

Fractions et décimaux

Daniel PERRIN

Introduction

Le texte qui suit est la rédaction d'une série de quatre conférences données en mars 2026 à Paris dans trois collèges et un lycée technique à l'occasion de la semaine des mathématiques. Elles ont porté sur les nombres : fractions et nombres rationnels, nombres décimaux et développements décimaux illimités (ddi), avec un accent particulier mis sur la période des ddi des rationnels, en essayant de poser, ou de faire poser par les collégiens, des questions sur ce thème et peut-être même de leur faire montrer quelques résultats.

Dans ce qui suit je reprends essentiellement dans un premier temps le texte du beamer de ma conférence avant d'apporter un certain nombre de compléments mathématiques que l'on trouvera dans les Annexes. On verra qu'il y a sur le sujet quelques questions mathématiques non triviales, voire des questions ouvertes, certaines célèbres (comme celle d'Artin) et d'autres moins (notamment une question sur une variante des nombres de Wieferich).

1 Fractions

1.1 Fractions égales ou nombres rationnels égaux ?

Un premier exemple élémentaire met en évidence la question de l'égalité en mathématiques. Quand on écrit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ on met en jeu deux sortes d'objets : les fractions, qui comportent deux nombres (le numérateur et le dénominateur). En ce sens $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ ne sont pas la même fraction. Pourtant on écrit l'égalité $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ qui signifie que le nombre déterminé par ces fractions (que l'on appelle nombre rationnel) est le même dans les deux cas. Bien sûr il faut une règle pour pouvoir affirmer qu'on a cette égalité. Elle est bien connue des collégiens, c'est le fameux **produit en croix**¹ : $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ si et seulement si $ps = qr$.

1. Comme Platon le dit avec un brin de mépris : *Les calculateurs divisent, les savants multiplient.*

1.2 Simplifier les fractions ?

Parmi toutes les écritures des nombres rationnels sous forme de fractions, il y en a une meilleure, celle sous forme de fraction irréductible : $\frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux (sans facteurs communs). On se ramène à cette écriture en “simplifiant” les fractions. Pour cela on peut décomposer numérateur et dénominateur en produits de facteurs premiers et supprimer les facteurs communs. Un exemple : combien vaut $\frac{714285}{999999}$? Réponse : c’est $\frac{714285}{999999} = \frac{3^3 \times 5 \times 11 \times 13 \times 37}{3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37} = \frac{5}{7}$! C’est mieux, non ? Mais une question se pose : pourquoi donc s’embêter avec la règle de simplification et ne pas utiliser uniquement les fractions irréductibles ?

La réponse est donnée par les contraintes des opérations. En effet, et c’est une constante en mathématiques, une notion, une forme, une écriture doit, pour être pertinente, être compatible avec le calcul, avec les opérations. Or, si l’on cherche à calculer $\frac{1}{10} + \frac{1}{6}$, il faut nécessairement trouver un dénominateur commun. Une méthode brutale est de prendre le produit : $\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{6}{60} + \frac{10}{60} = \frac{16}{60}$, mais alors on doit simplifier par 4 pour trouver la forme irréductible $\frac{4}{15}$. Même si l’on est plus malin et que l’on prend 30 comme dénominateur commun on a le même problème : $\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{3}{30} + \frac{5}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$. Cette difficulté est encore plus évidente avec la multiplication : $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Le lecteur curieux ira voir à l’annexe 5.1 pour comprendre qu’on ne peut pas se prémunir complètement de cette difficulté.

1.3 Comparaison des fractions

Quand on travaille avec les fractions il n’est pas toujours évident de les comparer. Par exemple, comment ordonner $\frac{47}{51}$, $\frac{46}{49}$, $\frac{90}{97}$. La méthode est de réduire au même dénominateur².

$$\frac{47}{51} = \frac{223391}{51 \times 49 \times 97}, \quad \frac{46}{49} = \frac{227562}{51 \times 49 \times 97}, \quad \frac{90}{97} = \frac{224910}{51 \times 49 \times 97}.$$

On voit que cette méthode est assez laborieuse !

2. Voir en 5.2 une ruse qui peut fonctionner dans certains cas.

2 Nombres décimaux

2.1 Introduction

Jusque vers 1580, on calculait avec des fractions et plus précisément on écrivait les nombres sous la forme d'un entier suivi d'une fraction plus petite que 1 (qu'on appelait un *rompu*) : par exemple on écrivait $3\frac{1}{7}$ pour $\frac{22}{7}$. Inutile de dire que comparer de tels nombres et calculer avec eux était très difficile et que seuls des experts savaient compter à cette époque. En 1585, Simon Stevin, ingénieur et mathématicien flamand (1548-1620), introduit les nombres décimaux³ dans un court texte intitulé *La disme*, voir [4]. Ce texte, destiné, selon l'auteur, *aux astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisserie, gaujeurs*⁴, *stéréométriciens en général, maîtres de monnaie et à tous marchands*, contient la définition des nombres décimaux et les règles de calcul sur ces nombres.

La notation de Stevin était quelque peu différente de la nôtre. Voici comment il écrivait 235,6783 :

$$235\textcircled{0} 6\textcircled{1} 7\textcircled{2} 8\textcircled{3} 3\textcircled{4}$$

ce que Stevin énonce *235 commencements, 6 primes, 7 secondes, 8 tierces et 3 quartes* et ce que nous dirions 235 unités, 6 dixièmes, 7 centièmes, 8 millièmes et 3 dix-millièmes.

2.2 Définition des décimaux

Rappelons, sur un exemple, ce que sont les nombres décimaux ou nombres à virgule, avec un nombre fini de chiffres derrière la virgule. Pour une définition formelle, voir 6.1.

Ainsi, 3,1416 signifie $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{6}{10000} = \frac{31416}{10000}$. On note que ces nombres peuvent s'écrire comme des fractions, ce sont donc des nombres rationnels particuliers, ceux qui s'écrivent avec un dénominateur 10, 100, ..., 10^n .

Résumons nous : un nombre décimal est un nombre rationnel qui peut s'écrire comme une fraction décimale : $\frac{p}{10^n}$. Même si le dénominateur n'est

3. Il y avait eu avant lui d'autres tentatives en ce sens, voir le très intéressant article [1] de Coquard sur le sujet.

4. Dans le texte original ce mot est écrit gaviuers avec la confusion des u et des v ainsi que des i et des j, courante à l'époque. Voir l'article III de l'appendice, page 8 de la Disme. Il s'agit des artisans tonneliers. La profession doit être la gaujerie, qu'il écrit gavierie, comme indiqué dans le paragraphe suivant sur la stéréométrie.

pas une puissance de 10 un nombre rationnel peut être décimal, par exemple $1/2 = 0,5$ car cela signifie $1/2 = 5/10$ et cette égalité résulte de la simplification. De même on a $1/5 = 2/10 = 0,2$. Précisément, une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est un décimal si q n'a pour facteurs premiers que des 2 ou des 5, voir 6.2.

2.1 Exemple.

$$\frac{23}{8} = \frac{23 \times 125}{10^3} = \frac{2875}{1000} = 2,875 \quad \text{et} \quad \frac{87}{125} = \frac{8 \times 87}{1000} = \frac{696}{1000} = 0,696.$$

2.3 Calcul avec les décimaux

2.3.1 Trouver le développement d'un décimal

Quand on a un décimal (c'est-à-dire une fraction avec seulement des 2 et des 5 en dénominateur), comment trouver son expression décimale ? Il y a la méthode précédente (mettre le dénominateur sous la forme 10^n), mais aussi la division euclidienne⁵ (qui tombe juste dans ce cas) : $\frac{23}{8} = 2,875(000\dots)$ et $\frac{87}{125} = 0,696(000\dots)$.

2.3.2 Comparaison et opérations

1) La comparaison des décimaux est facile. Attention, il faut toutefois qu'on ait le même nombre de chiffres derrière la virgule. Par exemple, pour comparer 0,92156, 0,938 et 0,9278 on met tout en cent-millièmes : 0,92156, 0,93800 et 0,92780 et on a :

$$0,92156 < 0,92780 < 0,93800.$$

Une autre méthode est d'utiliser les encadrements : $0,92156 < 0,922 < 0,927 < 0,9278 < 0,93 < 0,938$.

2) Additions et multiplications se font comme dans les entiers. Il suffit de faire attention à la place de la virgule, donc au dénominateur. Par exemple : $0,92156 + 0,938 = 1,85956$, $0,92156 \times 0,938 = 0,86442328$.

3) **Attention**, la division est plus délicate et nous allons y revenir en 7.1. Déjà un exemple⁶ : si l'on effectue la division de 47 par 51 en l'arrêtant à 0,921 on obtient l'encadrement $0,921 < 47/51 < 0,922$.

5. Dans l'exposé oral, j'ai considéré que les collégiens savaient faire les divisions de décimaux. Pour des précisions théoriques sur cet algorithme – pas si simple – voir ci-dessous 7.1.

6. Explicité dans l'exposé oral.

2.3.3 Une application à l'ordre

On vient de voir qu'on a $0,921 < \frac{47}{51} < 0,922$. De même on a $0,938 < \frac{46}{49} < 0,939$, $0,927 < \frac{90}{97} < 0,928$. Cela donne aussitôt l'ordre entre ces trois nombres et on retrouve $\frac{47}{51} < \frac{90}{97} < \frac{46}{49}$.

