1 La voie ancienne

Il y a deux voies pour définir les vecteurs à partir d'une axiomatique euclidienne. L'une, qui a plutôt ma préférence, consiste à dire, comme au bon vieux temps, que deux segments définissent le même vecteur s'ils ont même direction, même sens et même longueur. La seule difficulté est de préciser la notion de sens :

2.24 Définition.
1) Soient δ et δ' deux demi-droites contenues dans une même droite D. On dit que δ et δ' sont de même sens si on a $\delta \subset \delta'$ ou $\delta' \subset \delta$.
2) Soient δ et δ' deux demi-droites d'origines A, A', parallèles. On dit que δ et δ' sont de même sens si elles sont dans le même demi-plan limité par (AA').

Toute la difficulté est de montrer le résultat suivant :

2.25 Théorème. *La relation "avoir même sens" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des demi-droites de direction donnée.*

Démonstration. Le point crucial est le lemme suivant. Pour la suite, voir [Perrin4], un jour peut-être.

2.26 Lemme. *Soient $\delta, \delta', \delta''$ trois demi-droites avec δ' et δ'' colinéaires et de même sens et δ parallèle aux autres. Alors δ est de même sens que δ' si et seulement si elle est de même sens que δ''.*

2.6.2 L'autre voie

La méthode précédente impose d'être soigneux sur les notions de sens, ou de faire confiance à la figure, ce qui, au collège, est évidemment la bonne solution.

L'autre voie, qui aura sans doute la faveur de certains car elle évite les notions de sens, convexité, etc., est de dire que $[AB]$ et $[CD]$ définissent le même vecteur si $ABDC$ est un parallélogramme. La difficulté est de montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence et surtout qu'elle est transitive. On a des segments $[AB], [CD], [EF]$, tels que $ABDC$ et $DFEC$ soient des parallélogrammes et il faut voir que $ABFE$ en est un aussi : je propose d'appeler ce résultat le lemme du prisme, voir figure 21. Il est clair que (AB) est parallèle à (EF) car toutes deux sont parallèles à (CD). Soient I et J les centres de $ABDC$ et $DFEC$. Comme I est milieu de $[AD]$ et J de $[EF]$, (IJ) est une droite des milieux de ADE, donc parallèle à (AE). De même, c'est une droite des milieux de BCF, donc parallèle à (BF). On en déduit que (BF) et (AE) sont parallèles et on a gagné.

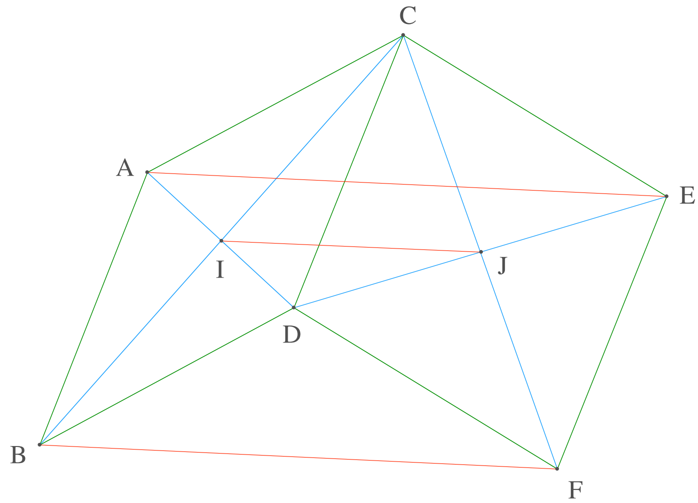


Figure 21

Bien entendu, pour utiliser cette preuve il faut avoir montré le théorème de la droite des milieux, ce que nous avons fait abondamment ci-dessus. Pour ceux qui n'aiment pas les considérations de sens et donc refusent d'employer le mal-aimé, il y a la méthode 4 !

3 Thalès dans les programmes et les manuels de 1950 à 2006

Dans cette section, je fais un rapide tour d'horizon de la place du théorème de Thalès dans l'enseignement secondaire français de 1950 et nos jours.

Pour la période antérieure, où la situation est assez stable, si j'en crois [Bkouche], j'ai regardé notamment le traité de géométrie [RC] de Rouché et Comberousse[22]. Dans ce livre, le théorème de Thalès, qui ne porte pas ce nom, est prouvé par la méthode usuelle d'Arnauld, mais le passage au cas des rapports réels est traité rigoureusement dans une note annexe, et il s'appuie

[22] Il n'y a pas d'indication de niveau dans ce livre, mais je crois qu'il s'agit d'un livre destiné aux élèves de l'enseignement secondaire. Impressionnant !

sur un lemme qui, dit en langage moderne, signifie qu'une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, croissante et additive, est une homothétie.

En ce qui concerne la période moderne (i.e. depuis 1950), je n'ai évidemment pas lu tous les livres, et je ne prétends donc nullement à l'exhaustivité. Je ne cite pas les manuels que j'ai regardés pour la période des années 1980-1990 et la période actuelle.

3.1 Avant 1960

3.1.1 Le programme

Je cite le programme de troisième de 1958 :

Rapport de deux segments. Rapport de deux segments orientés portés par une même droite. ... Théorème de Thalès. Application au triangle et au trapèze ; étude de la réciproque dans le cas du triangle et du trapèze.

On trouve ensuite : triangles semblables, relations métriques dans le triangle rectangle (ce qui inclus Pythagore), puis trigonométrie, etc.

