Des triangles de même aire et même périmètre aux courbes elliptiques

Daniel PERRIN

22 mars 2015

Une page de publicité

Pour des détails, voir sur ma page web :

http://www.math.u-psud.fr/~perrin/

à la rubrique conférences, la rédaction détaillée d'un exposé sur le sujet à l'IREM de Paris 7, le 29 mai 2013.

On trouvera aussi des choses dans mon livre en préparation (toujours sur ma page web) :

Géométrie projective et applications aux géométries non euclidiennes et euclidienne.

La question initiale

et les objectifs de l'atelier

La question initiale

- Elle est posée dans le numéro 152 (mars 2012) des *Chantiers de pédagogie mathématique* de l'APMEP ainsi que dans le bulletin vert 498 (mai 2012) :

La question initiale

- Elle est posée dans le numéro 152 (mars 2012) des *Chantiers de pédagogie mathématique* de l'APMEP ainsi que dans le bulletin vert 498 (mai 2012) :
- *Deux triangles ayant la même aire et le même périmètre sont-ils forcément isométriques ?*

Les objectifs de l'atelier, notamment en lien avec la formation des maîtres

- Montrer l'intérêt de la culture pour la formation des professeurs.
- Faire des mathématiques : poser des problèmes, explorer, expérimenter, conjecturer, formuler, prouver, etc.
- Montrer comment on peut utiliser les logiciels de géométrie.
- Montrer comment on peut utiliser l'algorithmique.
- Faire le lien avec les mathématiques vivantes.

Une réponse intuitive

Réponse : non, évidemment

- L'espace des triangles modulo isométries est de dimension 3 (un triangle est déterminé à isométrie près par les longueurs de ses côtés par exemple) donc un élément de cet espace ne peut être déterminé par deux paramètres seulement (ici l'aire et le périmètre). Pour les plus vieux d'entre nous, cette idée s'appuie notamment sur :

Réponse : non, évidemment

- L'espace des triangles modulo isométries est de dimension 3 (un triangle est déterminé à isométrie près par les longueurs de ses côtés par exemple) donc un élément de cet espace ne peut être déterminé par deux paramètres seulement (ici l'aire et le périmètre). Pour les plus vieux d'entre nous, cette idée s'appuie notamment sur :
- Les cas d'isométrie des triangles.

Réponse : non, évidemment

- L'espace des triangles modulo isométries est de dimension 3 (un triangle est déterminé à isométrie près par les longueurs de ses côtés par exemple) donc un élément de cet espace ne peut être déterminé par deux paramètres seulement (ici l'aire et le périmètre). Pour les plus vieux d'entre nous, cette idée s'appuie notamment sur :
- Les cas d'isométrie des triangles.
- Les résolutions de triangles.

Réponse : non, évidemment

- L'espace des triangles modulo isométries est de dimension 3 (un triangle est déterminé à isométrie près par les longueurs de ses côtés par exemple) donc un élément de cet espace ne peut être déterminé par deux paramètres seulement (ici l'aire et le périmètre). Pour les plus vieux d'entre nous, cette idée s'appuie notamment sur :
- Les cas d'isométrie des triangles.
- Les résolutions de triangles.
- Mais on peut aussi penser la question en termes d'équations : deux équations (aire et périmètre donnés) ne sauraient déterminer trois inconnues.

Des questions, des conjectures, des énoncés

Une maxime

Faire des mathématiques c'est **poser des questions** et, si possible, y répondre.

Des questions

On appelle **frère** d'un triangle ABC un triangle (non isométrique) de même aire et de même périmètre.

- Existe-t-il des frères ? Peut-on s'en convaincre expérimentalement ? Figure

Des questions

On appelle **frère** d'un triangle ABC un triangle (non isométrique) de même aire et de même périmètre.

- Existe-t-il des frères ? Peut-on s'en convaincre expérimentalement ? Figure
- Un triangle a-t-il toujours des frères ? en a-t-il toujours une infinité ?

Des questions

On appelle **frère** d'un triangle ABC un triangle (non isométrique) de même aire et de même périmètre.

- Existe-t-il des frères ? Peut-on s'en convaincre expérimentalement ? Figure
- Un triangle a-t-il toujours des frères ? en a-t-il toujours une infinité ?
- Un triangle isocèle a-t-il des frères isocèles ? plus généralement, un triangle quelconque a-t-il des frères isocèles ?

Encore des questions

- Comment calculer explicitement des frères ? Comment construire des frères, avec un logiciel de géométrie (en utilisant les fonctions), ou à la règle et au compas ?

Encore des questions

- Comment calculer explicitement des frères ? Comment construire des frères, avec un logiciel de géométrie (en utilisant les fonctions), ou à la règle et au compas ?
- Y a-t-il toujours des triangles frères à côtés entiers ou rationnels ? à coordonnées rationnelles ? Comment en trouver ? (éventuellement en utilisant un logiciel de calcul)

Encore des questions

- Comment calculer explicitement des frères ? Comment construire des frères, avec un logiciel de géométrie (en utilisant les fonctions), ou à la règle et au compas ?
- Y a-t-il toujours des triangles frères à côtés entiers ou rationnels ? à coordonnées rationnelles ? Comment en trouver ? (éventuellement en utilisant un logiciel de calcul)
- Comment les trouver tous ?

Encore des questions

- Comment calculer explicitement des frères ? Comment construire des frères, avec un logiciel de géométrie (en utilisant les fonctions), ou à la règle et au compas ?
- Y a-t-il toujours des triangles frères à côtés entiers ou rationnels ? à coordonnées rationnelles ? Comment en trouver ? (éventuellement en utilisant un logiciel de calcul)
- Comment les trouver tous ?
- En creusant cette piste on verra apparaître des objets mathématiques passionnants et surgir d'autres questions, dont certaines demeurent ouvertes.