2.4 Conclusion : un progrès immense

Les nombres décimaux ont deux avantages :

- Ils s'écrivent comme les entiers en écriture décimale, ce qui permet de les comparer facilement et de faire toutes les opérations, dès l'école et le collège.
- Ils sont assez nombreux pour approcher tous les nombres (réels) aussi près que l'on veut. Par exemple on a :

$$3,1415926535 < \pi < 3,1415926536.$$

Grâce à Stevin, les collégiens d'aujourd'hui sont plus savants que les Grecs car ils connaissent les nombres décimaux qui leur permettent de faire des calculs que seuls les savants étaient capables de faire autrefois. Je considère, pour ma part, que cette invention constitue un progrès colossal pour l'humanité. D'ailleurs c'est à la suite de cette invention que Newton et Leibniz ont pu inventer le calcul infinitésimal⁷.

3 Les développements décimaux illimités

3.1 Introduction

On a vu la définition des décimaux : les rationnels dont un dénominateur est de la forme 10^n et, inversement, le fait qu'un rationnel dont le dénominateur est de la forme $2^\alpha 5^\beta$ est un décimal.

On admet qu'on sait faire des divisions, y compris avec des chiffres derrière la virgule, voir 7.1 ci-dessous pour une justification. On a vu ci-dessus que cela permet de trouver les chiffres après la virgule d'un décimal par division.

On se pose maintenant la question des autres, ceux dont le dénominateur n'est pas seulement formé de 2 et de 5, à commencer par $1/3$. On fait la division et on voit bien qu'elle ne s'arrête jamais, contrairement au cas décimal.

7. Pour en être convaincu, on conseille de parcourir les œuvres d'Euler (1707-1783) qui utilise les décimaux à profusion.

On dit alors que $1/3$ admet un **développement décimal illimité**, en abrégé ddi, et on écrit :

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots 333 \dots 333 \dots$$

en n'oubliant pas les trois petits points de la fin qui signifient que ce développement continue à l'infini.

Nous venons de rencontrer des développements décimaux illimités, c'est-à-dire des nombres avec une infinité de chiffres derrière la virgule, par exemple ⁸ :

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751...

Nous allons admettre que toutes ces écritures définissent bien des nombres et qu'on peut écrire tous les nombres (réels) ainsi, voir 7.4. Notre but est de comprendre certaines propriétés de ces écritures et, si possible, de les prouver.

3.2 Les ddi, l'ordre et le calcul

3.2.1 L'ordre

L'un des intérêts majeurs des ddi est que l'ordre est très facile à décrire :

3.1 Proposition. *Soient $x = c_1 \dots c_r, a_1 \dots a_n \dots$ et $y = d_1 \dots d_s, b_1 \dots b_n \dots$ deux réels définis par leurs ddi. On a $x \leq y$ dans les cas suivants :*

- 1) *Si l'on a $c_1 \dots c_r < d_1 \dots d_s$ sur les parties entières.*
- 2) *Si $c_1 \dots c_r = d_1 \dots d_s$, $a_i = b_i$ pour $i \leq n$ et $a_{n+1} < b_{n+1}$.*

Pour des détails sur ce point voir 7.9.

3.2.2 L'introduction des opérations avec des collégiens

On a vu que sur les ddi, l'ordre est assez naturel. Il n'en est pas de même pour les opérations. En effet, même avec les ddi les plus simples, elles ne sont pas faciles. Par exemple, que vaut $0,444 \dots + 0,777 \dots$. Attention, si l'on essaie de faire le calcul, il faut être conscient qu'il y a des retenues jusqu'à l'infini⁹. Mais c'est bien pire¹⁰ encore pour $0,444 \dots \times 0,777 \dots$.

Il y a pourtant une opération vraiment facile avec les ddi c'est de les multiplier par 10. Commençons par le cas des décimaux. Par exemple, considérons

8. Bien sûr on reconnaît le début du ddi de π .

9. Ici un peu de bon sens permet de trouver le résultat : on a $4 + 7 = 11$ mais avec une retenue depuis l'origine, donc un 2 partout, sauf au dernier cran, ce qui donne $1,222 \dots$. On retrouvera ce résultat plus loin.

10. Même en faisant le calcul approché, il faut mettre beaucoup de 4 et de 7 pour voir surgir la période du produit.

$x = 0,237$. Cela signifie que x c'est 2 dixièmes, plus 3 centièmes, puis 7 millièmes. Si l'on multiplie par 10, les dixièmes deviennent des unités, les centièmes des dixièmes et les millièmes des centièmes. On a donc $10 \times 0,237 = 2,37$. Cette procédure fonctionne même s'il y a une infinité de chiffres derrière la virgule. Voici le résultat :

3.2 Proposition. Soit $A = 0,a_1 \dots a_n \dots$ un réel défini par son ddi. On a $10A = a_1,a_2 \dots a_n \dots$

Voir des précisions en 7.5. Cela permet d'énoncer une règle :

Règle Si $x = 0,abcd \dots$, on a $10x = a,bcd \dots$: on décale simplement la virgule (ou le point) d'un cran vers la droite.

3.3 Exemples. 1) Revenons à l'exemple vu ci-dessus. On a dit que $0,444 \dots$ et $0,777 \dots$ sont des nombres, donc on doit bien pouvoir les calculer, non ? C'est vrai et c'est la magie de l'algèbre ! **On donne un nom** au nombre cherché : $x = 0,444 \dots$. Puis on lui applique la seule chose qu'on sait faire : multiplier par 10. On a $10x = 4,444 \dots$. Là, on voit qu'on a $10x = 4 + x$, donc $9x = 4$ et $x = \frac{4}{9}$ comme le lecteur le vérifiera en faisant la division.

De même on a $0,777 \dots = \frac{7}{9}$. On peut maintenant calculer la somme de ces nombres qui vaut $11/9 = 1,222 \dots 222 \dots$ comme on l'avait subodoré. Quand au produit, c'est $28/81$, ou encore $0,345679012 \dots$

2) Dans la même veine, on peut se demander combien vaut $x = 0,999 \dots$, avec une infinité de 9 ? Qu'en pensez-vous ?

Réponse : on a $x = 1$ (je dis bien égal et pas presque 1). Voici deux arguments élémentaires pour s'en convaincre (voir 7.6 pour une preuve plus sophistiquée). D'abord la méthode précédente : on pose $x = 0,999 \dots$. On calcule $10x$. C'est $9,999 \dots$, donc $9 + x$. Mais $10x = 9 + x$ donne $9x = 9$ et $x = 1$. Une autre preuve consiste à partir du ddi de $1/3$: $1/3 = 0,333 \dots$. On peut multiplier ce nombre par 3 on obtient bien $1 = 0,999 \dots$ car ici il n'y a pas de retenue.

4 La périodicité des ddi : une découverte et mille et une questions

4.1 Introduction avec les élèves

Dans les conférences j'ai fait au tableau la division de 1 par 7 en donnant aux élèves la consigne de m'arrêter quand ils ont compris ce qui se passe. La constatation qui surgit est que ce développement se répète : on trouve $1/7 =$

0,142857142857142857.... C'est simplement un exercice de formulation qui permet d'introduire les mots de période et longueur de période.

4.2 Pourquoi et comment poser des questions ?

Après la constatation de la période des septièmes, il est temps de se poser des questions. Ce qui justifie cette phase du travail est une certaine conception philosophique des mathématiques et plus généralement de la démarche scientifique comme le dit le philosophe Gaston Bachelard (1884-1962) :

Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique.

En ce qui me concerne j'énonce souvent une variante de ce principe :

Faire des mathématiques c'est poser des problèmes et, si possible, les résoudre.

À partir de maintenant, ce sont les collégiens qui travaillent, comme des mathématiciennes ou des mathématiciens, en posant les questions que leur suggère l'expérience des septièmes et d'autres que l'on peut faire à la main, à la calculatrice, ou avec un logiciel de calcul (on a utilisé le logiciel *SAGE*). Dans cette phase, il ne faut pas avoir peur de dire des bêtises. Voici ce que dit Alexandre Grothendieck (1928-2014), l'un des plus grands mathématiciens du XX-ième siècle.

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".

4.3 Une première liste de questions

Voici une première liste des questions "naturelles" dont on attend qu'elles émergent. Dès que ces questions-affirmations sont posées on peut essayer d'y répondre de manière positive en donnant des arguments, ou négative en produisant des contre-exemples.

4.3.1 La première question

- Le ddi d'un nombre rationnel p/q est-il toujours périodique ?

Ici la réponse est facile et inattaquable. Quand on effectue la division de p par q il y a un nombre fini de restes possibles : 0 (mais si l'on trouve un reste nul la division "tombe juste" et le développement s'arrête) ou $1, 2, \dots, q - 1$. Quand on retrouve un reste déjà vu on refait la même série de divisions et c'est cela qui prouve l'existence de la période.

4.3.2 Le travail du mathématicien

Ce premier succès conduit à énoncer quelques principes qui gouvernent le travail d'un mathématicien. Quand on est face à un problème inconnu une procédure pour l'aborder est la suivante :

1) On regarde des exemples pour se faire une idée. Plus précisément, je conseille toujours de regarder le **premier exemple non trivial**, c'est-à-dire le premier où la réponse n'est pas évidente.