3.1.2 Les manuels

J'ai examiné deux manuels de troisième : Monge-Guinchan [MG3-1959] et Lebossé-Hémery [LH3-1958]. Il y a une assez grande proximité entre eux. Le théorème de Thalès y est énoncé, comme c'est la tradition dans l'enseignement français depuis le début du XIX-ième siècle, sous la forme des "des trois parallèles" (en fait, ici, quatre) et avec les rapports de projection[23] $A'B'/AB = C'D'/CD$. Une preuve partielle est donnée, qui s'appuie sur le lemme des parallèles équidistantes (montré en quatrième par la méthode des triangles égaux, la preuve "classique", cf. 2.12). La preuve de Thalès est donnée pour un cas très particulier, le cas où le rapport AB/CD vaut 3/5 (dans les deux manuels, et même d'autres !) et rien n'est dit sur le cas général. Dans [LH3-1958] il y a une variante avec des mesures algébriques (mais évidemment pas avec des vecteurs, puisqu'il s'agit des rapports de projection). Les autres formes (rapports d'abscisses) sont données en corollaires. Les applications concernent les bissectrices, partages de segments et surtout les triangles semblables qui jouent un rôle essentiel. Par exemple, le théorème de Pythagore est démontré en passant par l'un des théorèmes classiques de moyenne proportionnelle : le côté de l'angle droit BA est moyenne proportionnelle entre sa projection BH sur l'hypoténuse et l'hypoténuse BC : $BA^2 = BH \times BC$ et ce résultat est conséquence de la similitude des trois triangles ABC, ABH et AHC.

[23]Ce qui est assez bizarre, car la preuve passe par les rapports d'abscisses.

C'est dans ces manuels que j'ai trouvé le théorème "anti-Thalès", cf. 1.8.

3.2 La période transitoire : avant les maths modernes

3.2.1 Vision d'ensemble

Le programme de 1964 est identique à celui de 1958 sur le théorème de Thalès et l'énoncé de base est toujours donné sous la forme des trois parallèles (ou plus), avec la preuve utilisant le lemme des parallèles équidistantes. Pourtant, il y a plusieurs modifications dans les manuels[24] de cette époque et aussi – me semble-t-il – une plus grande variété.

D'abord, l'énoncé est donné plutôt sous la forme rapport d'abscisses et souvent, soit dès le départ, soit en corollaire, avec des rapports de vecteurs[25].

Ensuite, il y a un effort de preuve dans le cas commensurable (cf. [MG3-1966], [CaT3-1960], ...). Si l'on retrouve le cas du rapport $3/5$ comme exemple, on parle souvent de segments AB et CD commensurables ou ayant une partie aliquote commune (ce qui signifie, comme on l'a vu, qu'il existe une longueur u telle que l'on ait $AB = mu$ et $CD = nu$ avec m, n entiers) et on donne une preuve (ou au moins une esquisse) dans ce cas. On dit aussi de façon explicite que le théorème est admis dans le cas du rapport réel. Dans [HI3-1964], il y a même une amorce de preuve dans le cas d'un rapport $\sqrt{2}$ en encadrant $\sqrt{2}$ entre $1,41$ et $1,42$, puis entre $1,414$ et $1,415$ et il est dit : *On conçoit donc que l'on puisse démontrer la relation quelle que soit la valeur réelle du rapport ....*

Enfin, chez certains (notamment [CoT3-1967]) on voit apparaître un énoncé de linéarité de la projection (vectorielle) d'une droite sur une autre (précisément, on montre que la projection conserve l'équipollence, la somme vectorielle et le produit par un scalaire[26]).

3.2.2 Des manuels originaux : les Queysanne-Revuz de 1968

Ce sont des livres extraordinaires ! Je pense que les étudiants de CAPES de maths actuels apprendraient beaucoup en lisant les manuels de quatrième et troisième de 1967-1968 de cette collection. Il faut dire que le livre prend

[24] Je disposais ici d'un assez grand nombre de manuels (Monge-Guinchan [MG4-1965] et [MG3-1966], Cossart-Théron [CoT3-1967], Huisman-Itard [HI3-1964], Cagnac-Thiberge [CaT3-1960], Bréard [B3-1960], Queysanne-Revuz [QR4-1967] et [QR3-1968]).

[25] Vérité un jour, erreur le lendemain : à une époque récente, écrire des rapports de vecteurs était considéré comme fautif, y compris dans des copies de CAPES.

[26] Le lien avec Thalès n'est pas explicitement fait à ce moment dans [CoT3-1967].

de grandes libertés avec le programme. J'ai découvert en particulier, qu'il propose une axiomatique de la géométrie plane qui est (presque) exactement celle que je propose moi-même (voir [Perrin4] le jour lointain où il sortira), avec notamment un axiome de transitivité du groupe des isométries sur les drapeaux point, demi-droite, demi-plan[27].

S'agissant du théorème de Thalès, le manuel de quatrième montre la propriété de la droite des milieux par la méthode dite numéro 1 au paragraphe 2.5. Le théorème de Thalès est démontré dans le manuel de troisième. Je dis bien démontré. Il s'agit de la variante projection. Le fait que la projection conserve le milieu a été établi en quatrième[28]. On montre aussi que la projection d'un segment est un segment[29]. Voici la fin de la preuve :

On considère deux droites D, D', deux points O, A sur D et leurs projetés O', A' sur D', parallèlement à une direction donnée. On prend O, A (resp. O', A') comme repère[30] *sur D (resp. D'). Le résultat sur la projection du milieu montre que la projection d'une suite de points consécutifs et équidistants en est une autre, ce qui revient à dire que la projection d'un point M de D d'abscisse $n \in \mathbf{Z}$ est un point M' de D' d'abscisse n. En partageant l'unité en 10, puis 100, etc. on en déduit le même résultat pour un point d'abscisse décimale. Soit alors M un point d'abscisse x réelle. Les résultats établis sur les réels permettent d'englober M dans une suite de segments emboîtés $[B_n, C_n]$ avec B_n, C_n d'abscisses décimales b_n, c_n et $b_n - c_n$ tendant vers 0. Si on projette sur D', on a $p(M) = M' \in [p(B_n), p(C_n)] = [B'_n, C'_n]$. Comme B'_n et C'_n sont d'abscisses b_n et c_n (c'est le cas décimal), l'abscisse x' de M' est comprise entre b_n et c_n. Mais alors, l'axiome des segments emboîtés*[31] *implique qu'on a $x = x'$!*

3.3 La réforme des maths modernes

Il faut passer un peu de temps sur cet épisode qui a joué un grand rôle dans l'évolution de l'enseignement des mathématiques depuis 50 ans.

