Les géométries non euclidiennes et ce qu'elles nous apprennent sur la géométrie euclidienne et son enseignement

Daniel PERRIN

18 mai 2016

L'objectif

- Connaître les géométries non euclidiennes pour mieux comprendre la géométrie euclidienne.

L'objectif

- Connaître les géométries non euclidiennes pour mieux comprendre la géométrie euclidienne.
- Pour plus de précisions sur les géométries non euclidiennes, voir ma page web (rubrique *Livre de géométrie projective* Partie 4) :

  `http://www.math.u-psud.fr/~perrin`

  `/Livregeometrie/DPPartie4.pdf`

Première partie

Le postulat d'Euclide et ses conséquences

Le postulat d'Euclide

- Version originale (III^e siècle av. J.-C.)

  Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
  Figure

Le postulat d'Euclide

- Version originale (III^e siècle av. J.-C.)

  Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
  Figure

- Version de Proclus (410-483)

  Étant donnés un point A et une droite D du plan, il existe une et une seule droite parallèle à D passant par A.
  Figure

Le postulat d'Euclide

- Version originale (III^e siècle av. J.-C.)

  Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
  Figure
- Version de Proclus (410-483)

  Étant donnés un point A et une droite D du plan, il existe une et une seule droite parallèle à D passant par A.
  Figure
- L'équivalence entre les deux n'est pas tout à fait évidente.

Quelques propriétés indépendantes du postulat

- **Premier cas d'isométrie des triangles**

  Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose qu'on a $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Alors, les triangles sont isométriques : on a les égalités d'angles $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ et de côtés $BC = B'C'$. Figure

  La preuve utilise implicitement **l'homogénéité** *du plan, c'est-à-dire l'existence d'un groupe de mouvements suffisamment transitif.*

Quelques propriétés indépendantes du postulat

- **Premier cas d'isométrie des triangles**

  Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose qu'on a $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Alors, les triangles sont isométriques : on a les égalités d'angles $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ et de côtés $BC = B'C'$. Figure

  La preuve utilise implicitement **l'homogénéité** *du plan, c'est-à-dire l'existence d'un groupe de mouvements suffisamment transitif.*

- La somme de deux angles d'un triangle est $< \pi$.

Quelques propriétés indépendantes du postulat

- **Premier cas d'isométrie des triangles**

  Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose qu'on a $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Alors, les triangles sont isométriques : on a les égalités d'angles $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ et de côtés $BC = B'C'$. Figure

  La preuve utilise implicitement **l'homogénéité** *du plan, c'est-à-dire l'existence d'un groupe de mouvements suffisamment transitif.*

- La somme de deux angles d'un triangle est $< \pi$.

- **Perpendiculaires et parallèles 1**

  Si deux droites D, D' sont perpendiculaires à une même troisième, elle sont parallèles. Figure

Conséquence du postulat 1 :

- **Transitivité**
  Si D est parallèle à D' et D'' parallèle à D', alors D'' est parallèle à D.

Conséquence du postulat 1 :

- **Transitivité**
  Si D est parallèle à D' et D'' parallèle à D', alors D'' est parallèle à D.
- **Angles et parallèles**
  Soient D, D' deux droites parallèles. Une droite Δ coupe D en A et D' en A'. Alors les angles alternes internes $\widehat{PA'A}$ et $\widehat{A'AM}$ sont égaux ainsi que les angles correspondants $\widehat{RAQ}$ et $\widehat{A'AM}$.
  Figure

Conséquence du postulat 2 :

- **Perpendiculaires et parallèles**
  Si deux droites D, D' sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
  Figure

Conséquence du postulat 2 :

- **Perpendiculaires et parallèles**
  Si deux droites D, D' sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
  Figure
- **Somme des angles d'un triangle**
  La somme des angles d'un triangle est égale à π.
  Figure

Conséquence du postulat 2 :

- **Perpendiculaires et parallèles**
  Si deux droites D, D' sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
  Figure
- **Somme des angles d'un triangle**
  La somme des angles d'un triangle est égale à π.
  Figure
- **Concours des médiatrices**
  Les médiatrices d'un triangle sont concourantes et le triangle admet un cercle circonscrit.
  Figure

Deuxième partie

Un peu d'histoire

Un peu d'histoire 1 : les tentatives de preuve

Proclus, Clavius, Clairaut, Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, etc. ont essayé de prouver le postulat d'Euclide. Toutes ces tentatives ont été infructueuses. Lorsqu'elles n'étaient pas évidemment fausses, elles revenaient :

- soit à donner une nouvelle définition de parallèle (par exemple, l'ensemble des points équidistants d'une droite donnée situés d'un même côté de cette droite, Clavius),

Un peu d'histoire 1 : les tentatives de preuve

Proclus, Clavius, Clairaut, Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, etc. ont essayé de prouver le postulat d'Euclide. Toutes ces tentatives ont été infructueuses. Lorsqu'elles n'étaient pas évidemment fausses, elles revenaient :

- soit à donner une nouvelle définition de parallèle (par exemple, l'ensemble des points équidistants d'une droite donnée situés d'un même côté de cette droite, Clavius),
- soit à remplacer l'axiome d'Euclide par un autre comme celui de Proclus ou l'existence de triangles semblables (Wallis) ou le fait que trois points sont cocycliques ou alignés (Bolyai père), etc.

Un peu d'histoire 2 : Les géométries non euclidiennes, Gauss, Bolyai

Janos Bolyai (1802-1860) est hongrois, capitaine du génie dans l'armée autrichienne, fils du mathématicien Farkas Bolyai. Il écrit vers 1830 *La science absolue de l'espace* où il développe toute une géométrie sans l'axiome des parallèles. Comme il le dit : *À partir de rien, j'ai créé un étrange et nouvel univers.*

Le père envoie ce texte à Gauss, le plus grand mathématicien de l'époque dont voici la réponse.

La lettre de Gauss à Bolyai père

Parlons maintenant un peu du travail de ton fils. Si je commence en disant que je ne puis louer ce travail, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement ; mais je ne puis dire autre chose ; le louer serait me louer moi-même ; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit, coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. Quant à mon travail personnel, dont d'ailleurs j'ai confié peu de chose jusqu'ici au papier, mon intention était de n'en rien laisser publier de mon vivant.