2) Sur ces exemples un point essentiel consiste à **formuler** ce que l'on voit, ce dont on est sûr, ce qu'on pense.

3) Un point fondamental ensuite (qui caractérise l'attitude du mathématicien) est sa capacité de **généraliser** ce qu'il a vu sur des exemples pour en induire ce qui se passe dans le cas général. C'est la phase des **conjectures**, avec des allers et retours vers l'expérience pour les confirmer ou les infirmer.

4) Enfin, et c'est le propre des mathématiques, il reste à **démontrer** les propriétés que l'on a vues. C'est souvent un gros travail pour lequel il faut disposer d'une bonne technique (c'est ce que l'on commence à apprendre au collège et au lycée).

4.3.3 Une question plus difficile : la longueur de la période

Lorsque l'on s'est convaincu de l'existence de la période du ddi d'un nombre rationnel, une foule d'autres questions se posent, à commencer par :

- Quelle est la longueur de la période ?

Cette question, bien naturelle, est beaucoup plus difficile et va donner lieu à des conjectures fausses, des rectifications pas toujours suffisantes, etc.

Il y a tout de même un résultat clair : la longueur de la période d'une fraction p/q irréductible est $\leq q - 1$. En effet, comme on l'a vu ci-dessus, il y a $q - 1$ restes possibles (si l'on exclut le reste 0 qui correspond au cas où la division tombe juste).

• La conjecture la plus naturelle est alors : le ddi de la fraction irréductible p/q a une période de longueur $q - 1$. En disant cela on a appliqué la méthode

Grothendieck : *Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence.*

De fait, ici, cette affirmation est très fausse et l'on a beaucoup de contre-exemples, même en se limitant à des dénominateurs premiers : $1/3 = 0,333\dots$, la période est de longueur 1 et non pas $2 = 3 - 1$, $4/11 = 0,363636\dots$ la période est de longueur 2 et non 10, $5/13 = 0,384615384615\dots$ la période est de 6 et non de 12.

Il arrive cependant que la période soit bien égale à $q - 1$, par exemple :

$$13/17 = 0,764705882352941176470588235294117647058823529411\dots$$

- Toujours en suivant Grothendieck, en regardant les exemples ci-dessus, on peut revenir à la charge *avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque"*. Les exemples ci-dessus pourraient suggérer : la période du ddi de p/q est un diviseur de $q - 1$?

Hélas, cette conjecture est encore fausse comme le montre l'exemple suivant $\frac{8}{21} = 0,380952380952\dots$

4.3.4 L'erreur en mathématiques

Avant d'aller se jeter à l'eau il convient de faire encore appel à notre maître. Voilà ce qu'il dit, un peu plus loin :

Mais il arrive aussi que cette image [de la situation] est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. ... Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse est souvent marqué par une tension croissante au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction, d'abord vague, puis de plus en plus criante jusqu'au moment où elle éclate avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense.

La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.

4.3.5 Mon expérience personnelle

C'est une histoire spectaculaire : dans les travaux sur les courbes gauches que nous menions, Mireille Martin-Deschamps et moi-même, nous avons cru prouver qu'un certain objet, appelé schéma de Hilbert et noté $H_{d,g}$ n'était "**presque**" **jamais connexe**. La démonstration était écrite, soumise à une excellente revue, contrôlée par un rapporteur, acceptée, mais heureusement

pas encore parue. Pourtant, en étudiant plus à fond un exemple précis, le premier exemple non trivial : $H_{4,0}$, nous avons montré qu'il était connexe, contrairement à ce que nous affirmions. Il nous a fallu quelques jours pour admettre notre erreur et quelque temps encore pour comprendre où était la faute dans la démonstration.

L'intérêt de cette erreur c'est qu'elle était révélatrice d'une conception erronée sur l'objet en question, fondée sur une connaissance trop fragmentaire des exemples. La preuve en est que, passant d'un extrême à l'autre, nous pensons maintenant que le schéma de Hilbert est **toujours** connexe (mais ce problème est toujours ouvert).

4.4 Changer son fusil d'épaule

4.4.1 Une autre question

En mathématiques, lorsqu'on se heurte à une difficulté importante, il est parfois plus malin de la contourner plutôt que de l'attaquer de front. Laissons donc tomber provisoirement la question de la longueur de la période pour aborder d'autres questions. Il y en a encore beaucoup, mais l'une d'elles est importante : elle revient à prendre le problème par l'autre bout, au lieu de se demander quel est le ddi d'un rationnel, on peut essayer de voir quel rationnel correspond à un ddi donné, si tant est qu'il y en ait effectivement un. Nous avons déjà abordé ce problème avec succès dans le cas de $0,444\dots$ en utilisant l'opération magique qui consiste à multiplier par 10. Essayons donc de trouver à quoi correspondent les développements suivants :

$$0,34\ 34\ 34\dots \quad 0,235\ 235\ 235\dots \quad 0,5247\ 5247\ 5247\dots$$

4.4.2 Et sa réponse

La méthode est presque la même. Si la période est de longueur 2 on multiplie par 100, pour faire sortir une période. On pose $x = 0,34\ 34\ 34\dots$. On a $100x = 34,34\ 34\ 34\dots = 34 + x$, donc $99x = 34$ et $x = \frac{34}{99}$. De même, on trouve $0,235\ 235\ 235\dots = \frac{235}{999}$ et $0,5247\ 5247\ 5247\dots = \frac{5247}{9999}$. Dans ce dernier cas on peut simplifier la fraction en divisant haut et bas par 99 et on a $0,5247\ 5247\ 5247\dots = \frac{53}{101}$.

On peut généraliser ce résultat en énonçant la magnifique égalité suivante :

$$0, \color{red}{a_1 a_2 \dots a_n a_1 a_2 \dots a_n a_1 a_2 \dots a_n \dots} = \frac{\color{red}{a_1 a_2 \dots a_n}}{\color{red}{99 \dots 999}}$$

avec n chiffres 9. Bien sûr il reste à simplifier cette fraction.

4.1 Remarque. Attention, si la période commence par un ou plusieurs zéros, on les retrouve dans le numérateur de la fraction $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{99 \dots 999}$ et, bien sûr, là, on peut les supprimer.

4.4.3 Les queneufs

On vient de voir apparaître les nombres de la forme $999 \dots 999$ (que je propose d'appeler les *queneufs*¹¹) et ce serait bien de savoir les factoriser en vue des simplifications des fractions. On le fait : $9 = 3 \times 3$, $99 = 3^2 \times 11$, $999 = 3^3 \times 37$, $9999 = 3^2 \times 11 \times 101$, $99999 = 3^2 \times 41 \times 271$, $999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$, etc.

Cela permet de simplifier les fractions obtenues à partir de leurs ddi, par exemple : $0,490347\ 490347\ 490347\dots = \frac{490347}{999999} = \frac{3^3 \times 11 \times 13 \times 127}{3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37} = \frac{127}{7 \times 37} = \frac{127}{259}$.

4.4.4 Et si on réfléchissait ?

Si l'on considère la fraction $1/q$ avec q impair et non multiple de 5, que peut-on en dire ? Elle admet un ddi de période de longueur¹² $\leq q - 1$: $1/q = 0, a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots$. Par exemple on a

$$\frac{1}{73} = 0,01369863\ 01369863\ 01369863 \dots$$

Cela donne une belle formule : $\frac{1}{q} = \frac{a_1 \dots a_n}{999 \dots 999}$ avec n chiffres 9. Dans notre exemple $\frac{1}{73} = \frac{1369863}{99999999}$. En écrivant le produit en croix on obtient $999 \dots 999 = q \times a_1 \dots a_n$. Ici : $99999999 = 73 \times 1369863$. On vient de montrer une chose remarquable : **n'importe quel nombre q divise toujours un nombre de la forme $999 \dots 999$ avec n chiffres 9 où n est la longueur de la période de $1/q$.**

4.4.5 Le théorème fondamental sur les longueurs des périodes

En fait on a montré le théorème suivant qui permet de répondre à la question de la longueur des périodes :

11. Parce que je trouve que ça fait gâteau breton, non ?

12. Nous admettrons qu'il commence tout de suite après la virgule, voir 8.10 pour des précisions.

4.2 Théorème. Soit q un entier impair et non multiple de 5. Le nombre q divise un nombre de la forme $999\dots 999$ avec n chiffres 9 et le plus petit n ainsi est la longueur de la période de $1/q$.

Démonstration. On a vu que si l'on a une période de longueur n , q divise $999\dots 999$ avec n chiffres 9. Inversement, si q divise $999\dots 999$ on a $999\dots 999 = q \times a_1\dots a_n$ donc $\frac{1}{q} = \frac{a_1\dots a_n}{999\dots 999}$ et on sait que cela signifie¹³

$$\frac{p}{q} = 0,a_1\dots a_n a_1\dots a_n \dots$$

4.4.6 Des exemples

En utilisant les factorisations des queneufs $999\dots 999$ on trouve des exemples de nombres avec des périodes courtes : $1/37 = 0,027\,027\,027\dots$, $1/101 = 0,0099\,0099\,0099\dots$, $1/41 = 0,02439\,02439\dots$, $1/13 = 0,076923\,076923\dots$, etc.