3.3.1 Le programme de quatrième

[27] Mais il ne s'en sert pas pour prouver les cas d'égalité des triangles et rendre ainsi correct le début d'Euclide, ce qui, au contraire, est mon objectif.

[28] Le résultat n'est pas exactement formulé ainsi, c'est l'assertion sur la droite des milieux du trapèze, mais l'essentiel y est.

[29] On le montre vraiment, avec un argument de demi-plans !

[30] On notera que les unités de longueur ne sont donc pas forcément les mêmes sur chaque droite.

[31] Qui est énoncé explicitement dans le chapitre sur les nombres réels, bien entendu !

Le programme en lui-même n'est pas si exotique que l'on pourrait le croire. Il comporte un chapitre sur la géométrie de la droite, avec les notions de mesure algébrique, de droite orientée (ou axe) et celle de barycentre. Sur la géométrie plane, je recopie le passage pertinent :

Droites du plan. détermination d'une droite par deux points. Droites parallèles. Le parallélisme est une relation d'équivalence ; ...

Projection, de direction donnée, du plan sur une droite, d'une droite sur une droite.

Énoncé de Thalès. Rapport de projection, pour une direction donnée, d'un axe sur un axe.

Viennent ensuite les applications de Thalès au triangle, la définition du parallélogramme et la notion de vecteurs (avec toutes les propriétés algébriques).

Plus intéressants, car beaucoup plus détaillés, sont les commentaires des programmes.

3.3.2 Les commentaires des programmes

La circulaire numéro 71-370 du 22/11/1971 est un monument (39 pages). C'est presque un cours de mathématiques à l'usage des professeurs et elle présente notamment une véritable axiomatique de la géométrie, inspirée de la position de Choquet, cf. [Choquet1,2]. Dans cette présentation, les droites sont en bijection avec $\mathbf{R}$ au moyen de graduations (i.e de bijections[32] de $\mathbf{R}$ sur D). Je ne résiste pas à l'envie de citer *in extenso* la définition d'une droite affine :

3.1 Définition. *Par définition, une droite affine Δ est un ensemble E muni d'une famille Φ de bijections de E sur $\mathbf{R}$ telle que :*
a) pour tout f élément de Φ, et pour tout élément (a, b) de $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, l'application définie par $g(M) = af(M) + b$ appartient aussi à Φ ;
b) réciproquement, si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de Φ, il existe (α, β) appartenant à $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ tel que $f_2(M) = \alpha f_1(M) + \beta$.
L'ensemble E est appelé le support de la droite affine Δ, un élément M de E est appelé un point de la droite affine Δ.

Bien entendu, sur le plan mathématique, il n'y a rien à redire, en revanche, comme approche de la droite pour des élèves de quatrième ...

[32]Bien entendu, les notions de relation, d'application, de bijection, de nombre réel font partie du programme. Les nombres réels sont introduits comme développements décimaux illimités, ce qui est, dans l'absolu, n'est pas déraisonnable.

Dans cette version, Thalès est un axiome[33] de compatibilité de ces graduations :

3.2 Axiome. *Soient, dans le plan, deux droites quelconques G et D et une direction δ ne rencontrant ni G ni D ; trois points quelconques de G, A, B, C, $A \neq B$, et leurs projections A', B', C' de direction δ sur D sont liés par :* $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

3.3.3 Un manuel : le Queysanne-Revuz [QR4-1973]

Vu le rôle joué par André Revuz dans l'élaboration de la réforme, il n'est pas étonnant que ce manuel soit très fidèle à l'esprit du programme. Il reprend donc à son compte la définition de la droite réelle et l'axiome de Thalès tels que je les ai rappelés ci-dessus. Autant je considère les manuels [QR4-1967] et [QR3-1968], abstraction faite de leur aspect irréaliste, comme excellents, autant, avec tout le respect que j'ai pour André Revuz, je considère celui-là comme catastrophique.

3.3.4 Un autre exemple : le Vissio [V4-1971]

Il s'agit du manuel de quatrième de la collection dirigée par le regretté Paul Vissio. Là, les options sont claires ! Les mots espace vectoriel et espace affine[34] figurent en toutes lettres dans le manuel et le théorème de Thalès est démontré comme en 2.15 ci-dessus, comme conséquence de la distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition.

Je signale que dans le livre de troisième il y a le produit scalaire et tout ce qui s'ensuit. On n'avait peur de rien, à l'époque.

3.4 La contre-réforme des années 80

Dans le programme de quatrième de 1989, deux thèmes se rattachent au théorème de Thalès sans que ce nom soit prononcé :

Dans le plan, projection sur une droite, selon une direction.

Conservation du milieu par projection ; configurations triangulaires prenant appui sur cette propriété.

Projection orthogonale ; cosinus d'un angle comme opérateur de projection orthogonale.

---

[33]Et les commentaires insistent beaucoup là-dessus.

[34]Et l'ex-postulat d'Euclide est appelé théorème d'Euclide, ce que je trouve tout de même abusif : c'est trop facile d'avoir son nom attaché à un théorème de cette manière !