(suite)

En effet, la plupart des hommes n'ont pas l'esprit juste sur les questions dont il s'agit, et j'ai trouvé seulement bien peu d'entre eux qui prissent un intérêt particulier à ce que je leur ai communiqué à ce sujet. Pour pouvoir prendre cet intérêt, il faut d'abord avoir senti bien vivement ce qui fait essentiellement défaut, et sur ces matières la plupart des hommes sont dans une obscurité complète. C'était, au contraire, mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi. Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière si remarquable.

Un peu d'histoire 3 : Lobatchevsky

- Nikolai Lobatchevsky (1792-1856) est russe, recteur de l'université de Kazan en 1826. Il publie en 1829 en russe, puis en 1837 en français son article *Géométrie imaginaire*. Outre les formules relatives à l'aire d'un triangle en fonction des angles, Lobachevsky introduit des objets nouveaux, inexistants en géométrie euclidienne, comme les horocycles.

Un peu d'histoire 3 : Lobatchevsky

- Nikolai Lobatchevsky (1792-1856) est russe, recteur de l'université de Kazan en 1826. Il publie en 1829 en russe, puis en 1837 en français son article *Géométrie imaginaire*. Outre les formules relatives à l'aire d'un triangle en fonction des angles, Lobachevsky introduit des objets nouveaux, inexistants en géométrie euclidienne, comme les horocycles.
- Les travaux de Bolyai et Lobatchevsky sont indépendants. Comme le dit Bolyai père : *les découvertes apparaissent souvent simultanément en plusieurs endroits, comme les violettes au printemps*.

Troisième partie

La quête d'un modèle euclidien de la géométrie hyperbolique

Question philosophique 1 :
Les géométries non euclidiennes existent-elles ?

- Bolyai et Lobatchevsky ont développé les conséquences de l'absence du cinquième postulat, sans rencontrer de contradiction, mais est-ce que cela prouve l'existence des géométries non euclidiennes ? Écoutons ce que dit Gauss :

Question philosophique 1 :
Les géométries non euclidiennes existent-elles ?

- Bolyai et Lobatchevsky ont développé les conséquences de l'absence du cinquième postulat, sans rencontrer de contradiction, mais est-ce que cela prouve l'existence des géométries non euclidiennes ? Écoutons ce que dit Gauss :
- *Pour traiter la Géométrie, dès les débuts, d'une manière bien ordonnée, il est indispensable de démontrer la possibilité de l'existence du plan. La définition habituelle renferme trop de choses et implique déjà un théorème à proprement dire tacite. L'on doit s'étonner que tous les écrivains, depuis Euclide jusqu'à nos jours, se soient mis à l'œuvre d'une façon si négligente.*

La quête d'un modèle euclidien

Pour être sûr (?) de cette existence, l'idée a été de la ramener à celle de la géométrie euclidienne, autrement dit de produire des modèles euclidiens des géométries non euclidiennes.
C'est ce qu'ont fait plusieurs mathématiciens du XIX-ième siècle : Beltrami, Klein, Poincaré, etc. et c'est aussi ce que nous allons expliquer maintenant, dans le cas de la géométrie hyperbolique.

Les objectifs de la quête : 1, l'incidence

Si l'on est ambitieux, les objectifs de cette quête vont être nombreux :

- Avoir un "plan" qu'on puisse représenter comme une partie d'un plan ou d'un espace euclidien.

Les objectifs de la quête : 1, l'incidence

Si l'on est ambitieux, les objectifs de cette quête vont être nombreux :

- Avoir un “plan” qu'on puisse représenter comme une partie d'un plan ou d'un espace euclidien.
- Avoir un plan qui ressemble à un plan, donc qui soit de dimension 2, donc une surface.

Les objectifs de la quête : 1, l'incidence

Si l'on est ambitieux, les objectifs de cette quête vont être nombreux :

- Avoir un "plan" qu'on puisse représenter comme une partie d'un plan ou d'un espace euclidien.
- Avoir un plan qui ressemble à un plan, donc qui soit de dimension 2, donc une surface.
- Avoir des droites (peut-être pas toujours droites ...) qui vérifient les propriétés usuelles d'incidence (par deux points passe une droite et une seule).

Les objectifs de la quête : 2, Erlangen

Si l'on pense en termes du programme d'Erlangen de Felix Klein, d'autres objectifs apparaissent :

- Avoir un plan issu de la géométrie-mère : celle du plan projectif.

Les objectifs de la quête : 2, Erlangen

Si l'on pense en termes du programme d'Erlangen de Felix Klein, d'autres objectifs apparaissent :

- Avoir un plan issu de la géométrie-mère : celle du plan projectif.
- Disposer d'un groupe de transformations avec des propriétés de transitivité (ou d'homogénéité) suffisantes sur les points et sur les droites (cf. le premier cas d'isométrie des triangles). Pour réaliser cela, on a besoin en tous cas de disposer de **symétries** par rapport aux droites.

Les objectifs de la quête : 3, la métrique

- Avoir des invariants analogues à ceux de la géométrie euclidienne : orthogonalité, angle, distance, etc.

Les objectifs de la quête : 3, la métrique

- Avoir des invariants analogues à ceux de la géométrie euclidienne : orthogonalité, angle, distance, etc.
- Avoir (si possible) une compatibilité entre les invariants de ces géométries (longueur, angle) et ceux du modèle (par sa structure euclidienne).

La quête d'un modèle euclidien : l'approche de Klein

- Une des idées de Klein c'est que la géométrie projective est la mère de toutes les autres. On part donc du plan projectif $\mathbf{P}$, c'est-à-dire du plan affine complété en lui adjoignant une droite "à l'infini", D_∞.