Les deux énoncés principaux

- On peut se contenter d'un contre-exemple :

$(*)$ *Il existe des triangles frères non isométriques.*

Les deux énoncés principaux

- On peut se contenter d'un contre-exemple :

  $(*)$ *Il existe des triangles frères non isométriques.*

- ou au contraire essayer de prouver un résultat général :

  $(**)$ *Tout triangle admet une infinité de triangles frères.*
  (L'idée intuitive est que les triangles d'aire et périmètre fixés forment une famille de dimension 1.) Figure

Les deux énoncés principaux

- On peut se contenter d'un contre-exemple :

  $(*)$ *Il existe des triangles frères non isométriques.*

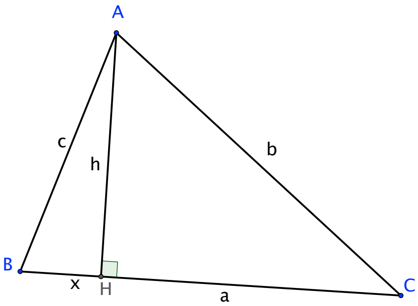
- ou au contraire essayer de prouver un résultat général :

  $(**)$ *Tout triangle admet une infinité de triangles frères.*
  (L'idée intuitive est que les triangles d'aire et périmètre fixés forment une famille de dimension 1.) Figure

- Nous verrons plusieurs preuves de ces résultats. Certaines se contenteront d'affirmer l'existence de triangles frères, d'autres donneront des moyens de les construire ou de les calculer.

La formule de Héron

Calculer l'aire à partir des côtés ?



On a un triangle ABC, on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. On cherche à calculer l'aire de ABC, si possible en fonction des côtés.

Calculer l'aire à partir des côtés (suite)

- Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. On a $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}BC \times AH$.

Calculer l'aire à partir des côtés (suite)

- Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. On a $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}BC \times AH$.
- On pose $h = AH$ et $x = BH$, d'où $CH = a - x$.

Calculer l'aire à partir des côtés (suite)

- Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. On a $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}BC \times AH$.
- On pose $h = AH$ et $x = BH$, d'où $CH = a - x$.
- En écrivant Pythagore dans les triangles ABH et ACH, on trouve :

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} \quad \text{puis} \quad h^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

La formule de Héron

- On en déduit le carré de l'aire :

$$16\mathcal{A}^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$$

La formule de Héron

- On en déduit le carré de l'aire :

$$16\mathcal{A}^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$$

- Et il n'y a plus qu'à utiliser les identités remarquables pour trouver :

$$16\mathcal{A}^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

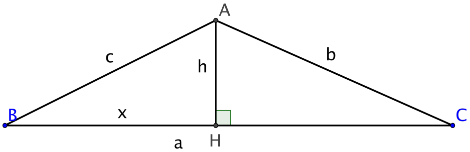
qui s'écrit plus communément :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p'(p'-a)(p'-b)(p'-c)}$$

où p' est le **demi-périmètre** de ABC.

Au collège : $19, 11, 10$ ou $5, 17, 18$?

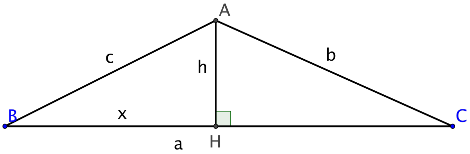
a= 19 cm, b=11 cm, c=10 cm



- Calculer le périmètre de ABC

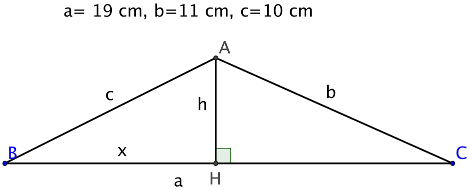
Au collège : $19, 11, 10$ ou $5, 17, 18$?

a= 19 cm, b=11 cm, c=10 cm



- Calculer le périmètre de ABC
- En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH, calculer $h = AH$ en fonction de $x = BH$.

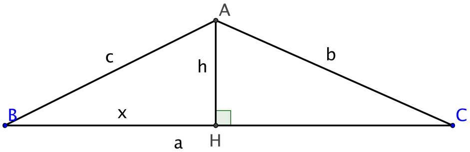
Au collège : $19, 11, 10$ ou $5, 17, 18$?



- Calculer le périmètre de ABC
- En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH, calculer $h = AH$ en fonction de $x = BH$.
- Faire de même dans ACH et en déduire la longueur x, puis la longueur h et enfin l'aire de ABC.

Au collège : $19, 11, 10$ ou $5, 17, 18$?

a= 19 cm, b=11 cm, c=10 cm



- Calculer le périmètre de ABC
- En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH, calculer $h = AH$ en fonction de $x = BH$.
- Faire de même dans ACH et en déduire la longueur x, puis la longueur h et enfin l'aire de ABC.
- Faire le même travail avec le triangle de côtés $5\,cm$, $17\,cm$, $18\,cm$. Que constate-t-on ? Question subsidiaire

Une preuve topologique de $(**)$?

L'espace des triangles modulo isométries, c'est quoi ?

- On considère l'espace $\mathcal{T}$ de tous les triangles. Un triangle c'est trois points A, B, C de $\mathbf{R}^2$, non alignés. L'espace $\mathcal{T}$ est donc un ouvert de $\mathbf{R}^6$.

L'espace des triangles modulo isométries, c'est quoi ?