Dans les commentaires il est dit que la propriété de conservation du milieu (essentiellement, la propriété de la droite des milieux) pourra être admise. En fait, dans les manuels que j'ai consultés, cette propriété est prouvée, par les méthodes usuelles, cf. 2.5. En revanche, le lien n'est pas fait avec le cosinus et l'existence de celui-ci (c'est-à-dire Thalès dans le triangle rectangle, cf. 1.6), est admise.

Le programme de troisième comporte les points suivants : *Énoncé de Thalès relatif au triangle. Application à des problèmes de construction.*

Dans les commentaires, on suggère les formes rapport d'abscisse et rapport d'homothétie. Il est dit expressément que la forme générale (je suppose qu'il s'agit de la forme avec plusieurs parallèles) est hors programme. On dit aussi : *Toute intervention de mesures algébriques est exclue.*

3.5 L'état actuel des choses

Le programme de quatrième comprend le théorème de la droite des milieux (y compris la variante homothétie) et sa réciproque, et le théorème de Thalès dans le triangle, énoncé sous la forme rapport d'homothétie. Le programme recommande d'admettre ce théorème après d'éventuelles études dans des cas particuliers. La variante du papillon (sous la forme homothétie) et la réciproque de Thalès (sous la forme rapport d'abscisse, avec une condition sur la position des points) sont au programme de troisième.

Dans les manuels actuels le théorème de la droite des milieux est (en général) démontré, le plus souvent par l'une des méthodes vues en 2.5. J'avoue que je suis parfois agacé par le fait qu'on a l'impression que les auteurs prennent la locution *chercher la preuve d'un théorème* au sens de *dénicher où diable elle peut bien être dissimulée dans le fatras de pseudo-activités qui encombrent le livre.*

4 Vagabondage mathématique

4.1 Erlangen

Si, comme moi, on choisit comme grille de lecture de la géométrie celle du programme d'Erlangen de Felix Klein (1873), le théorème de Thalès apparaît non pas comme un théorème euclidien, mais comme un théorème affine. Cela signifie qu'il est invariant par une application affine, au sens où son hypothèse et sa conclusion le sont : une application affine transforme droites parallèles en droites parallèles et conserve les rapports de mesures algébriques sur une droite. Par exemple, dans la situation de 1.3, avec D, D' sécantes en O, le théorème reste vrai si on effectue une affinité d'axe D, de direction D' et de rapport λ (dans cette transformation, la droite D reste fixe et on effectue une homothétie de centre O et de rapport λ sur D'). Pour oser une métaphore, on peut voir les droites D et D' comme la France et l'Angleterre avec le Channel entre les deux et des unités de longueur distinctes de chaque côté, les mètres et les yards. Malgré cela (si tant est que l'on sache ce que veut dire alors parallèles), Thalès reste vrai[35]. On peut même aller plus loin, en prenant l'exemple du prix d'un morceau de viande (pour un type de morceau donné) en fonction du poids. On passe du poids au prix en traçant une droite parallèle à la direction symétrique de la courbe représentative par rapport aux axes. On a ici une situation de Thalès avec des grandeurs différentes sur chacun des axes.

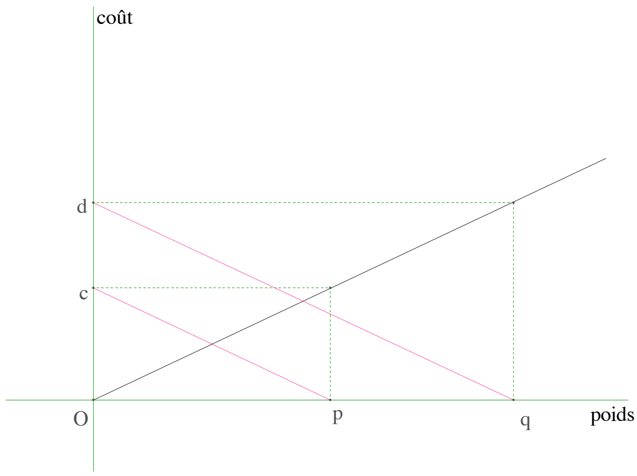


Figure 22

4.2 Invariants

La grille de lecture de la géométrie que fournit le programme d'Erlangen doit être complétée par une autre notion, celle d'invariant. On sait en effet que les théorèmes d'une géométrie (ici la géométrie affine) correspondent aux relations entre les invariants de la géométrie en question (voir [Perrin2]). Or, dans le cas de la géométrie affine, on montre qu'il y a un unique invariant dont les autres sont issus, et qui est l'aire du triangle (*loc. cit.* ou [Perrin3]). De plus, on montre que toutes les relations se déduisent de l'une d'entre

[35] On a bien vu cela dans le Queysanne-Revuz de 1968. Cette compatibilité de graduations différentes est ce sur quoi on insistait, à l'époque Maths modernes, avec le fameux axiome de Thalès.

elles[36] dont voici une forme :

4.1 Proposition. *Soient A, B, C, D, M, N six points du plan affine. On a la relation suivante entre aires orientées*[37] *:*

$$(\sharp) \qquad \begin{aligned} \mathcal{A}(ABC)\mathcal{A}(MND) &= \mathcal{A}(BCD)\mathcal{A}(MNA) \\ &+ \mathcal{A}(CAD)\mathcal{A}(MNB) + \mathcal{A}(ABD)\mathcal{A}(MNC). \end{aligned}$$

L'origine de cette relation est simple, c'est le résultat suivant :

4.2 Proposition. *Soient A, B, C, D quatre points du plan, avec A, B, C non alignés. Alors D est barycentre des points A, B, C affectés des coefficients $\mathcal{A}(BCD)$, $\mathcal{A}(CAD)$, $\mathcal{A}(ABD)$ (aires orientées).*