4.5 La période des septièmes

On a vu qu'on avait $1/7 = 0,142857\,142857\dots$. On se demande maintenant quelle est la période de $2/7$, $3/7$, etc. voire de n'importe quelle fraction de dénominateur 7 par exemple $46/7$?

Pour cela nous allons utiliser une fois encore notre arme secrète : la multiplication par 10. On a $\frac{10}{7} = 1,428571428571\dots$. Mais ce nombre n'est

autre que $1 + \frac{3}{7}$ ce qui donne $\frac{3}{7} = 0,428571428571\dots$. On continue avec $\frac{30}{7} = 4,285714\,285714\dots = 4 + 2/7$, d'où $\frac{2}{7} = 0,285714\,285714\dots$

On obtient ainsi les ddi de $1/7, \dots, 6/7$ en partant du ddi de $1/7$ et en le commençant à un autre chiffre : les fractions $1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7$ s'obtiennent à partir du ddi de $1/7$ en commençant par ses chiffres pris dans l'ordre croissant : 1, 2, 4, 5, 7, 8. Par exemple, on a $4/7 = 0,428571\,428571\dots$. Cela permet même de répondre à un problème défi : on se donne n'importe quelle fraction de dénominateur 7, trouver instantanément son ddi.

Par exemple pour $\frac{46}{7}$ on effectue la division par 7, $46 = 6 \times 7 + 4$, donc $46/7 = 6 + 4/7$, mais on a vu comment calculer $4/7$ et on a donc $46/7 = 6,428571\,428571\dots$

13. Attention, *a priori*, le quotient de $999\dots 999$ (avec n chiffres) par q n'a peut-être pas n chiffres. Par exemple $999/37 = 27$ n'a que deux chiffres. Dans ce cas, pour avoir la période il faut ajouter des 0 devant ce quotient pour avoir n chiffres en tout, ici 027.

4.6 Toujours des questions

Il y a encore beaucoup d'autres questions sur les ddi que vous pourrez regarder tranquillement si ça vous intéresse, voir aussi 8.25, 8.27 et l'annexe 8.8.

- On a vu la longueur de la période de $1/q$ en termes de queneufs. Mais quelle est celle des autres p/q ? Et quels sont leurs ddi?

- Si q est premier, la longueur de la période de p/q divise-t-elle $q - 1$? Et sinon?

- Que se passe-t-il si q a des facteurs 2 ou 5, par exemple on a $\frac{37}{208} = 0,1778\ 846153\ 846153\ 846153\dots$ et la période n'apparaît pas tout de suite, pourquoi?

Attention, les annexes qui suivent ne sont pas, en général, du niveau d'un collégien ni même d'un lycéen. Elles visent à étayer le fondement mathématique de cette conférence.

5 Annexe 1 : les fractions

Pour les définitions concernant les fractions et une discussion sur ces concepts on renvoie à [3], Chapitre 2.

5.1 Addition

Pour éviter la difficulté de la nécessité de la simplification dans les opérations, on aurait envie de prouver le lemme suivant :

5.1 Lemme. Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ deux fractions irréductibles et soit $d = \text{pgcd}(q, s)$ et $m = \text{ppcm}(q, s)$. On pose $q = dq'$, $s = ds'$ avec $q' \wedge s' = 1$, d'où $m = dq's'$. Alors, on a $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps' + rq'}{m}$ et cette fraction est irréductible.

Malheureusement, ce lemme est faux. Voici un contre-exemple : $\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{3}{30} + \frac{5}{30} = \frac{8}{30}$ et cette fraction n'est pas irréductible (c'est $\frac{4}{15}$). Autrement dit, même si l'on prend toutes les précautions, on a besoin de la simplification.

5.2 Comparaison

Voici une ruse pour comparer des fractions sans réduire au même dénominateur. Bien sûr, elle nécessite avec quelques précautions ... :

5.2 Lemme. (Règle du dernier lapin) Soit $r = \frac{a}{b}$ une fraction que l'on modifie en diminuant numérateur et dénominateur en $r' = \frac{a'}{b'} := \frac{a-p}{b-q}$. Si a et b sont "du même ordre de grandeur" et grands par rapport à p, q et si $p < q$ (resp. $p > q$) on a $r < r'$ (resp. $r > r'$).

Démonstration. L'inégalité $r < r'$ équivaut à $a(b-q) < b(a-p)$ soit $-aq < -bp$ ou encore $aq > bp$. C'est bien le cas si $q > p$ car a et b sont du même ordre.

Appliquons cette règle aux fractions vues ci-dessus : $\frac{47}{51}, \frac{46}{49}, \frac{90}{97}$.

Pour passer de $47/51$ à $46/49$ on diminue N de 1 et D de 2 : ça augmente. Pour comparer à $90/97$ on multiplie haut et bas par 2. Avec $47/51 = 94/102$ on diminue N de 4 et D de 5 : ça augmente. Avec $46/49 = 92/98$ on diminue N de 2 et D de 1 : ça diminue !!

6 Annexe 2 : les décimaux

Voici une définition formelle des décimaux :

6.1 Définition. Soit b un entier ≥ 0 et $a_1 \dots a_n$ des chiffres (c'est-à-dire des entiers compris entre 0 et 9). On note $b, a_1 \dots a_n$ le nombre $b + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}$ et on dit que c'est un **nombre décimal**.

Tout décimal est un rationnel mais la réciproque est évidemment fautive. Voici la caractérisation des décimaux parmi les rationnels :

6.2 Proposition. Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible avec $p, q > 0$. Alors p/q est un décimal si et seulement si q est de la forme $2^\alpha 5^\beta$ avec $\alpha, \beta \geq 0$.

Démonstration. Si p/q est décimal on a $p/q = r/10^n$ donc $p10^n = rq$ et Gauss montre que q divise 10^n d'où le résultat. Inversement, si $q = 2^\alpha 5^\beta$ avec, par exemple, $\alpha \leq \beta$, on a $p/q = p2^{\beta-\alpha}/10^\beta$.

7 Annexe 3 : développements décimaux illimités

On utilisera l'abréviation ddi pour *développement décimal illimité*. On appelle *chiffre* un entier compris entre 0 et 9.

7.1 Le ddi d'un rationnel

7.1.1 L'algorithme

On définit ci-dessous l'algorithme de division euclidienne généralisée des entiers. Elle est généralisée car ses résultats sont des nombres décimaux. C'est un point qui est censé être connu des collégiens, mais dont la mise en forme n'est pas si évidente. Un exercice révélateur à ce sujet est d'écrire un programme effectuant cette opération.

Le résultat est le suivant :

7.1 Théorème. Soit $R = \frac{p}{q}$ une fraction irréductible, avec p, q positifs et soit $n \in \mathbf{N}$. Il existe un entier $b \in \mathbf{N}$, des chiffres b_1, \dots, b_n et un entier r_n vérifiant $0 \leq r_n < q$, uniques, tels que l'on ait $\frac{p}{q} = b + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n q}$ (formule (#)).

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$ on effectue la division euclidienne de p par q : $p = bq + r$ avec $b, r \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r < q$, ce qui donne le résultat avec $r_0 = r$.

Passons de n à $n+1$. On part de la formule au cran n et on divise $10r_n$ par q : on a $10r_n = qb_{n+1} + r_{n+1}$ avec $0 \leq r_{n+1} < q$. Comme on a $r_n < q$, il s'ensuit que b_{n+1} est < 10 , donc un chiffre. On obtient $\frac{r_n}{10^n q} = \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1}q}$ ce qui donne la formule annoncée. Pour montrer l'unicité, on note que l'égalité précédente est conséquence de la formule (#) appliquée au rang $n+1$ et qu'elle induit l'écriture de $10r_n$ comme division euclidienne. L'unicité résulte alors de celle de la division euclidienne.

7.2 Corollaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) Le nombre R est décimal.
- 2) Il existe n tel que $b_{n+1} = 0$.
- 3) Il existe n tel que $r_n = 0$.

Démonstration. L'équivalence de 2) et 3) vient de la formule $10r_n = qb_{n+1} + r_{n+1}$. Celle de 1) et 3) vient de la formule (#).

7.1.2 Convergence du ddi

La proposition suivante est immédiate :

7.3 Proposition-Définition. *On reprend les notations de 7.1. On pose $R_n = b + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{10^k}$ dans la formule (#). Alors, la suite (R_n) est croissante et converge vers R . On écrit, à la limite, $R = b, b_1 \dots b_n \dots$*

7.2 Les réels et les ddi

7.2.1 La convergence

Dans ce paragraphe on suppose qu'on connaît les nombres réels, par exemple par une définition axiomatique, voir [3] Chapitre 3 au besoin.

7.4 Proposition. *1) Soient a_1, \dots, a_n, \dots une suite de chiffres compris entre 0 et 9. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}$. Alors la suite A_n est croissante et a une limite A que l'on note $A = 0, a_1 \dots a_n \dots$*

2) Si b est un entier écrit en base 10 : $b = \sum_{k=0}^r b_k 10^k = b_r \dots b_1 b_0$, et si a_1, \dots, a_n, \dots est une suite de chiffres compris entre 0 et 9 on note, avec les notations de 1), $b_r \dots b_1 b_0, a_1 \dots a_n \dots$ le réel $b + A$.