- On considère l'espace $\mathcal{T}$ de tous les triangles. Un triangle c'est trois points A, B, C de $\mathbf{R}^2$, non alignés. L'espace $\mathcal{T}$ est donc un ouvert de $\mathbf{R}^6$.
- Les groupes G^+ et G des déplacements et des isométries du plan, sont de dimension 3 et opèrent sur $\mathcal{T}$.

L'espace des triangles modulo isométries, c'est quoi ?

- On considère l'espace $\mathcal{T}$ de tous les triangles. Un triangle c'est trois points A, B, C de $\mathbf{R}^2$, non alignés. L'espace $\mathcal{T}$ est donc un ouvert de $\mathbf{R}^6$.
- Les groupes G^+ et G des déplacements et des isométries du plan, sont de dimension 3 et opèrent sur $\mathcal{T}$.
- L'espace des triangles modulo isométries est le quotient $\mathcal{T}/G$. Il est de dimension 3 en vertu de la formule $\dim \mathcal{T} = \dim G + \dim(\mathcal{T}/G)$.

Dimension de l'espace des triangles et longueurs des côtés

- En associant à un triangle les longueurs a, b, c de ses côtés, on voit que l'espace $\mathcal{Q} = \mathcal{T}/G$ est homéomorphe à l'ouvert Ω de $\mathbf{R}^3$ défini par les inégalités triangulaires :

$$a, b, c > 0 \quad \text{et} \quad |b - c| < a < b + c.$$

Dimension de l'espace des triangles et longueurs des côtés

- En associant à un triangle les longueurs a, b, c de ses côtés, on voit que l'espace $\mathcal{Q} = \mathcal{T}/G$ est homéomorphe à l'ouvert Ω de $\mathbf{R}^3$ défini par les inégalités triangulaires :

$$a, b, c > 0 \quad \text{et} \quad |b - c| < a < b + c.$$

- Dire que l'aire et le périmètre déterminent un triangle à isométrie près, c'est dire que l'application continue $\Phi : \mathcal{Q} \to \mathbf{R}^2$, qui à un triangle modulo isométrie associe son aire et son périmètre est **injective**.

Dimension de l'espace des triangles et longueurs des côtés

- En associant à un triangle les longueurs a, b, c de ses côtés, on voit que l'espace $\mathcal{Q} = \mathcal{T}/G$ est homéomorphe à l'ouvert Ω de $\mathbf{R}^3$ défini par les inégalités triangulaires :

$$a, b, c > 0 \quad \text{et} \quad |b - c| < a < b + c.$$

- Dire que l'aire et le périmètre déterminent un triangle à isométrie près, c'est dire que l'application continue $\Phi : \mathcal{Q} \to \mathbf{R}^2$, qui à un triangle modulo isométrie associe son aire et son périmètre est **injective**.
- C'est impossible (mais non trivial) en vertu du théorème *d'invariance du domaine* de Brouwer.

Une preuve de $(**)$ *via* les fonctions implicites

Variante de Héron : les deux paramètres p et s

Un petit calcul de fonctions symétriques montre qu'on peut écrire :

$$16\mathcal{A}^2/p = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$$= (p-2a)(p-2b)(p-2c) = -p^3 + 4(bc+ca+ab)p - 8abc.$$

Se donner $\mathcal{A}$ et p revient donc à se donner p et l'invariant :

$$s := (bc+ca+ab)p - 2abc = bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a + ab^2 + a^2b + abc$$

avec la formule $16\mathcal{A}^2 = 4sp - p^4 = p(4s - p^3)$.

Une preuve du théorème principal *via* les fonctions implicites

On part d'un triangle $T_0 = A_0B_0C_0$ non aplati et non équilatéral. On suppose par exemple $b_0 \neq c_0$. On appelle p_0 son périmètre et $\mathcal{A}_0$ son aire, ou encore s_0 le paramètre associé.

On cherche des ABC, non isométriques, avec même aire et même périmètre, donc des points de l'ouvert "des longueurs de côtés"

$$\Omega = \{(a, b, c) \mid a, b, c > 0 \text{ et } |b - c| < a < b + c\}$$

avec $p = p_0$ et $s = s_0$.

Preuve, suite : on impose a

On a $p = a + b + c$, $s = bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a + ab^2 + a^2b + abc$.
On considère $\Phi : E = \mathbf{R}^3 \to F = \mathbf{R}^3, \quad (a, b, c) \mapsto (a, p, s)$.

Le jacobien de cette application est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ b^2+c^2+bc+2a(b+c) & c^2+a^2+ca+2b(c+a) & a^2+b^2+ab+2c(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-c)(b+c-a).$$

Au point (a_0, b_0, c_0) ce jacobien est non nul.

Preuve, suite et fin

- Le théorème des fonctions implicites montre que l'image $\Phi(\Omega)$ contient un voisinage de $\Phi(a_0, b_0, c_0) = (a_0, p_0, s_0)$.

Preuve, suite et fin

- Le théorème des fonctions implicites montre que l'image $\Phi(\Omega)$ contient un voisinage de $\Phi(a_0, b_0, c_0) = (a_0, p_0, s_0)$.
- Pour a assez voisin de a_0, il existe $(a, b, c) \in \Omega$ tel que $\Phi(a, b, c) = (a, p_0, s_0)$, donc un triangle de premier côté $a \neq a_0$ avec même aire et même périmètre que T_0.