Avec ce résultat la relation fondamentale ($\sharp$) est immédiate en utilisant par exemple la formule donnant l'aire comme déterminant ou produit vectoriel. Quant à 4.2, c'est une conséquence du lemme des proportions, ou plutôt d'un de ses avatars, le lemme du chevron :

4.3 Lemme. (du chevron) *Avec les notations de 4.2, on suppose que (AD) coupe (BC) en A'. Alors, on a la formule : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ACD)}$, de sorte que A' est barycentre de B et C affectés des coefficients $\mathcal{A}(CAD)$ et $\mathcal{A}(ABD)$.*

Inversement, si l'on suppose les points A, B, M, N alignés, la relation ($\sharp$) donne un autre avatar du lemme des proportions[38] :

4.4 Proposition. *Soient A, B, M, N quatre points d'une droite Δ et C, D deux points n'appartenant pas à Δ. On a l'égalité :*

$$\frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(MNC)} = \frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(MND)}.$$

Cette lecture "moderne[39]" de la géométrie, permet de mieux comprendre l'importance de la notion d'aire en géométrie affine (et notamment du lemme des proportions ou du lemme du chevron) et d'expliquer l'usage immodéré qu'en fait Euclide. Finalement, entre Arnauld et Euclide, le plus moderne des deux n'est peut-être pas celui qu'on pense !

[36] On peut dire de cette relation qu'elle est **le** théorème affine principal puisque tous les autres en sont conséquences.

[37] L'aire d'un triangle ABC est comptée positivement si le triangle, vu comme chemin dans l'ordre A, B, C, tourne dans le sens trigonométrique, et négativement sinon. Si l'on préfère, c'est la moitié de $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

[38] C'est le lemme des proportions sans les rapports de longueurs.

[39] C'est-à-dire ne remontant qu'à la fin du XIX-ième siècle !

4.3 Une variante projective

On peut considérer le théorème de Thalès comme un cas particulier d'un théorème projectif bien connu[40] : les perspectives[41] sont des homographies, c'est-à-dire conservent le birapport. Ce résultat peut se dire de manière élémentaire dans un plan affine :

4.5 Théorème. *Soient $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$ quatre droites concourantes en O et soient L et L' deux droites qui coupent les précédentes en A, B, C, D et A', B', C', D' respectivement. Alors on a l'égalité de birapports :*

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}}.$$

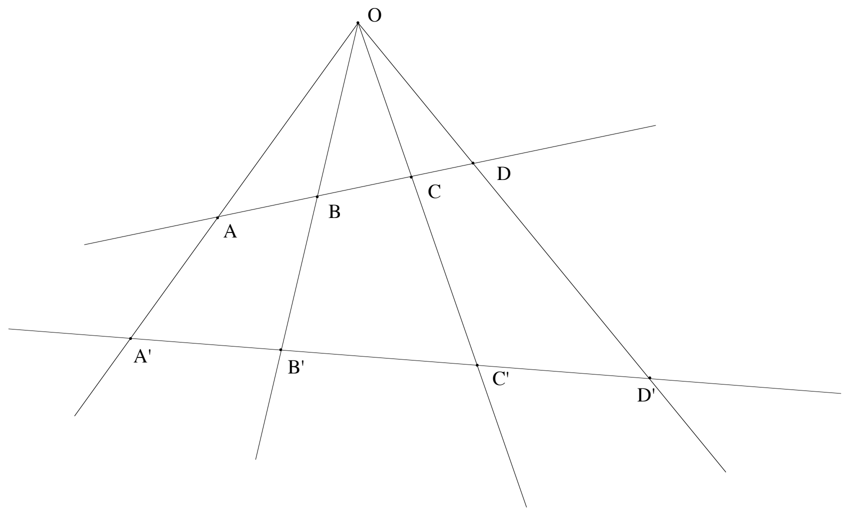


Figure 23

Démonstration. Voici une preuve dans l'esprit du programme d'Erlangen. Le résultat est projectif, ce qui signifie simplement que son hypothèse (quatre droites concourantes) et sa conclusion (égalité de birapports) sont conservées par homographie. Comme on peut échanger deux droites par une homographie, on peut donc, pour le montrer, supposer que la droite de l'infini est, par exemple, égale à Δ_D. Mais alors, le théorème n'est rien d'autre que le théorème de Thalès. En effet, comme O est à l'infini, les droites $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$

[40]Là encore, il y a de bonnes raisons de considérer que ce résultat est le plus important de la géométrie projective plane. D'abord, il a de multiples conséquences (Pappus, Desargues, la polaire, etc.) et ensuite, au regard de la théorie des invariants c'est la traduction de la relation qui engendre toutes les autres (la version projective de 4.1 ou plutôt sa duale), cf. [Perrin3].

[41]La perspective de centre O d'une droite D sur une droite D' (avec $O \notin D \cup D'$) est l'application qui à $M \in D$ associe le point d'intersection de (OM) et de D'.

sont parallèles et comme D, D' sont à l'infini, les birapports se réduisent à leurs premiers rapports.

Une deuxième preuve ramène ce théorème au lemme des proportions (ou, si l'on préfère à l'identité fondamentale sous sa forme 4.4). On interprète les rapports en termes de rapports d'aires (orientées), par exemple : $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OCB)}$. La relation à prouver devient :

$$\frac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OCB)} : \frac{\mathcal{A}(ODA)}{\mathcal{A}(ODB)} = \frac{\mathcal{A}(OC'A')}{\mathcal{A}(OC'B')} : \frac{\mathcal{A}(OD'A')}{\mathcal{A}(OD'B')},$$

ou encore :

$$(*) \qquad \frac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OC'A')} \times \frac{\mathcal{A}(OC'B')}{\mathcal{A}(OCB)} \times \frac{\mathcal{A}(ODB)}{\mathcal{A}(OD'B')} \times \frac{\mathcal{A}(OD'A')}{\mathcal{A}(ODA)} = 1.$$

Mais, on a le lemme suivant :

4.6 Lemme. *Soient Δ_A, Δ_C deux droites sécantes en O et soient A, A' (resp. C, C') deux points de Δ_A (resp. de Δ_C) distincts de O. On a la formule (avec des aires orientées) :*

$$\frac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OC'A')} = \frac{\overline{OC}.\overline{OA}}{\overline{OC'}\overline{OA'}}.$$

Démonstration. Pour établir la formule[42] il suffit d'écrire $\dfrac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OC'A')} = \dfrac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OC'A)} \times \dfrac{\mathcal{A}(OC'A)}{\mathcal{A}(OC'A')}$ et d'appliquer le lemme des proportions.