Démonstration. 1) On a affaire à une série convergente car majorée par 1. On notera qu'ici on utilise un argument de complétude de \mathbf{R} .

7.2.2 L'opération magique

Il n'est pas facile de calculer avec les ddi. Il y a toutefois une opération facile, que nous allons utiliser dans tous les sens : la multiplication par 10.

7.5 Lemme. *Soit x un nombre réel écrit $x = b_r \dots b_1 b_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. On a la formule $10x = b_r \dots b_1 b_0 a_1, a_2 \dots a_n \dots$*

7.2.3 Les 9 et les développements impropres

7.6 Proposition. *1) Le nombre réel $0.999 \dots 999 \dots$ dont le ddi ne comprend que des 9 est égal à 1.*

2) Le nombre réel x dont le ddi est de la forme :

$$x = b_r \dots b_1 b_0, a_1 a_2 \dots a_n 999 \dots 999 \dots$$

avec des chiffres tous égaux à 9 à partir d'un certain rang et $a_n \neq 9$ est égal à $b_r \dots b_1 b_0, a_1 a_2 \dots (a_n + 1)$. C'est un nombre décimal. On dit que le développement de x est **impropre**. Dans le cas contraire on dit que le ddi est **propre**.

Démonstration. Le point 1) a été vu en 3.3 et le point 2) en est une conséquence facile. Pour le point 1) on peut aussi noter qu'on a $x = 9 \times 0,111 \dots 111 \dots$, que ce dernier nombre n'est autre que $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}$ et que la formule de la somme de la série géométrique donne $x = \frac{1}{10-1} = \frac{1}{9}$ d'où le résultat.

7.2.4 Existence et unicité du ddi d'un réel

Le résultat fondamental est alors le suivant :

7.7 Théorème. *Tout nombre réel x positif s'écrit de manière unique sous la forme $x = b_r \dots b_1 b_0, a_1 a_2 \dots$ où les b_j et les a_i sont des chiffres, ce ddi étant supposé propre (c'est-à-dire que les a_i ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang).*

Démonstration. Voir [3] Chapitre 3.

7.8 Corollaire. *L'ensemble des réels n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Si \mathbf{R} était dénombrable on pourrait énumérer les réels de $]0, 1[: x_1, \dots, x_n, \dots$, chaque x_i admettant un ddi propre $x_i = 0, a_{i1} a_{i2} \dots a_{in} \dots$. On considère alors le réel $y = 0, y_1 \dots y_n \dots$ de $]0, 1[$ construit de la manière suivante : on prend pour y_1 un chiffre distinct de a_{11} et de 9, pour y_2 un chiffre distinct de a_{22} et de 9, etc., pour y_n un chiffre distinct de a_{nn} et de 9, etc. Alors, le ddi de y est propre et y est distinct de tous les x_i : il est différent de x_1 à cause du premier chiffre, de x_2 à cause du deuxième, etc. de x_n à cause du n -ième, etc.

7.2.5 L'ordre des réels au moyen des ddi

La proposition suivante a été annoncée ci-dessus.

7.9 Proposition. *Soient $x = c_1 \dots c_r, a_1 \dots a_n \dots$ et $y = d_1 \dots d_s, b_1 \dots b_n \dots$ deux réels définis par leurs ddi. On a $x \leq y$ dans les cas suivants :*

- 1) *Si l'on a $c_1 \dots c_r < d_1 \dots d_s$ sur les parties entières.*
- 2) *Si l'on a $c_1 \dots c_r = d_1 \dots d_s$, $a_i = b_i$ pour $i \leq n$ et $a_{n+1} < b_{n+1}$.*

Démonstration. Le lemme crucial est le suivant :

7.10 Lemme. Soit x un réel et $0, a_1 \dots a_n \dots$ son ddi. On suppose que tous les a_i ne sont pas égaux à 9. Alors on a $x < 1$.

Démonstration. En effet, si a_n est < 9 , on a $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1$.

Ce lemme implique 7.9. Traitons par exemple le point 2). Posons $z = c_1 \dots c_r, a_1 \dots a_n$. On a $x = z + 0,000 \dots 00 a_{n+1} a_{n+2} \dots := z + t$ et $y = z + 0,000 \dots 00 b_{n+1} b_{n+2} \dots := z + u$ avec n chiffres 0. Mais on a $10^{n+1} t = a_{n+1}, a_{n+2} \dots < a_{n+1} + 1 \leq 10^{n+1} u = b_{n+1}, b_{n+2} \dots$ d'où $t < u$ puis $x < y$.

8 Rationnels et ddi périodiques

8.1 La périodicité

Le théorème suivant est conséquence de l'algorithme de division 7.1 :

8.1 Théorème. Soit p/q un nombre rationnel positif écrit sous forme irréductible. Alors, son ddi est périodique et la longueur de la période est d'au plus $q - 1$

Démonstration. Le cas décimal est évident avec la période 0, de longueur 1 car on peut l'écrire $p/q = b, b_1 \dots b_n 000 \dots 000 \dots$. Sinon, on applique l'algorithme de division à p/q et considère les restes r_1, \dots, r_n, \dots . On sait que tous sont compris entre 0 et $q - 1$. Si l'un des restes est nul, disons r_n , on a $p/q = b, b_1 \dots b_n$ par la formule (#) et p/q est un décimal. Si aucun r_n n'est nul, comme il n'y a que $q - 1$ restes possibles, quand n croît on a nécessairement deux restes égaux : $r_k = r_l$ avec $k < l$ et $l - k \leq q - 1$. Mais alors, tous les b_i (resp. r_i) avec $k + 1 \leq i \leq l$ sont égaux aux b_j (resp. r_j) avec $l + 1 \leq j \leq l + (l - k)$ car les divisions que l'on effectue sont les mêmes.

8.2 Identification des ddi périodiques

Inversement, les réels définis par des ddi périodiques sont les rationnels comme le montre le résultat suivant :

8.2 Théorème-Définition. 1) Soit $x = 0, a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots$ un ddi périodique propre. Alors x est rationnel et on a $x = \frac{a_1 \dots a_n}{999 \dots 999}$ avec n chiffres 9 en dénominateur. Ce rationnel est égal à une fraction irréductible p/q avec q premier à 10.

2) On suppose que le ddi de x est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que l'on a :

$$x = b, b_1 \dots b_m a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots$$

où b est un entier, où m et n sont ≥ 1 et où les b_i et les a_j sont des chiffres avec $b_m \neq a_n$. Alors on a la formule :

$$x = \frac{10^m b \times 999 \dots 999 + b_1 \dots b_m \times 999 \dots 999 + a_1 \dots a_n}{999 \dots 999 \times 10^m}$$

où les $999 \dots 999$ ont n chiffres 9. Le nombre x est un nombre rationnel dont l'écriture sous forme de fraction irréductible $x = p/q$ est telle que q est multiple de 2 ou de 5.

Démonstration. 1) On multiplie par 10^n pour sortir une période : $10^n x = a_1 \dots a_n + x$ et l'on a $x = a_1 \dots a_n / (10^n - 1)$ et le résultat.

2) La méthode est la même en multipliant par 10^m puis par 10^n . Pour avoir l'assertion concernant 2 ou 5 il s'agit de montrer que 10^m ne divise par le numérateur N . Or celui-ci s'écrit, en posant $p = b_1 \dots b_m$ et $a = a_1 \dots a_n$, $N = 10^m(10^n - 1)b + p \times 10^n + a - p$. Si 10^m divise N , 10 divise $a - p = a_1 \dots a_n - b_1 \dots b_m$ et cela implique $a_n = b_m$.

8.3 Remarques. 1) Dans le point 1), si la période $a_1 \dots a_n$ commence par un ou plusieurs chiffres 0, on peut évidemment les supprimer dans le numérateur de la fraction $\frac{a_1 \dots a_n}{999 \dots 999}$.

2) Il y a une petite subtilité dans le point 2), mais l'hypothèse $b_m \neq a_n$ est innocente. En effet, si les deux étaient égaux on pourrait faire rentrer b_m dans la période, qui deviendrait $b_m a_1 \dots a_{n-1}$, par exemple : $0,473\ 213\ 213\ 213 \dots = 0,47321\ 321 \dots$. Si la difficulté persiste après cette opération on la recommence.

8.4 Corollaire. 1) Un nombre x est rationnel si et seulement si son ddi est périodique.

2) Si p/q est une fraction irréductible dont le dénominateur est premier avec 10, la période de son ddi commence dès le premier chiffre.

Démonstration. Le point 1) résulte de 8.2. Le point 2) aussi, en notant que l'existence d'une pré-période implique la présence de 2 ou de 5 en dénominateur.

8.5 Remarque. On peut aussi montrer le point 2) directement. Si p/q a un ddi dont la période apparaît entre les rangs m et n avec $m < n$ c'est que les restes dans les divisions de $10^m p$ et $10^n p$ par q sont les mêmes : $10^m p = aq + r$

et $10^n p = bq + r$. On en déduit qu'on a $10^n - 10^m = (b-a)q$ donc que q divise $10^m(10^{n-m} - 1)$. Comme q est premier à 10 c'est qu'il divise $10^{n-m} - 1$. Mais alors, on a le même reste dans la division par q de 1 et de 10^{n-m} autrement dit, la période apparaît dès le premier terme !