Preuve, suite et fin

- Le théorème des fonctions implicites montre que l'image $\Phi(\Omega)$ contient un voisinage de $\Phi(a_0, b_0, c_0) = (a_0, p_0, s_0)$.
- Pour a assez voisin de a_0, il existe $(a, b, c) \in \Omega$ tel que $\Phi(a, b, c) = (a, p_0, s_0)$, donc un triangle de premier côté $a \neq a_0$ avec même aire et même périmètre que T_0.
- Il y a donc une infinité de triangles non isométriques qui ont même aire et même périmètre que T_0. Figure

Des preuves élémentaires ?

Comment construire des triangles de même aire ?

On se donne un triangle $T = ABC$.

- Comment trouver des triangles de base $[AB]$ et de même aire que T ? Figure

Comment construire des triangles de même aire ?

On se donne un triangle $T = ABC$.

- Comment trouver des triangles de base $[AB]$ et de même aire que T ? Figure
- Comment trouver des triangles de base $[AD]$ (avec $D \in (AB)$) et de même aire que T ? C'est le problème de la construction d'une quatrième proportionnelle. Figure

Comment construire des triangles de même aire ?

On se donne un triangle $T = ABC$.

- Comment trouver des triangles de base $[AB]$ et de même aire que T ? Figure
- Comment trouver des triangles de base $[AD]$ (avec $D \in (AB)$) et de même aire que T ? C'est le problème de la construction d'une quatrième proportionnelle. Figure
- Avec ces outils, on peut proposer plusieurs preuves géométriques de $(*)$.

Trois preuves géométriques de $(*)$

- À partir de deux familles de triangles de même aire (1). Figure Secours

Trois preuves géométriques de $(*)$

- À partir de deux familles de triangles de même aire (1). Figure Secours
- À partir de deux familles de triangles de même aire (2). Figure

Trois preuves géométriques de $(*)$

- À partir de deux familles de triangles de même aire (1). Figure Secours
- À partir de deux familles de triangles de même aire (2). Figure
- À partir de deux familles de triangles de même périmètre. Figure

Trois preuves géométriques de $(*)$

- À partir de deux familles de triangles de même aire (1). Figure Secours
- À partir de deux familles de triangles de même aire (2). Figure
- À partir de deux familles de triangles de même périmètre. Figure
- Et une preuve élémentaire de $(**)$? analytique ? géométrique ?

Trouver des triangles frères

à cotés entiers ?

Avec l'ordinateur

On cherche des triplets d'entiers (distincts) a, b, c et a', b', c' qui soient les côtés de triangles frères.
On sait que le périmètre du triangle est donné par $p = a + b + c$ et l'aire par la formule de Héron :

$$16\mathcal{A}^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

On peut chercher des solutions en écrivant quelques lignes de programme, plus ou moins malin ... Programme

Le changement de variable des différences

On peut aussi faire un peu d'arithmétique. La forme de l'aire :

$$16\mathcal{A}^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

suggère de poser $\alpha = b+c-a$, $\beta = c+a-b$ et $\gamma = a+b-c$. On a $p = \alpha+\beta+\gamma$ et la donnée de l'aire est équivalente à celle de $m = \alpha\beta\gamma$. On retrouve a, b, c par les formules :

$$2a = \beta+\gamma, \quad 2b = \gamma+\alpha \quad \text{et} \quad 2c = \alpha+\beta.$$

Si a, b, c sont entiers, α, β, γ aussi et inversement pourvu que α, β, γ soient de même parité.

Explorer le problème arithmétique

- Il s'agit de trouver des triplets d'entiers à partir de leur somme et de leur produit.

Explorer le problème arithmétique

- Il s'agit de trouver des triplets d'entiers à partir de leur somme et de leur produit.
- Par cette méthode, on montre facilement que le triangle de côtés $3, 4, 5$ n'a pas de frère entier.

Explorer le problème arithmétique

- Il s'agit de trouver des triplets d'entiers à partir de leur somme et de leur produit.
- Par cette méthode, on montre facilement que le triangle de côtés $3, 4, 5$ n'a pas de frère entier.
- Dans le même genre, un problème défi est de trouver tous les entiers $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 40$ et $\alpha\beta\gamma = 720$.

Explorer le problème arithmétique

- Il s'agit de trouver des triplets d'entiers à partir de leur somme et de leur produit.
- Par cette méthode, on montre facilement que le triangle de côtés $3, 4, 5$ n'a pas de frère entier.
- Dans le même genre, un problème défi est de trouver tous les entiers $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 40$ et $\alpha\beta\gamma = 720$.
- On trouve les solutions $2, 18, 20$ et $4, 6, 30$ qui donnent les triangles frères de côtés $10, 11, 19$ et $5, 17, 18$.

Une infinité de frères entiers

On peut aussi, toujours en utilisant le changement de variables des différences, montrer un résultat général :

Il existe une infinité de triangles non isocèles à côtés entiers a, b, c et a', b', c', de même aire même périmètre, non isométriques, avec à la fois a, b, c et a', b', c' **premiers entre eux**.

Une infinité de frères entiers (suite)

- On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbf{N}^*$ tels que l'on ait $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$ et $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.

Une infinité de frères entiers (suite)

- On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbf{N}^*$ tels que l'on ait $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$ et $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.
- La ruse est de les prendre sous la forme $\alpha = uv$, $\beta = w$, $\gamma = t$ et $\alpha' = wt$, $\beta' = u$, $\gamma' = v$ avec u, v, w, t entiers > 0.

Une infinité de frères entiers (suite)

- On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbf{N}^*$ tels que l'on ait $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$ et $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.
- La ruse est de les prendre sous la forme $\alpha = uv$, $\beta = w$, $\gamma = t$ et $\alpha' = wt$, $\beta' = u$, $\gamma' = v$ avec u, v, w, t entiers > 0.
- Il reste à réaliser $(u-1)(v-1) = (w-1)(t-1)$.