Montrer la relation $(*)$ est maintenant une tâche comme je les aime car le premier membre de l'égalité devient :

$$\frac{\overline{OC}.\overline{OA}}{\overline{OC'}.\overline{OA'}} \times \frac{\overline{OD}.\overline{OB}}{\overline{OD'}.\overline{OB'}} \times \frac{\overline{OC'}.\overline{OB'}}{\overline{OC}.\overline{OB}} \times \frac{\overline{OD'}.\overline{OA'}}{\overline{OD}.\overline{OA}}$$

et il est évidemment égal à 1.

La troisième preuve est une variante (un peu plus directe) de la précédente où l'on interpète la relation $(*)$ en termes de sinus. En effet, on a vu qu'on a $r = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OCB)} : \dfrac{\mathcal{A}(ODA)}{\mathcal{A}(ODB)}$ (avec des aires orientées). Grâce

[42]Le résultat est évident si l'on dispose de la formule de l'aire avec le sinus, voir plus loin, mais il me semble plus conforme à l'esprit d'Erlangen de ne pas utiliser d'invariants métriques ici.

à la formule qui donne l'aire en fonction du sinus : $\mathcal{A}(OCA) = \frac{1}{2} OC \times OA \sin \widehat{COA}$, on peut écrire, avec des angles orientés :

$$r = \frac{\sin \widehat{COA}}{\sin \widehat{COB}} : \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}.$$

Le résultat sur le birapport est alors immédiat : si les points A, A', etc. sont sur les mêmes demi-droites issues de O, le résultat est clair avec la formule des sinus car le birapport ne dépend que des angles. Sinon, il suffit de noter que le fait de passer A' de l'autre côté de O (par exemple) change les signes de deux des sinus, donc ne change pas le birapport.

4.7 *Remarque.* Une variante de la première preuve ci-dessus consiste à noter que la relation $(*)$ est conséquence des deux relations suivantes :

$$(**) \qquad \frac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OC'A)} \times \frac{\mathcal{A}(OC'B)}{\mathcal{A}(OCB)} \times \frac{\mathcal{A}(ODB)}{\mathcal{A}(OD'B)} \times \frac{\mathcal{A}(OD'A)}{\mathcal{A}(ODA)} = 1.$$

$$(***) \qquad \frac{\mathcal{A}(OC'A)}{\mathcal{A}(OC'A')} \times \frac{\mathcal{A}(OC'B')}{\mathcal{A}(OC'B)} \times \frac{\mathcal{A}(OD'B)}{\mathcal{A}(OD'B')} \times \frac{\mathcal{A}(OD'A')}{\mathcal{A}(OD'A)} = 1.$$

et ces relations sont elles-mêmes conséquences de formules du genre $\frac{\mathcal{A}(OCA)}{\mathcal{A}(OC'A)} \times \frac{\mathcal{A}(OC'B)}{\mathcal{A}(OCB)} = 1$, qui résultent des relations vues en 4.4.

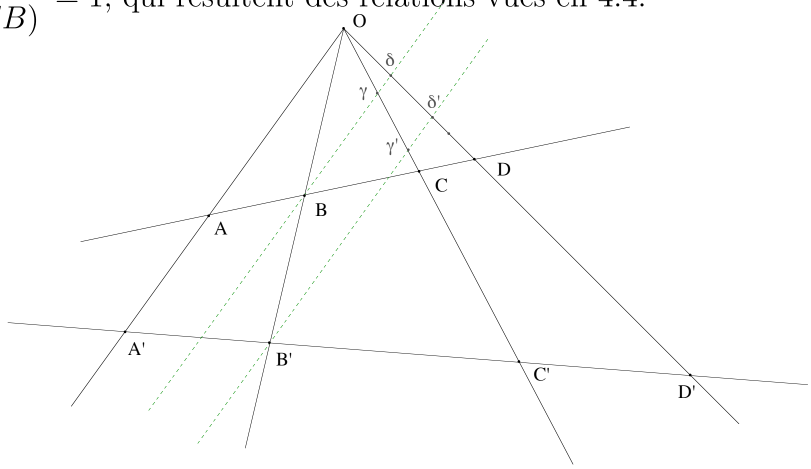


Figure 24

Signalons enfin que les auteurs anciens (voir par exemple [RC]) prouvaient ce théorème en se ramenant à Thalès (mais sans changer de droite à l'infini). Il suffit pour cela (voir fig. 24) de tracer les parallèles à (OA) passant par B et B', elles coupent (OC) (resp. (OD)) en γ et γ' (resp. δ et δ') et on vérifie que les birapports ne sont autres que $\delta B/\gamma B$ et $\delta' B'/\gamma' B'$, donc qu'ils sont égaux.