La quête d'un modèle euclidien : l'approche de Klein

- Une des idées de Klein c'est que la géométrie projective est la mère de toutes les autres. On part donc du plan projectif $\mathbf{P}$, c'est-à-dire du plan affine complété en lui adjoignant une droite "à l'infini", D_∞.
- Les parallèles sont alors les droites qui se coupent à l'infini. Le postulat d'Euclide est vrai. Figure

La quête d'un modèle euclidien : l'approche de Klein

- Une des idées de Klein c'est que la géométrie projective est la mère de toutes les autres. On part donc du plan projectif $\mathbf{P}$, c'est-à-dire du plan affine complété en lui adjoignant une droite "à l'infini", D_∞.
- Les parallèles sont alors les droites qui se coupent à l'infini. Le postulat d'Euclide est vrai. Figure
- Pour avoir une géométrie non euclidienne, on va s'arranger pour que les droites aient plusieurs directions, donc prendre "à l'infini" une courbe Γ qui coupe les droites en plusieurs points. Figure

L'approche de Klein (suite)

- Le plan considéré sera donc $X = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ (Γ est appelé **l'horizon**), avec ses droites, et le groupe associé sera le groupe G des homographies qui conservent Γ.

L'approche de Klein (suite)

- Le plan considéré sera donc $X = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ (Γ est appelé **l'horizon**), avec ses droites, et le groupe associé sera le groupe G des homographies qui conservent Γ.
- On espère que le plan X soit homogène, donc que G opère transitivement sur X.

L'approche de Klein (suite)

- Le plan considéré sera donc $X = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ (Γ est appelé **l'horizon**), avec ses droites, et le groupe associé sera le groupe G des homographies qui conservent Γ.
- On espère que le plan X soit homogène, donc que G opère transitivement sur X.
- On montre que cela disqualifie les courbes de degré plus grand que 2 dont le groupe est trop petit (il est fini).

L'approche de Klein (suite)

- Le plan considéré sera donc $X = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ (Γ est appelé **l'horizon**), avec ses droites, et le groupe associé sera le groupe G des homographies qui conservent Γ.
- On espère que le plan X soit homogène, donc que G opère transitivement sur X.
- On montre que cela disqualifie les courbes de degré plus grand que 2 dont le groupe est trop petit (il est fini).
- Pour une conique, en revanche, ce groupe est de dimension 3, donc peut opérer transitivement sur un "plan".

L'approche de Klein (suite)

- On considère $Y = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ où Γ est une conique, par exemple un cercle.

L'approche de Klein (suite)

- On considère $Y = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ où Γ est une conique, par exemple un cercle.
- En fait, le groupe G n'est pas transitif sur Y : il a deux orbites, l'intérieur et l'extérieur de Γ. Il faut donc se limiter à l'une de ces orbites.

L'approche de Klein (suite)

- On considère $Y = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ où Γ est une conique, par exemple un cercle.
- En fait, le groupe G n'est pas transitif sur Y : il a deux orbites, l'intérieur et l'extérieur de Γ. Il faut donc se limiter à l'une de ces orbites.
- L'extérieur est à proscrire car le groupe ne serait plus transitif sur les droites (il y en a trois types). Figure

L'approche de Klein (suite)

- On considère $Y = \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}$ où Γ est une conique, par exemple un cercle.
- En fait, le groupe G n'est pas transitif sur Y : il a deux orbites, l'intérieur et l'extérieur de Γ. Il faut donc se limiter à l'une de ces orbites.
- L'extérieur est à proscrire car le groupe ne serait plus transitif sur les droites (il y en a trois types). Figure
- Le plan de Klein est donc l'intérieur $\mathbf{K}$ du disque $x^2 + y^2 < 1$ avec comme droites les traces des droites ordinaires et pour infini (ou horizon) le cercle unité Γ.

Le modèle de Klein est non euclidien

- On peut travailler dans ce plan comme dans le plan euclidien grâce aux *macros d'Yves Martin.

Le modèle de Klein est non euclidien

- On peut travailler dans ce plan comme dans le plan euclidien grâce aux *macros d'Yves Martin.
- Dans le modèle de Klein, il y a plusieurs parallèles à une droite issues d'un point (quel que soit le sens du mot parallèle) Figure

Orthogonalité

- Bien que $\mathbf{K}$ ait été défini dans une perspective affine, il contient en germe une métrique et d'abord une orthogonalité.

Orthogonalité

- Bien que $\mathbf{K}$ ait été défini dans une perspective affine, il contient en germe une métrique et d'abord une orthogonalité.
- Une manière de traduire que Δ est la perpendiculaire à D passant par $a \notin D$ consiste à dire qu'elle est l'unique droite passant par a invariante par la réflexion τ_D d'axe D.

Orthogonalité

- Bien que $\mathbf{K}$ ait été défini dans une perspective affine, il contient en germe une métrique et d'abord une orthogonalité.
- Une manière de traduire que Δ est la perpendiculaire à D passant par $a \notin D$ consiste à dire qu'elle est l'unique droite passant par a invariante par la réflexion τ_D d'axe D.
- Il reste à décrire cette réflexion. Figure

Le modèle de Klein n'est pas conforme

- La droite "perpendiculaire" à D passant par a est la droite (ad) qui joint a au pôle de D. Problème : elle n'est pas perpendiculaire au sens euclidien, le modèle ne conserve pas les angles (on dit qu'il n'est pas conforme).

Le modèle de Klein n'est pas conforme

- La droite "perpendiculaire" à D passant par a est la droite (ad) qui joint a au pôle de D. Problème : elle n'est pas perpendiculaire au sens euclidien, le modèle ne conserve pas les angles (on dit qu'il n'est pas conforme).
- Une autre manifestation de la non conformité : comme la symétrie τ_D laisse invariante les tangentes, ces tangentes devraient être perpendiculaires à D, ce qui n'est pas le cas. Figure

Le modèle de Klein n'est pas conforme

- La droite "perpendiculaire" à D passant par a est la droite (ad) qui joint a au pôle de D. Problème : elle n'est pas perpendiculaire au sens euclidien, le modèle ne conserve pas les angles (on dit qu'il n'est pas conforme).
- Une autre manifestation de la non conformité : comme la symétrie τ_D laisse invariante les tangentes, ces tangentes devraient être perpendiculaires à D, ce qui n'est pas le cas. Figure
- C'est cette remarque qui va nous mener au modèle suivant, mais il va falloir accepter que les droites ne soient plus droites !