Une infinité de frères entiers (suite)

- On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbf{N}^*$ tels que l'on ait $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$ et $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.
- La ruse est de les prendre sous la forme $\alpha = uv$, $\beta = w$, $\gamma = t$ et $\alpha' = wt$, $\beta' = u$, $\gamma' = v$ avec u, v, w, t entiers > 0.
- Il reste à réaliser $(u-1)(v-1) = (w-1)(t-1)$.
- C'est facile, on prend $u - 1 = pq$, $v - 1 = rs$, $w - 1 = pr$ et $t - 1 = qs$.

Une infinité de frères entiers (suite)

- On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbf{N}^*$ tels que l'on ait $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$ et $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.
- La ruse est de les prendre sous la forme $\alpha = uv$, $\beta = w$, $\gamma = t$ et $\alpha' = wt$, $\beta' = u$, $\gamma' = v$ avec u, v, w, t entiers > 0.
- Il reste à réaliser $(u-1)(v-1) = (w-1)(t-1)$.
- C'est facile, on prend $u - 1 = pq$, $v - 1 = rs$, $w - 1 = pr$ et $t - 1 = qs$.
- Un exemple avec $p = r = 1$, $q = 3$, $s = 5$: $(5, 19, 18)$, $(9, 20, 13))$. Figure

Les triangles isocèles

Triangles isocèles : le calcul explicite des faux jumeaux

Soit ABC un triangle isocèle non équilatéral. Il existe exactement un triangle isocèle, non isométrique à ABC, admettant même aire et même périmètre.

On part d'un triangle isocèle de côtés a, b, b avec $0 < a < 2b$ et on cherche un triangle isocèle de côtés x, y, y avec mêmes invariants p et s. En éliminant x et en tenant compte de la racine $y = b$, on obtient l'équation en y :

$$4y^2 - (5a + 6b)y + 2b^2 + 3ab + 2a^2 = 0.$$

Triangles isocèles (suite)

(Pour ces calculs, l'usage d'un logiciel de calcul formel est agréable.)

$$4y^2 - (5a + 6b)y + 2b^2 + 3ab + 2a^2 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = (2b - a)(2b + 7a)$ et on trouve :

$$x = \frac{2b - a + \sqrt{\Delta}}{4}, \quad y = \frac{5a + 6b - \sqrt{\Delta}}{8}.$$

On peut construire les jumeaux à la règle et au compas. Figure

Des solutions entières

Il existe une infinité de paires de triangles isocèles non isométriques, à côtés entiers, ayant même aire et même périmètre.

- On cherche a, b entiers tels que $\Delta = (2b - a)(2b + 7a)$ soit un carré. Il suffit que les facteurs soient des carrés.

Des solutions entières

Il existe une infinité de paires de triangles isocèles non isométriques, à côtés entiers, ayant même aire et même périmètre.

- On cherche a, b entiers tels que $\Delta = (2b - a)(2b + 7a)$ soit un carré. Il suffit que les facteurs soient des carrés.
- Les relations $2b + 7a = \alpha^2$, $2b - a = \beta^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, donnent $8a = \alpha^2 - \beta^2$ et $16b = \alpha^2 + 7\beta^2$.

Des solutions entières

Il existe une infinité de paires de triangles isocèles non isométriques, à côtés entiers, ayant même aire et même périmètre.

- On cherche a, b entiers tels que $\Delta = (2b-a)(2b+7a)$ soit un carré. Il suffit que les facteurs soient des carrés.
- Les relations $2b+7a = \alpha^2$, $2b-a = \beta^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, donnent $8a = \alpha^2 - \beta^2$ et $16b = \alpha^2 + 7\beta^2$.
- On a ensuite les deux conditions $\alpha^2 + 7\beta^2 \equiv 0 \pmod{16}$ et $\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha\beta \equiv 0 \pmod 8$ qui sont satisfaites si $\alpha = 3\beta + 8k$, $k \in \mathbf{N}$, ce qui donne les solutions :

$$a = \beta^2 + 6\beta k + 8k^2 \quad \text{et} \quad b = \beta^2 + 3\beta k + 4k^2,$$

$$x = \beta^2 + 2\beta k \quad \text{et} \quad y = \beta^2 + 5\beta k + 8k^2.$$

Quelques exemples de faux jumeaux isocèles

Avec β et k entiers et inférieurs ou égaux à 10 on trouve déjà 45 solutions. En voici quelques-unes :

$15, 8, 8$ et $3, 14, 14$,

$35, 22, 22$ et $15, 32, 32$,

$45, 23, 23$ et $5, 43, 43$,

$91, 46, 46$ et $7, 88, 88$,

$153, 77, 77$ et $9, 149, 149$ etc.

Question plus difficile : trouver **toutes** les solutions ?

Un autre exemple de faux jumeaux ...

L'apparition de la courbe elliptique

Les triangles frères et la cubique plane

- On part d'un triangle de côtés a, b, c et on cherche x, y, z tels que :

$$p = a + b + c = x + y + z \quad \text{et}$$

$$s = (bc + ca + ab)p - 2abc = (yz + zx + xy)p - 2xyz$$

(les aires sont alors égales en vertu de la formule $16\mathcal{A}^2 = 4sp - p^4$).

Les triangles frères et la cubique plane

- On part d'un triangle de côtés a, b, c et on cherche x, y, z tels que :

$$p = a + b + c = x + y + z \quad \text{et}$$

$$s = (bc + ca + ab)p - 2abc = (yz + zx + xy)p - 2xyz$$

(les aires sont alors égales en vertu de la formule $16\mathcal{A}^2 = 4sp - p^4$).