4.4 Géométries non euclidiennes

Il n'y a qu'une chose essentielle à retenir à ce sujet : Thalès est vraiment un théorème euclidien, qui n'a pas vraiment d'équivalent en géométrie elliptique ou hyperbolique[43]. La raison principale de ce fait c'est que la notion de parallèle (l'un des deux mots clés de Thalès), n'a pas d'intérêt en géométrie non euclidienne. C'est clair en géométrie elliptique car il n'y a pas du tout de parallèles. C'est un peu moins évident en géométrie hyperbolique. Déjà, si on dit que D et D' sont parallèles simplement lorsque leur intersection est vide, la notion est beaucoup trop pauvre.

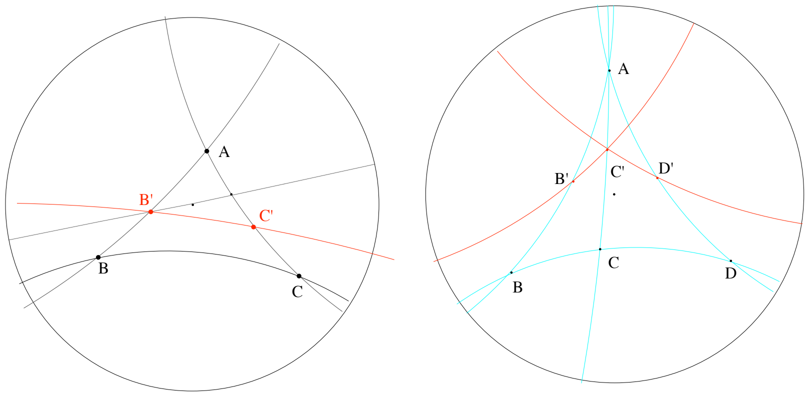


Figure 25

Ainsi, s'il est vrai que dans un triangle ABC la droite des milieux $(B'C')$ est parallèle au côté (BC) en ce sens, il y a une infinité de droites $(B'C'')$ qui sont dans ce cas. Le lecteur examinera la figure ci-dessus (réalisée avec les macros d'Yves Martin, cf. [Martin]). Les droites des milieux sont en rouge. Dans la figure de droite on a deux triangles accolés ABC et ACD, avec B, C, D alignés, mais les milieux B', C', D' de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ ne sont pas alignés.

Il y a cependant, pour la droite des milieux, un théorème, valable à la fois en hyperbolique (fig. 26) et en elliptique (fig. 27) : la droite des milieux $(B'C')$ est perpendiculaire à la médiatrice de $[BC]$. Dans le cas elliptique, où il y a deux milieux pour un segment, on peut ajouter que la droite $(B'C')$ (disons des milieux intérieurs) passe par le milieu (extérieur dans ce cas) A'' de $[BC]$, voir ci-dessous fig. 27.

[43]Certes, il y a beaucoup de théorèmes euclidiens qui sont faux en géométrie elliptique ou hyperbolique (le concours des médiatrices d'un triangle ou le théorème de l'angle inscrit, par exemple), mais souvent on dispose alors d'un ersatz. Ainsi, dans le cas des médiatrices, elles sont concourantes ou admettent une perpendiculaire commune, dans le cas du théorème de l'angle inscrit on a le Lotensatz (cf. [Bachmann], [Perrin3]). La question mérite donc d'être posée.

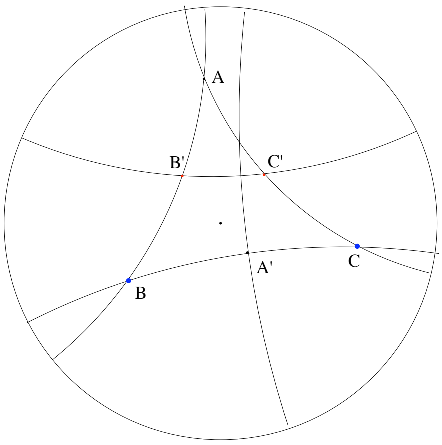


Figure 26

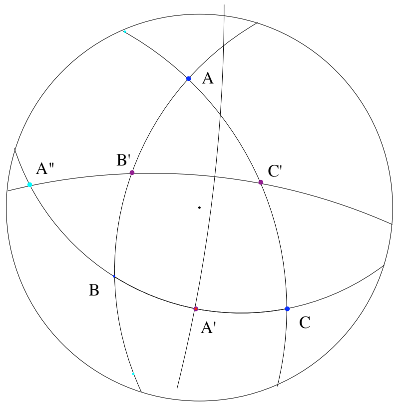


Figure 27

Si, fort de ce succès, on essaie de passer à Thalès en prenant comme parallèle à (BC) passant par B' la perpendiculaire à la médiatrice, qui coupe (AC) en C', on constate sans peine que les rapports $AB'/B'B$ et $AC'/C'C$ ne sont pas égaux. Dans le cas hyperbolique, disons dans le disque de Poincaré, on peut aussi essayer avec la notion "forte" de parallélisme, c'est-à-dire le fait que (BC) et $(B'C')$ se coupent sur le bord du disque, mais, là encore, les rapports ne sont pas égaux.

On notera que le lemme des parallèles équidistantes est faux lui aussi (même avec trois droites parallèles au sens où elles admettent une perpendiculaire commune). Bref, il n'y a pas grand chose à sauver de Thalès en géométrie non euclidienne.

5 En guise de conclusion : une position

Le contrat que m'a proposé René ne stipulait certes pas que je devais faire des propositions pour l'enseignement du théorème de Thalès au collège. Cependant, puisqu'on m'a donné la parole, je voudrais rappeler quels sont les principes que je défends sur le sujet, et tels qu'ils apparaissent dans le rapport sur la géométrie de la commission Kahane ou dans mon texte [Perrin1].

Le premier point, c'est que plus personne aujourd'hui, et moi pas plus que les autres, ne songe à enseigner la géométrie à partir des espaces vectoriels et affines, au moins au collège et au lycée. Les deux autres points, mis en avant dans le rapport Kahane, sont de déplorer la minoration du rôle des invariants (longueur, angle et aire) et l'absence des cas d'isométrie et de similitude des triangles dans la géométrie du collège.