Un modèle conforme : le disque de Poincaré

- Le plan est encore l'intérieur du disque unité $\mathbf{D}$, mais cette fois, les droites non euclidiennes sont les arcs de cercle orthogonaux au bord Γ (et les droites passant par le centre). Figure La Barre de menu d'Yves Martin.

Un modèle conforme : le disque de Poincaré

- Le plan est encore l'intérieur du disque unité $\mathbf{D}$, mais cette fois, les droites non euclidiennes sont les arcs de cercle orthogonaux au bord Γ (et les droites passant par le centre). Figure La Barre de menu d'Yves Martin.
- On vérifie la propriété fondamentale d'Euclide : par deux points passe une droite et une seule.

Un modèle conforme : le disque de Poincaré

- Le plan est encore l'intérieur du disque unité $\mathbf{D}$, mais cette fois, les droites non euclidiennes sont les arcs de cercle orthogonaux au bord Γ (et les droites passant par le centre). Figure La Barre de menu d'Yves Martin.
- On vérifie la propriété fondamentale d'Euclide : par deux points passe une droite et une seule.
- Maintenant ce modèle est conforme : les *angles des droites (i.e. de leurs tangentes) sont les mêmes qu'en euclidien.

Un modèle conforme : le disque de Poincaré

- Le plan est encore l'intérieur du disque unité $\mathbf{D}$, mais cette fois, les droites non euclidiennes sont les arcs de cercle orthogonaux au bord Γ (et les droites passant par le centre). Figure La Barre de menu d'Yves Martin.
- On vérifie la propriété fondamentale d'Euclide : par deux points passe une droite et une seule.
- Maintenant ce modèle est conforme : les *angles des droites (i.e. de leurs tangentes) sont les mêmes qu'en euclidien.
- En revanche, il n'est pas isométrique : il y a une distance naturelle dans $\mathbf{D}$ qui n'est pas celle du plan euclidien (les distances augmentent au bord, *Escher, *équilatéral). Pour des précisions, voir en Bonus.

Quatrième partie

Quelques propriétés du plan hyperbolique

Propriétés du plan hyperbolique : parallèles et perpendiculaires

- Comme on l'a vu dans le modèle de Klein, il y a deux notions de parallèles, mais par un point il passe soit deux, soit une infinité de parallèles à une droite. Figure

Propriétés du plan hyperbolique : parallèles et perpendiculaires

- Comme on l'a vu dans le modèle de Klein, il y a deux notions de parallèles, mais par un point il passe soit deux, soit une infinité de parallèles à une droite. Figure
- Deux droites perpendiculaires à une même droite sont (faiblement) parallèles. Figure

Propriétés du plan hyperbolique : parallèles et perpendiculaires

- Comme on l'a vu dans le modèle de Klein, il y a deux notions de parallèles, mais par un point il passe soit deux, soit une infinité de parallèles à une droite. Figure
- Deux droites perpendiculaires à une même droite sont (faiblement) parallèles. Figure
- Mais si l'on a deux parallèles, une perpendiculaire à l'une n'est pas nécessairement perpendiculaire à l'autre. Précisément, deux droites parallèles ont une seule perpendiculaire commune. Figures 1 et 2

D'autres propriétés du plan hyperbolique

- La somme des angles d'un triangle est $< \pi$. Figure

D'autres propriétés du plan hyperbolique

- La somme des angles d'un triangle est $< \pi$. Figure
- Comme dans le plan euclidien, on a des notions de milieu et de médiatrice. Figure

D'autres propriétés du plan hyperbolique

- La somme des angles d'un triangle est $< \pi$. Figure
- Comme dans le plan euclidien, on a des notions de milieu et de médiatrice. Figure
- Si ABC est un triangle et si O est l'intersection des médiatrices de A, B et A, C on a $OA = OB$ et $OA = OC$, donc $OB = OC$ et O est sur la médiatrice de B, C, de sorte que les médiatrices du triangle sont concourantes. Figure

D'autres propriétés du plan hyperbolique

- La somme des angles d'un triangle est $< \pi$. Figure
- Comme dans le plan euclidien, on a des notions de milieu et de médiatrice. Figure
- Si ABC est un triangle et si O est l'intersection des médiatrices de A, B et A, C on a $OA = OB$ et $OA = OC$, donc $OB = OC$ et O est sur la médiatrice de B, C, de sorte que les médiatrices du triangle sont concourantes. Figure
- Mais, attention ...

Médiatrices, attention

- Les médiatrices d'un triangle ne sont pas toujours concourantes. Figure

Médiatrices, attention

- Les médiatrices d'un triangle ne sont pas toujours concourantes. Figure
- Pour comprendre le phénomène, on peut revenir au modèle de Klein, sans oublier de regarder ce qui se passe à l'extérieur. Figure

Médiatrices, attention

- Les médiatrices d'un triangle ne sont pas toujours concourantes. Figure
- Pour comprendre le phénomène, on peut revenir au modèle de Klein, sans oublier de regarder ce qui se passe à l'extérieur. Figure
- Dans le modèle de Klein, les médiatrices ont tout de même une propriété : elles concourent dans le disque, ou en dehors (et cela signifie alors qu'elles admettent une perpendiculaire *commune).

Ce que nous enseignent les géométries non euclidiennes pour la géométrie euclidienne

Toutes les géométries ?

- Il y a donc, à côté de la géométrie euclidienne, des géométries non euclidiennes, mais comment les classer ?

Toutes les géométries ?

- Il y a donc, à côté de la géométrie euclidienne, des géométries non euclidiennes, mais comment les classer ?
- Et d'abord, question philosophique 2 : À quoi reconnaît-on une géométrie non euclidienne ?

Toutes les géométries ?

- Il y a donc, à côté de la géométrie euclidienne, des géométries non euclidiennes, mais comment les classer ?
- Et d'abord, question philosophique 2 : À quoi reconnaît-on une géométrie non euclidienne ?
- Attention, l'habit ne fait pas le moine. Ceci est bien la géométrie euclidienne. Figure Figure

Toutes les géométries ?