- On cherche donc des points de la courbe de $\mathbf{R}^3$ d'équations

$$x + y + z = p \quad \text{et} \quad 2xyz - (yz + zx + xy)p + s = 0.$$

Les triangles frères et la cubique plane

- On part d'un triangle de côtés a, b, c et on cherche x, y, z tels que :

$$p = a + b + c = x + y + z \quad \text{et}$$

$$s = (bc + ca + ab)p - 2abc = (yz + zx + xy)p - 2xyz$$

(les aires sont alors égales en vertu de la formule $16\mathcal{A}^2 = 4sp - p^4$).

- On cherche donc des points de la courbe de $\mathbf{R}^3$ d'équations

$$x + y + z = p \quad \text{et} \quad 2xyz - (yz + zx + xy)p + s = 0.$$

- On se ramène au cas d'une cubique dans le plan des (x, y) en éliminant $z = p - x - y$ et on obtient :

$$F(x, y) := 2xy(x + y) - p(x^2 + y^2 + 3xy) + p^2(x + y) - s = 0.$$

La courbe elliptique

On vérifie que la courbe d'équation $F(x, y) = 0$ est une courbe lisse (donc une courbe elliptique) sauf si l'on a $p^3 = 4s$ (triangle aplati) ou $p^3 = \dfrac{27}{7}s$ (triangle équilatéral). On la note $\Gamma_{p,s}$, ou simplement Γ.

Description de la fratrie à l'aide de la courbe elliptique

Si p, s sont deux réels vérifiant $0 < \dfrac{27s}{7} < p^3 < 4s$, l'ensemble des triangles de périmètre p et d'aire donnée par $16\mathcal{A}^2 = 4sp - p^4$, modulo isoméries, est exactement la composante connexe bornée de la courbe elliptique $\Gamma_{p,s}$.
C'est un ensemble infini, ce qui montre à nouveau $(**)$. Figure Mobile

Indications de démonstration

- $F(x,y) = 2xy(x+y) - p(x^2+y^2+3xy) + p^2(x+y) - s = 0$ est une équation de degré 2 en y avec :

$$\Delta(x) = (2x-p)f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = 2x^3 - px^2 + 4s - p^3.$$

Indications de démonstration

- $F(x,y) = 2xy(x+y) - p(x^2+y^2+3xy) + p^2(x+y) - s = 0$ est une équation de degré 2 en y avec :
$$\Delta(x) = (2x-p)f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = 2x^3 - px^2 + 4s - p^3.$$
- On étudie la fonction $f(x)$ qui a trois racines réelles $\alpha < 0 < \beta < p/3 < \gamma < p/2$.

Indications de démonstration

- $F(x,y) = 2xy(x+y) - p(x^2+y^2+3xy) + p^2(x+y) - s = 0$ est une équation de degré 2 en y avec :

$$\Delta(x) = (2x-p)f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = 2x^3 - px^2 + 4s - p^3.$$

- On étudie la fonction $f(x)$ qui a trois racines réelles $\alpha < 0 < \beta < p/3 < \gamma < p/2$.
- La courbe n'a de points (x,y) que pour $x \leq \alpha$, $\beta \leq x \leq \gamma$ ou $x \geq p/2$. Seule la partie centrale correspond à des triangles.

Indications de démonstration

- $F(x,y) = 2xy(x+y) - p(x^2+y^2+3xy) + p^2(x+y) - s = 0$ est une équation de degré 2 en y avec :

$$\Delta(x) = (2x-p)f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = 2x^3 - px^2 + 4s - p^3.$$

- On étudie la fonction $f(x)$ qui a trois racines réelles $\alpha < 0 < \beta < p/3 < \gamma < p/2$.
- La courbe n'a de points (x,y) que pour $x \leq \alpha$, $\beta \leq x \leq \gamma$ ou $x \geq p/2$. Seule la partie centrale correspond à des triangles.
- Pour x entre β et γ on a deux solutions en y :

$$y = \frac{p-x}{2} + \frac{\sqrt{\Delta(x)}}{2(p-2x)} \quad \text{et} \quad z = \frac{p-x}{2} - \frac{\sqrt{\Delta(x)}}{2(p-2x)}.$$

Les solutions rationnelles et la courbe elliptique

Rappels

On part d'un triangle de côtés a, b, c, avec :

$$p = a + b + c \quad \text{et} \quad s = (bc + ca + ab)p - 2abc,$$

avec la formule $16\mathcal{A}^2 = 4sp - p^4$ et on cherche un triangle frère x, y, z donc un point de la courbe de $\mathbf{R}^3$ d'équations :

$$x + y + z = p \quad \text{et} \quad 2xyz - (yz + zx + xy)p + s = 0.$$

On se ramène au cas d'une courbe dans le plan des (x, y) en éliminant $z = p - x - y$ et on obtient la courbe elliptique Γ :

$$F(x, y) := 2xy(x + y) - p(x^2 + y^2 + 3xy) + p^2(x + y) - s = 0.$$

La courbe projective $\widehat{\Gamma}$ associée à Γ

On passe de $\Gamma = V(F)$ à $\widehat{\Gamma} = V(\widehat{F})$ par homogénéisation :

$$F(x,y) := 2xy(x+y) - p(x^2+y^2+3xy) + p^2(x+y) - s = 0,$$

$$\widehat{F}(x,y,t) = 2xy(x+y) - p(x^2+y^2+3xy)t + p^2(x+y)t^2 - st^3 = 0.$$

Il y a dans $\widehat{\Gamma}$ trois points à l'infini sont donnés par $t = 0$:

$$O = (0,1,0), \qquad I = (1,0,0) \quad \text{et} \quad J = (1,-1,0)$$

qui correspondent aux directions de l'axe des y, de l'axe des x et de la droite $y = -x$. Ce sont des points d'inflexions : la droite $x = p/2$ (asymptote) coupe la cubique en le point O triple. Figure

Les points rationnels de la courbe elliptique

- On part d'un triangle à côtés rationnels a, b, c et on cherche des triangles frères à côtés rationnels, donc des points rationnels de Γ (leur ensemble est noté $\Gamma(\mathbf{Q})$).