8.6 Remarque. Ce corollaire permet de montrer l'existence de nombres irrationnels. En voici un :

$$x = 0,01001000100001 \dots 1000 \dots 0001 \dots$$

formé de 1 séparés par des suites de $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ zéros.

Bien entendu il y a d'autres nombres non rationnels mais il n'est pas toujours facile de prouver qu'ils ne le sont pas. C'est simple pour les nombres de la forme \sqrt{d} , $d \in \mathbf{N}$, d non carré parfait. C'est un peu plus difficile de montrer que le nombre e , base des logarithmes neperiens est irrationnel¹⁴ et plus encore pour le nombre π . Une autre question, plus difficile, est celle de la transcendance. Par exemple, le nombre x ci-dessus est-il transcendant ? Je ne sais pas¹⁵. On le sait pour celui de Liouville, avec des 1 plus espacés :

$L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ et aussi pour e (Hermite) et π (Lindemann), mais c'est bien plus délicat.

8.3 Longueur des périodes : le théorème fondamental

8.3.1 Le cas q premier à 10

8.7 Théorème. Soit q un entier positif sans facteur 2 ni 5. On suppose que le ddi de $1/q$ s'écrit $0, a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots$ avec une (plus petite) période de longueur n . Alors, le nombre q divise $999 \dots 999$ avec n chiffres 9 et la longueur de la période du ddi de $1/q$ est le plus petit entier n tel que q divise $999 \dots 999$ avec n chiffres 9.

Démonstration. On sait que $1/q$ admet un développement décimal périodique sans prépériode (voir 8.4) : $\frac{1}{q} = 0, a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots$ et on suppose que le n

en question est le plus petit possible. On a vu qu'on a alors $\frac{1}{q} = \frac{a_1 \dots a_n}{999 \dots 999}$ donc $q \times a_1 \dots a_n = 999 \dots 999 = 10^n - 1$. On voit donc que la longueur de la période est un entier tel que q divise $10^n - 1$. C'est le plus petit car si q

14. C'est encore assez facile et cela permet de demander si la suite $e = 2,718281828 \dots$ continue ainsi !

15. Peut-être pas, il doit falloir plus d'écartement entre les 1.

divise $10^n - 1$ on a $q \times s = 999 \dots 999$ avec $s < 999 \dots 999$. On peut donc écrire $s = a_1 \dots a_n$ **avec n chiffres** en prenant au besoin certains a_i égaux à 0 pour $i = 1, 2, \dots$. On a alors $0, a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots = 1/q$ par le calcul fondamental, de sorte que n est bien la longueur d'une période de $1/q$.

8.8 Corollaire. *Les périodes des ddi de toutes les fractions irréductibles de la forme p/q avec q sans facteurs 2 ni 5 sont toutes les mêmes et égales au plus petit n tel que q divise $999 \dots 999 = 10^n - 1$.*

Démonstration. Quitte à effectuer d'abord la division euclidienne on peut supposer $p < q$. On a $\frac{1}{q} = 0, a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots$ et on a vu qu'on a $q \times a_1 \dots a_n = 999 \dots 999$. Quand on multiplie par p on a donc *a fortiori* $p \times a_1 \dots a_n < 999 \dots 999$. On peut donc poser $p \times a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_n$ avec le même nombre de chiffres. On en déduit $\frac{p}{q} = \frac{b_1 \dots b_n}{999 \dots 999}$ comme annoncé.

8.9 Remarque. Bien entendu, on peut formaliser ce résultat en termes de congruences : si q n'a ni facteur 2 ni 5 il est premier avec 10, de sorte que 10 est un élément de $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$ et la longueur de la période des p/q irréductibles est l'ordre de 10 dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$.

8.3.2 Le cas où il y a des prépériodes

On a vu que si le ddi de p/q a une prépériode, c'est que q admet un facteur 2 ou 5. Inversement, si c'est le cas, le ddi admet une prépériode :

8.10 Proposition. *Soit $x = p/q$ une fraction irréductible avec $p < q$ et avec $q = 2^\alpha 5^\beta q'$ où α, β sont ≥ 0 et q' premier à 10. On pose $m = \text{Max}(\alpha, \beta)$. Alors, le ddi de p/q est de la forme $0, b_1 \dots b_m a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots$*

Démonstration. On considère $10^m x = \frac{2^{m-\alpha} 5^{m-\beta} p}{q'}$. Comme on a $p < q$, donc $p < 2^\alpha 5^\beta q'$ on en déduit $2^{m-\alpha} 5^{m-\beta} p < 10^m q'$ de sorte que $10^m x$ est $< 10^m$. Comme c'est une fraction de type "ordinaire" elle s'écrit $10^m x = b_1 \dots b_m, a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n a_1 \dots a_n \dots$ et on a le résultat en divisant par 10^m .

8.11 Exemple. Considérons $x = \frac{37}{208} = 0,1778\ 846153\ 846153\ 846153 \dots$. On a $208 = 2^4 \times 13$, donc $\frac{37}{208} = \frac{37 \times 625}{13 \times 10^4}$. On a donc $10^4 x = 23125/13$ et la division donne $23125 = 13 \times 1778 + 11$, donc la fraction, multipliée par 10^4 , est $1778 + \frac{8}{13}$ et c'est ce qu'on écrit.

La règle ici : quand on a des 2 ou des 5 en dénominateur, on les élimine en multipliant par 10^n où n est le plus grand exposant des 2 ou des 5 et il reste une fraction "ordinaire".

8.4 La longueur n et le nombre $q - 1$

8.4.1 Le cas premier

Les exemples de 3, 37, 101 et bien d'autres montrent que la longueur de la période de p/q n'est pas toujours égale à $q - 1$, même dans le cas q premier. En sens inverse, en revanche, on a la réciproque :

8.12 Proposition. *Soit q un nombre premier à 10. On suppose que la période des fractions irréductibles p/q est égale à $q - 1$. Alors q est premier.*

Démonstration. La période est l'ordre de 10 dans $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$. Si elle vaut $q - 1$ c'est qu'on a $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^* = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}) \setminus \{0\}$ donc que $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ est un corps ce qui signifie que q est premier.

Dans le cas premier on a le résultat plus faible suivant :

8.13 Proposition. *Soit q un nombre premier différent de 2 et 5. La longueur n de la période des ddi des fractions irréductibles p/q est un diviseur de $q - 1$.*

Démonstration. 1) Avec la théorie des groupes, c'est évident car n est l'ordre de 10 dans $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$ qui est un groupe de cardinal $q - 1$.

2) Voici une preuve élémentaire. Supposons que $1/q$ soit périodique avec une (plus petite) période $a_1 \dots a_n$ de longueur $n < q - 1$. La formule magique 7.5 montre que les parties fractionnaires des $10^r p/q$, avec $0 \leq r \leq n - 1$ sont données par la même période, permutée circulairement. Le lemme est alors le suivant :

8.14 Lemme. *Soit p/q une fraction irréductible de dénominateur q , avec $p < q$ dont le ddi est donné par $\frac{p}{q} = 0, b_1 \dots b_n b_1 \dots b_n \dots$ avec $b_1 \dots b_n = a_1 \dots a_n \times q$.*

1) *Les permutées circulaires de $b_1 \dots b_n$ sont toutes différentes.*

2) *Il y a exactement n fractions p'/q dont le développement a pour période les permutées circulaires de $b_1 \dots b_n$. Si N est le nombre de périodes possibles (à permutation circulaire près), on a $q - 1 = Nn$.*

Démonstration. 1) Sinon, il existe $i > 1$ tel que $b_1 \dots b_n = b_{i+1} \dots b_{i+n}$ c'est-à-dire $b_k = b_{k+i}$ pour tout k (les indices sont pris modulo n) et supposons que i soit le plus petit indice vérifiant cette propriété. On divise n par i : $n = is + r$ avec $0 \leq r < i$. Si r est non nul, on a $b_{r+1} = b_{n+1} = b_1$ et comme $r + 1 < i + 1$ cela contredit la minimalité de i . On voit que i divise n , mais alors $b_1 \dots b_i$ est une période de longueur $< n$ (donc aussi $a_1 \dots a_i$) et c'est absurde.

2) Le nombre de p premiers avec q et $< q$ est égal à $p - 1$. Tous les p/q ont des périodes qui sont les produits de $a_1 \dots a_n$ par p . Il y en a donc

$q - 1$. Chacune de ces périodes admet n permutées circulaires différentes qui correspondent à des p différents. S'il y a N périodes en tout, on a bien $q - 1 = Nn$.

8.4.2 Queneufs, repunits et petites périodes

On a vu apparaître les nombres $999 \dots 999$ (que je propose d'appeler les *queneufs*). Pour trouver des fractions de petites périodes, il est essentiel de savoir les factoriser. Voici les premières décompositions : $9 = 3 \times 3$, $99 = 3^2 \times 11$, $999 = 3^3 \times 37$, $9999 = 3^2 \times 11 \times 101$, $99999 = 3^2 \times 41 \times 271$, $999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$, $9999999 = 3^2 \times 239 \times 4649$, $10^8 - 1 = 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137$, $10^9 - 1 = 3^4 \times 37 \times 333667$, $10^{10} - 1 = 3^2 \times 11 \times 41 \times 271 \times 9091$, etc.