- Il y a donc, à côté de la géométrie euclidienne, des géométries non euclidiennes, mais comment les classer ?
- Et d'abord, question philosophique 2 : À quoi reconnaît-on une géométrie non euclidienne ?
- Attention, l'habit ne fait pas le moine. Ceci est bien la géométrie euclidienne. Figure Figure
- Question philosophique 3 : Combien y a-t-il de géométries planes distinctes ?

Toutes les géométries ?

- Il y a donc, à côté de la géométrie euclidienne, des géométries non euclidiennes, mais comment les classer ?
- Et d'abord, question philosophique 2 : À quoi reconnaît-on une géométrie non euclidienne ?
- Attention, l'habit ne fait pas le moine. Ceci est bien la géométrie euclidienne. Figure Figure
- Question philosophique 3 : Combien y a-t-il de géométries planes distinctes ?
- Essentiellement trois : les géométries euclidienne, hyperbolique et elliptique, voir BONUS.

Question didactique : Que nous apprend l'étude des géométries non euclidiennes pour l'enseignement de la géométrie euclidienne ?

Il n'est évidemment pas question d'enseigner les géométries non euclidiennes dans le secondaire. Cependant, l'étude de ces géométries montre, à rebours, quelles sont les notions vraiment fondamentales dans le cadre euclidien, parce qu'elles sont spécifiques de la géométrie euclidienne.

La géométrie euclidienne est une géométrie affine

- Cela signifie, en particulier, qu'on a une notion de parallèle pertinente. Ce n'est pas le cas en géométrie non euclidienne.

La géométrie euclidienne est une géométrie affine

- Cela signifie, en particulier, qu'on a une notion de parallèle pertinente. Ce n'est pas le cas en géométrie non euclidienne.
- Cela signifie aussi qu'on dispose d'un véritable invariant aire. En géométrie non euclidienne il est contenu dans l'invariant angle (th. de Gauss-Bonnet).

La géométrie euclidienne est une géométrie affine

- Cela signifie, en particulier, qu'on a une notion de parallèle pertinente. Ce n'est pas le cas en géométrie non euclidienne.
- Cela signifie aussi qu'on dispose d'un véritable invariant aire. En géométrie non euclidienne il est contenu dans l'invariant angle (th. de Gauss-Bonnet).
- Cela mène à toute une panoplie de résultats de nature affine : Thalès, Ménélaus, Céva, etc. Ces résultats ne subsistent pas en géométrie non euclidienne.

Les similitudes

- Dans toutes les géométries, le groupe des isométries est de dimension 3 (ce qui correspond aux cas d'égalité des triangles).

Les similitudes

- Dans toutes les géométries, le groupe des isométries est de dimension 3 (ce qui correspond aux cas d'égalité des triangles).
- Mais, en géométrie euclidienne, au-delà de ce groupe, il y en a un autre : les transformations qui conservent l'orthogonalité ou l'égalité des figures, à savoir les similitudes, qui forment un groupe de dimension 4 ("le groupe principal" de Klein).

Les similitudes

- Dans toutes les géométries, le groupe des isométries est de dimension 3 (ce qui correspond aux cas d'égalité des triangles).
- Mais, en géométrie euclidienne, au-delà de ce groupe, il y en a un autre : les transformations qui conservent l'orthogonalité ou l'égalité des figures, à savoir les similitudes, qui forment un groupe de dimension 4 ("le groupe principal" de Klein).
- En géométrie non euclidienne il n'y a rien de tel : ni homothéties, ni similitudes.

Similitudes et non euclidien : historique

- Plusieurs mathématiciens ont perçu cette difficulté :

Similitudes et non euclidien : historique

- Plusieurs mathématiciens ont perçu cette difficulté :
- déjà, vers 1663, Wallis a prouvé le postulat d'Euclide en supposant l'existence de triangles semblables non isométriques,

Similitudes et non euclidien : historique

- Plusieurs mathématiciens ont perçu cette difficulté :
- déjà, vers 1663, Wallis a prouvé le postulat d'Euclide en supposant l'existence de triangles semblables non isométriques,
- mais c'est surtout Gauss qui explicite clairement l'absence de similitudes en géométrie non euclidienne (lettre à Schumacher, 1831) :

  Dans la géométrie non euclidienne il n'y a jamais, dans les figures, de similitude sans égalité.

Le dévissage

- En géométrie euclidienne, le groupe des similitudes est complètement dévissé, on a une suite de sous-groupes distingués

$$\mathrm{Id} \subset T(X) \subset \mathrm{Is}^{+}(X) \subset \mathrm{Is}(X) \subset \mathrm{Sim}(X)$$

Le dévissage

- En géométrie euclidienne, le groupe des similitudes est complètement dévissé, on a une suite de sous-groupes distingués

$$\mathrm{Id} \subset T(X) \subset \mathrm{Is}^{+}(X) \subset \mathrm{Is}\,(X) \subset \mathrm{Sim}\,(X)$$

- De plus, tous les quotients sont abéliens et donnent naissance à des invariants orientés (vecteur, angle orienté, signe des transformations, rapport de similitude)

Le dévissage

- En géométrie euclidienne, le groupe des similitudes est complètement dévissé, on a une suite de sous-groupes distingués

$$\mathrm{Id} \subset T(X) \subset \mathrm{Is}^{+}(X) \subset \mathrm{Is}\,(X) \subset \mathrm{Sim}\,(X)$$

- De plus, tous les quotients sont abéliens et donnent naissance à des invariants orientés (vecteur, angle orienté, signe des transformations, rapport de similitude)
- Ces invariants orientés se comportent bien par composition : $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}+\vec{w}}$ et $\rho(a,\theta) \circ \rho(b,\phi) = \rho(c,\theta+\phi)$, c'est essentiellement la relation de Chasles !

Pas de dévissage en non euclidien

- En géométrie non euclidienne, le groupe des isométries n'est pas du tout dévissé, au contraire, il est **simple** (en elliptique) et presque en hyperbolique.