Les points rationnels de la courbe elliptique

- On part d'un triangle à côtés rationnels a, b, c et on cherche des triangles frères à côtés rationnels, donc des points rationnels de Γ (leur ensemble est noté $\Gamma(\mathbf{Q})$).
- Si on a deux points rationnels, on en a un troisième par la méthode de la sécante. Figure Secours

Les points rationnels de la courbe elliptique

- On part d'un triangle à côtés rationnels a, b, c et on cherche des triangles frères à côtés rationnels, donc des points rationnels de Γ (leur ensemble est noté $\Gamma(\mathbf{Q})$).
- Si on a deux points rationnels, on en a un troisième par la méthode de la sécante. Figure Secours
- Par exemple, à partir des points $A = (3, 4)$ et $B = (4, 5)$ de la courbe correspondant au triangle $3, 4, 5$ on obtient le point $E = \left(\dfrac{101}{21}, \dfrac{41}{15}\right)$ pour un triangle de troisième côté $\dfrac{156}{35}$.

Les points rationnels de la courbe elliptique

- On part d'un triangle à côtés rationnels a, b, c et on cherche des triangles frères à côtés rationnels, donc des points rationnels de Γ (leur ensemble est noté $\Gamma(\mathbf{Q})$).
- Si on a deux points rationnels, on en a un troisième par la méthode de la sécante. Figure Secours
- Par exemple, à partir des points $A = (3, 4)$ et $B = (4, 5)$ de la courbe correspondant au triangle $3, 4, 5$ on obtient le point $E = \left(\frac{101}{21}, \frac{41}{15}\right)$ pour un triangle de troisième côté $\frac{156}{35}$.
- Si on a un seul point, on en obtient un autre par la méthode de la tangente. Figure

La structure de groupe sur $\widehat{\Gamma}$

On définit une opération sur $\widehat{\Gamma}(\mathbf{Q})$ de la manière suivante.

On prend $O = (0, 1, 0)$ (l'infini dans la direction de l'axe des y) comme origine.

Si A, B sont deux points distincts de Γ, on leur associe le point $R = A \vee B$ où la droite (AB) recoupe Γ, puis le point $A + B$ où la droite (OR) recoupe Γ. Figure

Dans le cas $A = B$ on remplace la sécante par la tangente.

La structure de groupe (suite)

- On définit ainsi sur $\widehat{\Gamma}(\mathbf{Q})$ une structure de groupe abélien (le neutre est O, l'opposé d'un point P est aligné avec O et P). Figure

La structure de groupe (suite)

- On définit ainsi sur $\widehat{\Gamma}(\mathbf{Q})$ une structure de groupe abélien (le neutre est O, l'opposé d'un point P est aligné avec O et P). Figure
- Le théorème de Mordell (1922) affirme que le groupe $\widehat{\Gamma}(\mathbf{Q})$ est **de type fini**, donc produit d'un groupe abélien libre $\mathbf{Z}^r$ par un groupe abélien fini T.

La structure de groupe (suite)

- On définit ainsi sur $\widehat{\Gamma}(\mathbf{Q})$ une structure de groupe abélien (le neutre est O, l'opposé d'un point P est aligné avec O et P). Figure
- Le théorème de Mordell (1922) affirme que le groupe $\widehat{\Gamma}(\mathbf{Q})$ est **de type fini**, donc produit d'un groupe abélien libre $\mathbf{Z}^r$ par un groupe abélien fini T.
- En général, la détermination de T et surtout celle de r sont difficiles. Le calcul de r est d'ailleurs l'objet de la fameuse conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, l'un des sept problèmes du millenium.

Le résultat principal

Le résultat principal sur les triangles

Soit ABC un triangle non isocèle, $a, b, c \in \mathbf{Q}$ ses côtés, $p = a + b + c$, $s = (bc + ca + ab)p - 2abc$ et Γ la courbe elliptique associée. Alors, sauf si le triangle est un "douzain", la courbe Γ est de rang ≥ 1 (en particulier $\Gamma(\mathbf{Q})$ est infini).

On en déduit qu'il existe une infinité de triangles à côtés rationnels de même aire et même périmètre que ABC, non isométriques.

Le principe de la preuve : le théorème de Mazur

Ce théorème (pas du tout évident, datant de 1976) donne la liste de tous les sous-groupes de torsion T possibles pour une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$:

- $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n = 1, 2, \ldots, 10$ ou 12,
- $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ avec $n = 2, 4, 6$ ou 8.

On va montrer qu'il y a dans $\widehat{\Gamma}(\mathbf{Q})$ trop d'éléments pour que ce groupe soit fini, donc égal à T.

Les éléments d'ordre 3

On a vu que la courbe projective :

$$2xy(x+y) - p(x^2+y^2+3xy)t + p^2(x+y)t^2 - st^3 = 0$$

contient trois points à l'infini : l'origine $O = (0,1,0)$, $I = (1,0,0)$ et $J = (1,-1,0)$.