Ces nombres se ramènent à ce que les anglo-saxons appellent des repunits i.e. les $R_n := 111 \dots 111$ avec n chiffres 1. Quelques lignes de programme montrent que très peu des nombres R_n sont premiers, c'est le cas pour $n = 19, 23, 317, 1031$. Wikipedia affirme que les n qui donnent des premiers sont, outre ceux là : 49081, 86453 et, probablement, 109297, 270343, 5794777 et 8177207. D'une certaine manière, ces nombres sont les plus grands possibles pour une période donnée. Par exemple les fractions p/q avec $q = R_{19}$, nombre plus grand que 10^{19} , ont des périodes de longueur 19.

On ignore s'il y a une infinité de repunits premiers.

8.4.3 Générateurs ou fractions de grandes périodes

À l'opposé, on peut chercher les fractions p/q , avec q premier $\neq 2, 5$ qui ont la plus grande période possible, donc de longueur $q - 1$. Une question pertinente est la suivante :

- Y a-t-il une infinité de nombres premiers q distincts de 2 et 5 tels que 10 soit d'ordre $q - 1$ dans $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$, donc engendre ce groupe (autrement dit tels que la période du ddi des q -ièmes soit égale à $q - 1$) ?

Voici les $q < 500$ qui vérifient la propriété :

7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229,
233, 257, 263, 269, 313, 337, 367, 379, 383, 389, 419, 433, 461, 487, 491, 499.

Emil Artin a conjecturé que cet ensemble est infini et même qu'il a une densité égale à $\prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) \sim 0,37395\dots$ Pour l'heure, ce résultat n'est toujours pas prouvé (sauf en utilisant l'hypothèse de Riemann généralisée, qui n'est pas prouvée ...).

8.5 La longueur de la période dans le cas composé

On suppose toujours que q est premier avec 10, mais cette fois qu'il est composé : $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$. Peut-on dire quelque chose de la longueur de la période des fractions p/q ? Bien sûr on sait que c'est l'ordre de 10 dans $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$, mais encore? La réponse à cette question n'est pas si simple ...

8.5.1 Les puissances de premiers

Il faut prendre garde aux nombres premiers suivants :

8.15 Définition. Soit q un nombre premier distinct de 2 et 5 et soit n l'ordre de 10 dans $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$. On dit que q est **un nombre de Wieferich**¹⁶ si $10^n - 1$ est multiple de q^2 . Précisément, si q^k , $k \geq 2$, divise $10^n - 1$ mais que q^{k+1} ne le divise pas, on dit que q est de Wieferich d'ordre k .

8.16 Remarque. Être de Wieferich d'ordre 1 c'est ne pas l'être.

8.17 Exemples. Je ne connais que deux nombres premiers de Wieferich (et ils sont d'ordre 2), le nombre 3, car 10 est d'ordre $n = 1$ modulo 3 et $10 - 1$ est multiple de 9, et ... le nombre 487!! Il n'y en a pas d'autres qui soient ≤ 1000000 . Plusieurs questions bien naturelles se posent : existe-t-il une infinité de nombres de Wieferich? En existe-t-il d'ordre > 2 ?

8.18 Proposition. Soit q un nombre premier distinct de 2 et de 5. On suppose que q n'est pas de Wieferich. Soit n l'ordre de 10 modulo q et α un entier ≥ 1 . Alors, l'ordre de 10 modulo q^α est égal à $nq^{\alpha-1}$.

Démonstration. C'est une conséquence des deux lemmes suivants :

8.19 Lemme. Soit G un groupe fini, $x \in G$ un élément d'ordre n et soit k un entier premier à n . Alors x^k est d'ordre n .

Démonstration. On a $(x^k)^n = (x^n)^k = 1$ de sorte que l'ordre ω de x^k est un diviseur de n . Par ailleurs, comme on a $x^{k\omega} = 1$, n divise $k\omega$ donc il divise ω puisqu'il est premier à k . On a donc $\omega = n$.

8.20 Lemme. Pour tout entier $k \geq 0$, on a $10^{nq^k} = 1 + \lambda q^{k+1}$ avec λ premier avec q .

16. En fait, les vrais nombres de Wieferich (1884-1954) sont les nombres premiers p tels que p^2 divise $2^{p-1} - 1$. Les seuls connus sont 1093 et 3511 et il n'y en a pas d'autres avant 2×10^{17} . La situation ici est l'analogie de celle-là avec 10 au lieu de 2.

Démonstration. (du lemme) Par récurrence sur k . Pour $k = 0$, $10^n - 1$ est multiple de q par définition de n et pas de q^2 parce que q n'est pas de Wieferich. Il est donc de la forme annoncée. Supposons le résultat établi pour k et passons à $k + 1$. On a $10^{nq^{k+1}} = (1 + \lambda q^{k+1})^q$. On développe par la formule du binôme et tous les termes sont multiples de q^{k+3} sauf les deux premiers qui valent 1 et λq^{k+2} (car $\binom{q}{1} = q$). C'est le résultat attendu.

La proposition résulte de ces deux lemmes car n est premier avec q^α .

8.21 Remarque. Si q est de Wieferich d'ordre $k \geq 2$, l'ordre de 10 modulo q^α , pour $\alpha \geq 2$, vaut $nq^{\alpha-k}$. Par exemple, 10 est d'ordre $3^{\alpha-2}$ modulo 3^α .

8.5.2 Le cas général

8.22 Théorème. Soit q un entier premier à 10, dont la décomposition en facteurs premiers est $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$. Pour chaque i , soit n_i l'ordre de 10 modulo q_i . On suppose q_i de Wieferich d'ordre $k_i \geq 1$. Alors l'ordre¹⁷ de 10 modulo q est le ppcm des $n_i q_i^{\alpha_i - k_i}$ pour i variant de 1 à r .

Démonstration. C'est juste le lemme chinois.

8.23 Exemple. La longueur de la période des $p/(7 \times 17)$ est le ppcm de 6 et 16 donc 48. Celle des 133-ièmes ($133 = 7 \times 19$) est 18. Celle de $100/(487^2)$ est 486 (car 487 est de Wieferich).

8.24 Remarques. 1) On a vu que, si q est premier distinct de 2 et 5 la longueur de la période divise $q - 1$. La réciproque est inexacte. Par exemple pour $q = 33$ la période est 2 qui divise 32 bien que 33 ne soit pas premier. Pire, si $q = 6601 = 7 \times 23 \times 41$, la longueur de la période des p/q est $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$ qui divise 6600 sans diviser aucun des $q_i - 1$. Une question sans réponse est la suivante :

Quels sont les entiers q premiers à 10 et non premiers tels que la longueur de la période des p/q divise $q - 1$?

2) Si l'on prend en dénominateur un produit de nombres premiers, la période ne peut jamais être le produit des $p_i - 1$ à cause des facteurs 2!!

8.6 Passer d'un ddi aux autres ?

La question est la suivante : à partir d'un ddi, par exemple celui de $1/q$, comment obtenir ceux des autres p/q ? Nous allons voir qu'il y a deux façons de faire cela. L'une a été vue en 8.8. Elle consiste à partir de la période de $1/q$ et à multiplier par p pour avoir celle de p/q . C'est possible car on a

17. Cette formule vaut pour les i tels que $\alpha_i \geq 2$. Pour $\alpha_i = 1$ l'ordre est simplement n_i .

$p \times a_1 \dots a_n < 999 \dots 999$. L'autre méthode consiste à utiliser, une fois de plus, la multiplication par 10, en retranchant les parties entières, mais cette méthode sera différente selon que la longueur de la période est ou non égale à la valeur maximale $q - 1$.

8.6.1 Les septièmes

On a vu le ddi de $1/7 : \frac{1}{7} = 0,142857\ 142857 \dots$. On utilise la multiplication par 10. On a $\frac{10}{7} = 1,428571\ 428571 \dots = 1 + \frac{3}{7}$, d'où $\frac{3}{7} = 0,428571\ 428571 \dots$. On continue avec $30 = 4 \times 7 + 2$ qui donne, en retranchant 4, $\frac{2}{7} = 0,285714\ 285714 \dots$, puis $20 = 2 \times 7 + 6$ qui donne $\frac{6}{7} = 0,857142 \dots$, $60 = 8 \times 7 + 4$, d'où $\frac{4}{7} = 0,571428 \dots$, $40 = 5 \times 7 + 5$ et $\frac{5}{7} = 0,714285 \dots$ et enfin $50 = 7 \times 7 + 1$ qui revient au départ.

Cela donne une façon – magique – de dire d'avance la valeur de n'importe quel septième, par exemple $46/7 = 6 + \frac{4}{7} = 6,571428\ 571428 \dots$

L'autre voie, qui consiste à multiplier 142857 par les nombres de 1 à 6, redonne les mêmes résultats : $142857 \times 2 = 285714$, $142657 \times 3 = 428571$, $142857 \times 4 = 571428$, $142857 \times 5 = 714285$, et $142857 \times 6 = 857142$. En revanche, elle n'explique pas pourquoi l'on trouve la même période, à décalage près.