Pas de dévissage en non euclidien

- En géométrie non euclidienne, le groupe des isométries n'est pas du tout dévissé, au contraire, il est **simple** (en elliptique) et presque en hyperbolique.
- On peut définir des vecteurs le long d'une droite et des angles orientés en un sommet, mais ils ne s'ajoutent bien que s'ils sont de même droite ou de même sommet : il n'y a **pas de relation de Chasles**.

Les angles

En géométrie euclidienne, quand on utilise l'outil "angles", on dispose de quatre accessoires bien commodes :

- les notions de complémentaire et supplémentaire (ou la relation de Chasles),

Les angles

En géométrie euclidienne, quand on utilise l'outil “angles”, on dispose de quatre accessoires bien commodes :

- les notions de complémentaire et supplémentaire (ou la relation de Chasles),
- le lien angles-parallèles (angles alternes-internes et correspondants),

Les angles

En géométrie euclidienne, quand on utilise l'outil "angles", on dispose de quatre accessoires bien commodes :

- les notions de complémentaire et supplémentaire (ou la relation de Chasles),
- le lien angles-parallèles (angles alternes-internes et correspondants),
- la somme des angles d'un triangle,

Les angles

En géométrie euclidienne, quand on utilise l'outil “angles”, on dispose de quatre accessoires bien commodes :

- les notions de complémentaire et supplémentaire (ou la relation de Chasles),
- le lien angles-parallèles (angles alternes-internes et correspondants),
- la somme des angles d'un triangle,
- le théorème de l'angle inscrit.

Les angles

En géométrie euclidienne, quand on utilise l'outil "angles", on dispose de quatre accessoires bien commodes :

- les notions de complémentaire et supplémentaire (ou la relation de Chasles),
- le lien angles-parallèles (angles alternes-internes et correspondants),
- la somme des angles d'un triangle,
- le théorème de l'angle inscrit.
- En géométrie non euclidienne, rien de tout cela (ou presque) ne subsiste.

Conclusion

- Il y a beaucoup d'arguments en faveur d'un enseignement de la géométrie euclidienne au collège et au lycée : l'utilité pratique, l'importance du "penser géométriquement", l'apprentissage du raisonnement, etc.

Conclusion

- Il y a beaucoup d'arguments en faveur d'un enseignement de la géométrie euclidienne au collège et au lycée : l'utilité pratique, l'importance du "penser géométriquement", l'apprentissage du raisonnement, etc.
- Je renvoie à la Postface de mon livre de géométrie projective pour plus de précisions sur ce thème.

Conclusion

- Il y a beaucoup d'arguments en faveur d'un enseignement de la géométrie euclidienne au collège et au lycée : l'utilité pratique, l'importance du "penser géométriquement", l'apprentissage du raisonnement, etc.
- Je renvoie à la Postface de mon livre de géométrie projective pour plus de précisions sur ce thème.
- Mais on peut concevoir cet enseignement de plusieurs manières.

Conclusion (suite)

- Au moment de la réforme des “maths modernes” la position dominante était d'enseigner en priorité ce qui pouvait se généraliser soit en grande dimension, soit dans les autres géométries, voire dans d'autres domaines.

Conclusion (suite)

- Au moment de la réforme des "maths modernes" la position dominante était d'enseigner en priorité ce qui pouvait se généraliser soit en grande dimension, soit dans les autres géométries, voire dans d'autres domaines.
- Voici ce que disait Dieudonné : *j'ai essayé d'introduire dès que possible les notions qui seront à la base de l'Algèbre et de l'Analyse ... telles que celles d'application linéaire ou multilinéaire, de vecteur propre ...*

Conclusion (suite)

- Au moment de la réforme des "maths modernes" la position dominante était d'enseigner en priorité ce qui pouvait se généraliser soit en grande dimension, soit dans les autres géométries, voire dans d'autres domaines.
- Voici ce que disait Dieudonné : *j'ai essayé d'introduire dès que possible les notions qui seront à la base de l'Algèbre et de l'Analyse ... telles que celles d'application linéaire ou multilinéaire, de vecteur propre ...*
- Un autre exemple, ce que disait Choquet à propos des angles orientés : *Pourquoi les monter en épingle ainsi que la cocyclicité alors que dans* $\mathbf{R}^3$ *cette notion n'a plus de sens. En fait l'essentiel de la géométrie euclidienne peut être traité sans les angles.*

Conclusion (suite)

- Cette position présente plusieurs défauts.

Conclusion (suite)

- Cette position présente plusieurs défauts.
- Elle induit un appauvrissement de la géométrie, qui minore son intérêt comme moyen de formation du raisonnement. À trop vouloir amputer les contenus, les exercices disparaissent ou deviennent triviaux.

Conclusion (suite)

- Cette position présente plusieurs défauts.
- Elle induit un appauvrissement de la géométrie, qui minore son intérêt comme moyen de formation du raisonnement. À trop vouloir amputer les contenus, les exercices disparaissent ou deviennent triviaux.
- Elle conduit à la dégradation des outils. Ainsi, sans les propriétés des angles, les cas d'isométrie (qui sont le meilleur outil pour faire de la géométrie au collège) deviennent inutilisables.

Conclusion (suite et fin)

- Ce que je suggère est, au contraire, de garder en mémoire les spécificités de la géométrie euclidienne par rapport aux autres et des dimensions 2 ou 3 par rapport aux plus grandes et de les mettre en avant.

Conclusion (suite et fin)

- Ce que je suggère est, au contraire, de garder en mémoire les spécificités de la géométrie euclidienne par rapport aux autres et des dimensions 2 ou 3 par rapport aux plus grandes et de les mettre en avant.
- Cela signifie qu'il faut privilégier l'usage des parallèles, des aires, des angles, des similitudes et, plus tard, des invariants orientés.