Comme I, J sont des points d'inflexion, ce sont des éléments d'ordre 3 du groupe.

Dans la liste de Mazur, cela élimine donc tous les cas où l'ordre du groupe n'est pas multiple de 3. Il reste $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Les permutations

Si l'on revient à la courbe de l'espace :

$$x + y + z = p \quad \text{et} \quad 2xyz - (yz + zx + xy)p + s = 0.$$

on voit que les six permutations de x, y, z la laissent stable. Si l'on a un point (a, b, c), non isocèle, sur cette courbe, on en a donc six. Revenant au plan, on obtient les points $A = (b, c)$, $B = (c, a)$, $C = (a, b)$, $A' = (b, a)$, $B' = (c, b)$ et $C' = (a, c)$.

Douze et plus ?

- À partir de A, B, C on obtient douze points distincts O, I, J ; A, B, C ; A', B', C' et $2A, 2B, 2C$. Figure

Douze et plus ?

- À partir de A, B, C on obtient douze points distincts O, I, J ; A, B, C ; A', B', C' et $2A, 2B, 2C$. Figure
- De plus, on a aussi $2A', 2B', 2C'$, mais, **attention**, ils ne sont pas nécessairement distincts de $2A, 2B, 2C$. Mobile

  Pour aborder cette question, on a besoin des formules explicites.

Le calcul du double de $A = (b, c)$

Le point $A \vee A = B \vee C$ (opposé de $2A = B + C$) a pour coordonnées (x, y, z) (dans l'espace) :

$$x = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 2a^2b - 2bc^2 + abc}{2(a-b)(c-b)},$$

$$y = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 2a^2c - 2b^2c + abc}{2(b-c)(a-c)},$$

$$z = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 2ac^2 - 2ab^2 + abc}{2(a-b)(a-c)}.$$

On passe de A à $A' = (b, a)$ en échangeant a et c, donc y et z. On voit que $2A$ et $2A'$ sont distincts, sauf si l'on a $y = z$ ou encore :

$$(b + c - a)(b - c)^3 = (a + b - c)(a - b)^3.$$

Les douzains

- On appelle **douzains** les triangles ABC qui vérifient la condition

$$(b+c-a)(b-c)^3 = (a+b-c)(a-b)^3$$

ou l'une des relations permutées.

C'est le cas du triangle de côtés $(34, 27, 13)$ car $6 \times 14^3 = 48 \times 7^3$. Figure

Ce triangle n'a pas de frère rationnel !

Les douzains

- On appelle **douzains** les triangles ABC qui vérifient la condition

$$(b+c-a)(b-c)^3 = (a+b-c)(a-b)^3$$

ou l'une des relations permutées.

C'est le cas du triangle de côtés $(34, 27, 13)$ car $6 \times 14^3 = 48 \times 7^3$. Figure

Ce triangle n'a pas de frère rationnel !

- Attention, il y a des douzains qui ont des frères rationnels ... par exemple $(69, 17, 56)$, qui a pour frère $\left(\frac{1393}{20}, \frac{163}{5}, \frac{159}{4}\right)$.

Treize à la douzaine

Si le triangle ABC n'est ni isocèle, ni un douzain, le groupe $\widehat{\Gamma}(\mathbf{Q})$ contient plus que 12 éléments, donc n'est pas réduit à son sous-groupe de torsion et le triangle a une infinité de frères rationnels.

Questions ouvertes

Une question ouverte : une infinité de douzains isolés ?

On voit facilement qu'il y a une infinité de douzains, i.e. de triangles vérifiant :

$$(b+c-a)(b-c)^3 = (a+b-c)(a-b)^3$$

par exemple ceux donnés par les formules :

$$b+c-a = q+1, \quad c+a-b = q(q^2+1), \quad a+b-c = q^3(q+1)$$

avec q entier positif, mais pour certains la courbe elliptique est de rang 1, voire plus. La question est donc :

Existe-t-il une infinité de douzains pour lesquels la courbe est de rang 0, donc n'admettant pas de frères rationnels ?

Une question ouverte : triplets entiers et rang ≥ 2 ?

Tous les exemples étudiés semblent mener à la conjecture :

S'il existe deux triangles, de même aire et même périmètre, avec deux triplets de côtés entiers **premiers entre eux** *et distincts, le rang de la courbe elliptique est ≥ 2.*

Si cette conjecture est vraie on a donc ainsi une infinité de courbes de rang ≥ 2.

Encore une, les entiers de même somme et même produit

Nous avons rencontré le problème de trouver des triplets d'entiers distincts tels que $a+b+c=x+y+z$ et $abc=xyz$.

- Comment les trouver tous ?

Encore une, les entiers de même somme et même produit

Nous avons rencontré le problème de trouver des triplets d'entiers distincts tels que $a+b+c=x+y+z$ et $abc=xyz$.

- Comment les trouver tous ?
- Il y a parfois plus qu'une solution comme avec $4, 15, 20$ où l'on a $5, 10, 24$ et $6, 8, 25$. Comment caractériser ces exemples ? Peut-on avoir un nombre de solutions aussi grand que l'on veut ?

Il faut qu'une question ouverte soit fermée : $T \simeq \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$?

Jusqu'à récemment, je ne savais pas répondre à la question suivante :

Existe-t-il des (vrais) triangles rationnels tels que le groupe de torsion de Γ *soit* $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ *?*

Depuis, j'ai trouvé un tel exemple, avec $a = 8621/19800$, $b = 739/1980$, $c = 159/2200$, voir ma page web. On n'arrête pas le progrès ...