8.6.2 Les treizièmes

On part du ddi de $1/13 = 0,076923$. On multiplie par 10, ce qui donne le ddi de $10/13$, puis par $100 = 7 \times 13 + 9$, d'où le ddi de $9/13$ et on continue avec $90 = 6 \times 13 + 12$, $120 = 9 \times 13 + 3$, $30 = 2 \times 13 + 4$ et $40 = 3 \times 13 + 1$. Comme la période est 6, le ddi de $1/13$ n'en donne que 5 autres : 10, 9, 12, 3, 4. Pour obtenir les 6 autres il faut utiliser une autre point de départ, par exemple le ddi de $2/13$. On notera que ce ddi se calcule avec celui de $1/13 = 0,076923$ en doublant 076923 en 153846 (il n'y a pas de retenue). Ce sera toujours le cas avec les ddi des p/q , $p < q/2$.

8.6.3 Avec 41

Cette fois, la période étant 5, il y a besoin de 8 points de départ. On a $1/41 = 0,02439$ et les suivants se calculent en multipliant par 2, 3, 4, 5, etc. : 04878, 07317, 09756, 12195, etc. Les 8 représentants sont les $a/41$ avec $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11$ et 15. On les comprend en notant que le plus petit

générateur de $G := (\mathbf{Z}/41\mathbf{Z})^*$ est égal à 6, les 8 représentants de $G/(10)$ étant alors les 6^k avec $k = 0, 1, \dots, 7$.

Voici la correspondance : $1 = 1$, $6 = 6$, $6^2 = -5 = 2 \times 10^2$, $6^3 = 11$, $6^4 = -16 = 4 \times 10^4$, $6^5 = -14 = 15 \times 10$, $6^6 = -2 = 5 \times 10^3$, $6^7 = -12 = 3 \times 10^4$.

8.7 Les théorèmes d'Olivier Mathieu

Il s'agit de deux jolis résultats sur les développements décimaux, que l'on peut trouver par exemple dans l'exposé de Jérôme Germoni [2].

8.25 Théorème. *Soit q un nombre premier. On suppose que la (plus petite) longueur de la période des fractions irréductibles p/q est égale à $n = 2m$ et que la période de p/q est égale à $a_1 \dots a_m b_1 \dots b_m$. Alors on a $a_1 \dots a_m + b_1 \dots b_m = 999 \dots 999$ avec m chiffres 9.*

8.26 Exemples. 1) On a $1/7 = 0,142857142857 \dots$ et $142 + 857 = 999$ ou encore $8/13 = 0,615384615384 \dots$ et $615 + 384 = 999$.

2) Si q n'est pas premier l'énoncé peut être en défaut comme le montre les exemples de $\frac{1}{99} = 0,171717 \dots$ ou de $13/21 = 0,619047619047 \dots$

3) Bien entendu, la longueur de la période des q -ièmes n'est pas toujours paire, même si q est premier. Par exemple pour $q = 31$ cette longueur vaut 15, pour $q = 37$ elle vaut 3.

Démonstration. On note d'abord qu'un nombre A de $2m$ chiffres a la propriété voulue si et seulement si il s'écrit $A = a10^m + 10^m - 1 - a = (10^m - 1)(a + 1)$ où a est un nombre de m chiffres. Cela implique qu'il est multiple de $10^m - 1$. Inversement, si A est multiple de $10^m - 1$ on a $A = (10^m - 1)B$ et comme on a $A < 10^{2m} - 1$, on en déduit $B < 10^m$. On pose alors $a = B - 1$, d'où $a \leq 10^m - 1$ et on a $A = 10^m a + 10^m - 1 - a$ et A est bien de la forme annoncée.

Si maintenant on a p/q (avec q premier et $p < q$) de période de longueur $2m$ on a $p/q = A/(10^{2m} - 1)$ donc $Aq = p(10^{2m} - 1) = p(10^m - 1)(10^m + 1)$. Mais q est premier avec p et, comme la plus petite période des fractions p/q est $2m$, q ne divise pas non plus $10^m - 1$, donc il est premier avec $p(10^m - 1)$. Il divise donc $10^m + 1$ qui s'écrit qq' et on a $A = pq'(10^m - 1)$ qui est de la forme annoncée avec $a + 1 = pq'$.

8.27 Théorème. *Soit $q \geq 11$ un nombre premier.*

La $(q+1)/2$ -ième décimale de $1/q$ est égale à 0 ou à 9. Précisément, c'est un 9 dans les deux cas suivants :

- $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$ et $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$,
- $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ et $q \equiv \pm 1 \pmod{5}$,

et c'est un 0 dans les deux cas :

- $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$ et $q \equiv \pm 1 \pmod{5}$,
- $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ et $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Démonstration. On note n la longueur de la période de $1/q$ et on sait que n divise $q - 1$. Comme q est > 10 , son ddi commence par 0, donc aussi toutes ses périodes. On note que $(q + 1)/2$ est égal à $(q - 1)/2 + 1$. Il y a deux cas.

1) Si n divise $(q - 1)/2$, les $(q - 1)/2$ premiers chiffres du ddi forment une réunion de périodes et le chiffre suivant est un 0, comme tous les débuts de périodes.

On note que cette condition implique qu'on a $10^{(q-1)/2} \equiv 1 \pmod{q}$, donc que 10 est un carré modulo q . Cela signifie soit que 2 et 5 sont des carrés, soit qu'ils n'en sont ni l'un ni l'autre, conditions respectivement équivalentes *via* la loi de réciprocité quadratique à $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$ et $q \equiv \pm 1 \pmod{5}$ ou au contraire à $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ et $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

2) Sinon, c'est que n est pair, $n = 2m$ et l'on a $(q - 1)/2 = km$ avec k impair (sinon n diviserait $(q - 1)/2$). En vertu du théorème 8.25, la période est de la forme $0a_2 \dots a_m 9b_2 \dots b_m$. Les $(q - 1)/2$ premiers chiffres forment une réunion d'un nombre impair de demi-périodes et le chiffre suivant est un 9. Cette condition est équivalente à $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$ et $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$ ou $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ et $q \equiv \pm 1 \pmod{5}$. C'est le cas, par exemple, si la période est égale à $q - 1$.

8.8 Des questions supplémentaires

Voici encore quelques questions supplémentaires.

- Pour q premier impair $\neq 5$, $q - 1$ est toujours pair. La question est l'existence de q (une infinité?) tels que la période correspondante soit $(q - 1)/2$. Il en existe, bien sûr, par exemple 3, 13, 31, 43, 67, 71, 83, 89 ... mais on ne sait sans doute pas s'il y en a une infinité.

- Si on se donne un entier n il s'agit de savoir s'il existe q premier tel que la période de q soit égale à n . Une méthode pour en trouver consiste à prendre pour q un diviseur de $10^n - 1 = 999 \dots 999$ avec n chiffres. Encore faut-il que la période soit vraiment n et pas plus petite. Une précaution pour cela consiste à prendre pour q un diviseur premier de $\Phi_n(10)$ et pas seulement de $10^n - 1$ (encore faut-il que q ne divise pas les $\Phi_d(10)$ pour $d|n$, cf. $n = 3$). Cela étant, cette méthode semble bien fonctionner ! Voici quelques exemples.

$$n = 1, \Phi_1(X) = X - 1, \Phi_1(10) = 9 \text{ et } q = 3.$$

$$n = 2, \Phi_2(X) = X + 1, \Phi_2(10) = 10 + 1 = 11 \text{ et } q = 11.$$

$n = 3, \Phi_3(X) : X^2 + X + 1$, d'où $\Phi_3(10) = 111$. Attention, là, il faut écartier le facteur $q = 3$ et ne prendre que $q = 37$.

$n = 4$, $\Phi_4(X) = X^2 + 1$, $\Phi_4(10) = 101 = q$.
 $n = 5$, $\Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $\Phi_5(10) = 11111 = 41 \times 271$,
 $q = 41$ ou 271 .
 $n = 6$, $\Phi_6(X) = X^2 - X + 1$, $\Phi_6(10) = 91 = 7 \times 13$.
 $n = 7$, $\Phi_7(10) = 1111111 = 239 \times 4649$.
 $n = 8$, $\Phi_8(X) = X^4 + 1$, $\Phi_8(10) = 10001 = 73 \times 137$.
 $n = 9$, $\Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1$, $\Phi_9(10) = 1001001 = 3 \times 333667$. Ici il faut éliminer le 3.
 $n = 10$, $\Phi_{10}(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $\Phi_{10}(10) = 9091 = q$.

Références

- [1] Coquard Jean-Marie *Les fractions décimales et l'algèbre*, Images des mathématiques, 2024.
<https://images.math.cnrs.fr/wp-content/uploads/2024/12/10.608683spm-e441.pdf>
- [2] Germoni Jérôme, *Développement décimal de $1/p$ (d'après O. Mathieu)*, CRDP Lyon, 2006.
<https://math.univ-lyon1.fr/~germoni/diffusion/crdp.pdf>
- [3] Perrin Daniel *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.
- [4] Stevin Simon, *La disme* Reproduction de textes anciens de l'IREM de Paris, 1980.
<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS80001.pdf>