Conclusion (suite et fin)

- Ce que je suggère est, au contraire, de garder en mémoire les spécificités de la géométrie euclidienne par rapport aux autres et des dimensions 2 ou 3 par rapport aux plus grandes et de les mettre en avant.
- Cela signifie qu'il faut privilégier l'usage des parallèles, des aires, des angles, des similitudes et, plus tard, des invariants orientés.
- Autrement dit, et c'est le grand-père qui parle :

Conclusion (suite et fin)

- Ce que je suggère est, au contraire, de garder en mémoire les spécificités de la géométrie euclidienne par rapport aux autres et des dimensions 2 ou 3 par rapport aux plus grandes et de les mettre en avant.
- Cela signifie qu'il faut privilégier l'usage des parallèles, des aires, des angles, des similitudes et, plus tard, des invariants orientés.
- Autrement dit, et c'est le grand-père qui parle :
- Il ne faut pas jeter le bébé avec l'eau du bain !

BONUS

Compléments sur Euclide

Quelques propriétés indépendantes du postulat (suite)

- **Somme de deux angles**

  Soit ABC un triangle. La somme de deux des angles de ABC est strictement plus petite que π.
  Figure Figure

La proposition 4 d'Euclide : premier cas d'égalité (ou d'isométrie) des triangles

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

La "preuve" d'Euclide :

Figure

Soient ABC *et* $A'B'C'$ *deux triangles tels que l'on ait :* $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ *et* $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. *Je dis qu'il est aussi* $AC = A'C'$ *et que ces triangles sont égaux et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi :* $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ *et* $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

La preuve d'Euclide (suite)

En effet, si l'on appliquait le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$ de manière à faire coïncider d'abord les points B et B', puis les côtés BC et $B'C'$, le point C coïnciderait avec C', car $BC = B'C'$. Les côtés BA et $B'A'$ coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, de sorte que le point A à son tour coïnciderait avec A', car $BA = B'A'$. D'autre part, les points C et C' ayant déjà coïncidé, les côtés AC et $A'C'$ coïncideront aussi et ils seront égaux.

Critiques et remédiations

- Que signifie appliquer ?

Critiques et remédiations

- Que signifie appliquer ?
- Le cas indirect

Critiques et remédiations

- Que signifie appliquer ?
- Le cas indirect
- Le remède de Hilbert : prendre le premier cas d'isométrie comme axiome

Critiques et remédiations

- Que signifie appliquer ?
- Le cas indirect
- Le remède de Hilbert : prendre le premier cas d'isométrie comme axiome
- Une version moins brutale ?

Compléments sur les modèles

Une distance ?

- L'absence de similitudes nous incite à penser que la notion de distance est dans la donnée de l'horizon comme le ver est dans le fruit.

Une distance ?

- L'absence de similitudes nous incite à penser que la notion de distance est dans la donnée de l'horizon comme le ver est dans le fruit.
- En termes d'invariants, la distance doit être un invariant de deux points a, b.

Une distance ?

- L'absence de similitudes nous incite à penser que la notion de distance est dans la donnée de l'horizon comme le ver est dans le fruit.
- En termes d'invariants, la distance doit être un invariant de deux points a, b.
- Si l'on pense géométrie projective, donc birapport, il y a un moyen très simple d'avoir un tel invariant :

  on prend les points u, v où la droite (ab) coupe Γ et on considère le birapport $[\![a, b, u, v]\!]$.

Une vraie distance ?

- Le birapport $[\![a, b, u, v]\!]$ bien un invariant de transitivité pour les couples a, b, mais il ne vérifie pas les propriétés usuelles (inégalité ou égalité triangulaire).

Une vraie distance ?

- Le birapport $[\![a, b, u, v]\!]$ bien un invariant de transitivité pour les couples a, b, mais il ne vérifie pas les propriétés usuelles (inégalité ou égalité triangulaire).
- En revanche, il a une jolie propriété : si on a trois points alignés a, b, c, on a la formule (évidente)

$$[\![a, b, u, v]\!] = [\![a, c, u, v]\!] \times [\![c, b, u, v]\!].$$

Une vraie distance ?

- Le birapport $[\![a, b, u, v]\!]$ bien un invariant de transitivité pour les couples a, b, mais il ne vérifie pas les propriétés usuelles (inégalité ou égalité triangulaire).
- En revanche, il a une jolie propriété : si on a trois points alignés a, b, c, on a la formule (évidente)

$$[\![a, b, u, v]\!] = [\![a, c, u, v]\!] \times [\![c, b, u, v]\!].$$

- Pour avoir une distance qui vérifie $d(a, b) = d(a, c) + d(c, b)$ pour a, b, c alignés il suffira de prendre la valeur absolue du logarithme de ce birapport.

Une remarque de Gromov

En géométrie hyperbolique, les triangles sont fins : bien que les longueurs des côtés ne soient pas bornées, la distance du centre du cercle inscrit aux côtés est toujours $\leq \ln 3/2$. Figure

Compléments sur les médiatrices

Médiatrices, une preuve du cas non concourant

- On sait qu'un point O **est sur** la médiatrice de A, B s'il est équidistant de A et B. Pour les droites, on a un résultat dual :

Médiatrices, une preuve du cas non concourant

- On sait qu'un point O **est sur** la médiatrice de A, B s'il est équidistant de A et B. Pour les droites, on a un résultat dual :
- Une droite est **perpendiculaire à** la médiatrice de A, B si elle est équidistante de A et B.
  Figure

Médiatrices, une preuve du cas non concourant

- On sait qu'un point O **est sur** la médiatrice de A, B s'il est équidistant de A et B. Pour les droites, on a un résultat dual :
- Une droite est **perpendiculaire à** la médiatrice de A, B si elle est équidistante de A et B.
  Figure
- On en déduit la *preuve du cas non concourant.

D'autres modèles

Un autre modèle : le demi-plan de Poincaré

Cette fois, le plan hyperbolique est le demi-plan supérieur du plan euclidien ordinaire, formé des points (x, y) avec $y > 0$. Les droites sont de deux types : soit des demi-droites verticales, soit des demi-cercles centrés sur l'axe des x. Figure

On passe du demi-plan de Poincaré au disque du même par l'application :

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

Un dernier modèle : la pseudo-sphère de Beltrami (1868)

- Ce modèle est le seul qui soit isométrique (c'est-à-dire où les angles et les distances hyperboliques sont les mêmes que dans l'espace euclidien).