En ce qui concerne le théorème de Thalès, le choix actuel me convient assez bien : limiter l'énoncé au cas du triangle[44] et commencer par la droite des milieux.

S'agissant des démonstrations, je suis toujours gêné par le fait de donner des résultats sans justifications[45]. Il me semble donc qu'il faut donner des preuves, au moins partielles, des résultats énoncés. Dans les manuels c'est le cas en général pour la droite des milieux, mais pas pour Thalès. Une piste possible pour prouver Thalès, dans un cas particulier, est indiquée dans le document d'accompagnement des programmes de quatrième (p. 67) dans le cas d'un partage en trois. Une autre possibilité, pour les démonstrations, est de revenir à Euclide et c'est celle que je préfère, pour les raisons suivantes :

- La preuve d'Euclide permet de prouver[46] non seulement le théorème de la droite des milieux, mais aussi le théorème de Thalès, ce qui n'est pas fait actuellement et ne l'a pratiquement jamais été.
- À ma connaissance, bien que la plus ancienne, elle n'a jamais vraiment été utilisée dans l'enseignement.
- Elle est très visuelle.
- Elle s'appuie sur des lemmes (trapèze, proportions, etc.)
  - qui ont de nombreuses applications par ailleurs,
  - qui sont très faciles à prouver si l'on a la formule de l'aire du triangle,
  - qui sont très intéressants à établir sans cette formule (au moins pour les authentiques lemmes de découpage : demi-parallélogramme, trapèze, médiane).
- C'est la démonstration la plus conforme à la grille de lecture Erlangen-invariants, comme on l'a vu.
- Par rapport à la preuve d'Arnauld-Lacroix, elle a l'avantage (certains diront l'inconvénient) de mettre la difficulté du passage aux réels sous le tapis en la confinant dans le calcul de l'aire du rectangle.

[44] On a vu que l'énoncé avec plusieurs parallèles peut en être déduit aisément.

[45] Surtout lorsqu'on impose par ailleurs aux élèves un apprentissage de la démonstration un peu trop formaliste à mon goût.

[46] En admettant la formule de l'aire du rectangle, bien entendu, mais cela ne doit guère poser de problème aux collégiens.

6 Références

6.1 Ouvrages ou articles

[Bachmann] Bachmann F. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer, 1959.

[Bkouche] Bkouche R., *Variations sur les liens entre le géométrique et le numérique*, in Autour de Thalès, Brochure de la commission Inter-IREM Premier cycle, 1995.

[Bousseau] Brousseau G., *Promenade avec Thalès entre la maternelle et l'université*, in Autour de Thalès, Brochure de la commission Inter-IREM Premier cycle, 1995.

[Choquet1] Choquet G., *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire*, Brochure APMEP, numéro 3, 1961.

[Choquet2] Choquet G., *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, 1964.

[CF] Cousin-Fauconnet A., *Enseigner la géométrie au collège*, A. Colin, 1995.

[Euclide] Euclide, *Les éléments*, Traduction et présentation de Georges Kayas, Éd. du CNRS, 1978.

[Hilbert] Hilbert D., *Les fondements de la géométrie*, Dunod, 1971.

[Kahane] (dirigé par) Kahane J.-P., *L'enseignement des sciences mathématiques.* Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Odile Jacob, 2002.

[Lion] Lion G., *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

[Martin] Martin Y., *Conception et mise en oeuvre de géométries non euclidiennes dans le cadre de la géométrie dynamique illustrées avec Cabri-Géomètre. Expérimentation en formation des maîtres*, thèse, Grenoble, 2003.

http ://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Formateurs/Yves/these.html

[ME] Perrin D., *Mathématiques d'École*, Cassini, 2005.

[Perrin1] Perrin D., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, novembre 2000.

[Perrin2] Perrin D., *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.* Actes du colloque Inter-IREM premier cycle, Montpellier, juin 2001.

[Perrin3] Perrin D., *Géométrie projective et applications aux géométries euclidienne et non-euclidiennes*, en préparation.

[Perrin4] Perrin D., *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, en préparation.

[RC] Rouché E. et de Comberousse Ch., *Traité de géométrie*, Gauthier-Villars, 1935.

6.2 Manuels

[LH3-1958] Lebossé C. et Hémery C., *Algèbre, arithmétique et géométrie*, classe de troisième, Nathan, 1958.

[MG3-1959] Monge M. et Guinchan M., *Mathématiques*, classe de troisième, Belin, 1959.

[B3-1960] Bréard C., *Mathématiques*, classe de troisième, L'école, 1960.

[CaT3-1960] Cagnac et Thiberge, (collection) *Mathématiques*, classe de troisième, Masson,1960.

[HI3-1964] Huisman A. et Itard J., *Mathématiques*, classe de troisième, Wesmael-Charlier, 1964.

[MG4-1965] Monge M. et Guinchan M., *Mathématiques*, classe de quatrième, Belin, 1965.

[MG3-1966] Monge M. et Guinchan M., *Mathématiques*, classe de troisième, Belin, 1966.

[CoT3-1967] Cossart E. et Théron P. (collection), *Mathématiques*, classe de troisième, Bordas, 1967.

[QR4-1967] Queysanne M. et Revuz A. (collection) *Mathématiques*, classe de quatrième, Nathan, 1967.

[QR3-1968] Queysanne M. et Revuz A. (collection) *Mathématiques*, classe de troisième, Nathan, 1968.

[QR4-1973] Queysanne M. et Revuz A. (collection) *Mathématiques*, classe de quatrième, Nathan, 1973.

[V4-1971] Vissio P., (collection) *Mathématiques*, classe de quatrième, Delagrave, 1971.