Un dernier modèle : la pseudo-sphère de Beltrami (1868)

- Ce modèle est le seul qui soit isométrique (c'est-à-dire où les angles et les distances hyperboliques sont les mêmes que dans l'espace euclidien).
- C'est une surface, appelée pseudo-sphère, à courbure négative constante, obtenue en faisant tourner une *tractrice autour d'un axe. Figures 1 2

Un dernier modèle : la pseudo-sphère de Beltrami (1868)

- Ce modèle est le seul qui soit isométrique (c'est-à-dire où les angles et les distances hyperboliques sont les mêmes que dans l'espace euclidien).
- C'est une surface, appelée pseudo-sphère, à courbure négative constante, obtenue en faisant tourner une *tractrice autour d'un axe. Figures 1 2
- Représentation paramétrique de la tractrice :

$$x = \frac{1}{\operatorname{ch} t}, \quad y = t - \operatorname{th} t, \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

Beltrami (suite)

Ce modèle présente toutefois deux défauts :

- Ce n'est un modèle que d'une partie du plan hyperbolique (en termes du demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}$, des points $y \geq 1$).

Beltrami (suite)

Ce modèle présente toutefois deux défauts :

- Ce n'est un modèle que d'une partie du plan hyperbolique (en termes du demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}$, des points $y \geq 1$).
- Ce n'est pas un modèle bijectif (le plan hyperbolique s'enroule une infinité de fois autour de la pseudo-sphère).

La géométrie elliptique

Une autre géométrie non euclidienne : la géométrie sphérique

- Le "plan" c'est la sphère de rayon 1. On a une notion de longueur, d'angle et d'aire qui sont conformes à celles de l'espace euclidien ambiant.
- Les géodésiques sont les grands cercles (c'est-à-dire les intersections de la sphère avec les plans diamétraux). Ce sont les droites de cette géométrie.
- La somme des angles d'un triangle est plus grande que π (formule de Girard).

Les deux péchés originels de la géométrie sphérique

- En géométrie sphérique, le premier axiome d'Euclide : par deux points distincts passe une droite et une seule, est en défaut lorsque les points sont antipodes. Il y a **une infinité** de grands cercles qui les joignent (penser aux pôles et aux méridiens).
- Les droites ne sont pas ordonnées (et pour cause : ce sont des cercles !)

Remède au premier péché originel : la géométrie elliptique

- **Remède** : on identifie les points antipodes. On a donc l'hémisphère nord, équateur compris, mais en identifiant les points antipodes de l'équateur.
- En projetant sur le plan équatorial on obtient un disque, avec les points diamétralement opposés identifiés. Les droites sont des arcs de cercles qui joignent deux points opposés du disque. Barre Figure
- Topologiquement, les droites sont toujours des cercles (donc non ordonnées).

La géométrie elliptique : propriétés

- Il n'y a pas de parallèles (donc plus d'angles alternes-internes, etc.). Figure
- La somme des angles d'un triangle est $> \pi$. Figure
- Les médiatrices, hauteurs, etc. d'un triangle sont concourantes. Figure 1 Figure 2
- Les cercles, voire les triangles, peuvent parfois avoir une drôle de tête ... Figure
- Mais, si l'on n'a pas peur de l'exotisme, la géométrie elliptique c'est le paradis.

Les seules géométries

Argument 1, les formes quadratiques

Le plan est le plan projectif $\mathbf{P}(E)$, avec les coordonnées homogènes (x, y, t) et les droites $ux + vy + wt = 0$. Pour avoir une notion d'orthogonalité, on se donne en plus une forme quadratique sur E^* et il n'y a que trois possibilités :

- définie positive : $u^2 + v^2 + w^2$ qui donne le cas elliptique,
- de Lorentz : $u^2 + v^2 - w^2$ qui donne le cas hyperbolique,
- dégénérée : $u^2 + v^2$ qui donne le cas euclidien.

Voir sur ma page web, livre de géométrie projective, Partie IV et V.

Argument 2, le théorème d'uniformisation

Le plan est une surface de Riemann simplement connexe (sans trous). Poincaré a montré qu'il n'y a que trois possibilités :

• le plan euclidien,

• le disque qui donne la géométrie hyperbolique,

• la sphère qui donne la géométrie elliptique (en quotientant par antipodie).

Argument 3, les groupes classiques

La géométrie plane est une géométrie métrique dont le groupe d'isométries doit être de dimension 3 (transitif sur les couples point-droite avec le point sur la droite). Les seules solutions sont :

- le groupe $PGL(2, \mathbf{R})$ qui donne la géométrie hyperbolique,
- le groupe $O^+(3, \mathbf{R})$ qui donne la géométrie elliptique
- le groupe des isométries du plan euclidien,

Argument 4, les axiomatiques

Les théories axiomatiques mènent elles aussi aux trois géométries phares :

• Euclide, revisité par Hilbert ou d'autres,

• Bachmann et son axiomatique à base de groupes et d'involutions (réflexions).

La tentation de la nouveauté

Certains réfutent la géométrie euclidienne considérée comme ringarde :
Voici un exemple, très certainement discutable, d'une "nouvelle géométrie" qu'on pourrait aborder à l'école et qui serait plus proche des préoccupations des élèves : la géométrie des réseaux. C'est devenu une banalité : nous vivons dans des réseaux multiples, internet, ... Les grands réseaux ont des géométries qui n'ont rien d'euclidien. ... Plutôt que d'obliger les collégiens à apprendre par cœur, et sans explication, que le volume d'une boule de rayon R *est* $\frac{4}{3}\pi R^3$*, ne serait-il pas préférable de les faire réfléchir à la croissance exponentielle des boules dans les réseaux sociaux (combien y a-t-il d'amis des amis de mes amis ?). Comment se propage l'information (ou les fausses informations) à l'intérieur d'un réseau ? ...*

La tentation de la nouveauté (suite)

La géométrie a changé. Elle ne manipule plus seulement des triangles et des cercles ; elle se préoccupe du monde qui nous entoure qui n'est, heureusement, que très rarement euclidien.

Étienne Ghys (Images des mathématiques, 18/02/2015)