Les géométries non euclidiennes
et ce qu'elles nous apprennent
sur la géométrie euclidienne et son enseignement

Daniel PERRIN

Introduction

Ce texte est la rédaction élargie d'une conférence donnée le 18 mai 2016 dans le cadre de la journée *Math-Monde* de l'IREM de Paris 7. Je rappelle que mon objectif principal ici n'est pas l'étude des géométries non euclidiennes pour elles mêmes, pour cela je renvoie (par exemple) à mon projet de livre [15], mais il est de comprendre leurs points communs et leurs différences avec la géométrie euclidienne, afin de bien mesurer ce qui fait la singularité de celle-ci. Je pense en effet depuis longtemps qu'il est essentiel de disposer de cette réflexion [1] pour penser l'enseignement de la géométrie euclidienne au collège et au lycée et l'épisode de la récente confection des programmes de collège m'a conforté dans cette opinion. En effet, avant de décider que telle ou telle notion n'a plus sa place dans les programmes, peut-être faut-il s'interroger sur sa profondeur et son importance.

Mise en garde

Je vais évoquer ici quelques faits historiques et quelques notions philosophiques. N'étant ni philosophe, ni historien, je ne le fais que parce que je crois

1. À l'heure actuelle, l'étude des géométries non euclidiennes ne fait pas partie de la formation des professeurs. Pour ma part, je le regrette et, depuis quelques années, j'ai essayé de les évoquer chaque fois que je le pouvais dans les modules de master d'Orsay destinés à la formation des maîtres.

que cela éclaire mon propos. Si ces assertions comportent quelques erreurs, le lecteur voudra bien me les pardonner.

1 Quelques questions “philosophiques” sur les géométries non euclidiennes

Contrairement à ce que j'ai fait lors de l'exposé oral, je commence en rassemblant un certain nombre de questions que je nomme philosophiques [2]. Placées au début de ce texte, elles sont largement prématurées, mais elles serviront de fil conducteur à ce qui suit.

1.1 La question de l'existence

1.1.1 Bien poser la question

Une question essentielle est celle de l'existence des géométries non euclidiennes. On sait qu'elle a été contestée dans le passé. Kant, par exemple, attribuait à la géométrie euclidienne une nécessité absolue comme la seule géométrie qui pouvait être construite dans l'intuition et réfutait donc l'existence de géométries non euclidiennes, voir [13]. Si Kant avait l'excuse de venir avant Bolyai et Lobatchevsky, et surtout avant Klein ou Poincaré, d'autres, qui contestent encore l'existence de ces géométries aujourd'hui n'ont plus cette excuse [3]. Cela étant, sur ce point de l'existence, il y a deux niveaux de questions : celui des gens qui ne connaissent rien aux mathématiques et celui de ceux qui en connaissent un peu, c'est-à-dire les mathématiciens. Ce que je voudrais expliquer ici c'est que, même pour les seconds, ces questions d'existence ne sont pas si simples.

1.1.2 Bolyai et Lobatchevsky

On dit couramment que Bolyai et Lobatchevsky ont inventé la géométrie hyperbolique. Mais il n'est pas si évident de dire ce qu'ils ont fait exactement et cela montre bien l'ambiguité propre à cette époque. L'un comme l'autre utilisent les axiomes d'Euclide, sauf bien entendu l'axiome des parallèles, et en déroulent les conséquences. D'une certaine manière, ce qu'ils font c'est aussi ce qu'avaient fait avant eux Saccheri, Lambert et Legendre. La seule

2. J'emploie ce mot au sens des mathématiciens pour dire qu'il s'agit de questions qui ne relèvent pas directement des mathématiques, mais plutôt de la signification de leurs résultats.

3. Voir par exemple la réaction de Rachid Matta à l'article [5] d'Étienne Ghys.

différence, mais elle est sans doute décisive d'un point de vue conceptuel, c'est qu'ils pensent, non pas qu'ils vont aboutir à une contradiction, mais au contraire qu'ils ont créé un nouveau monde. C'est assez clair pour Bolyai, qui commence par vouloir prouver le postulat, que son père en dissuade, et qui bascule de l'autre côté [4]. Mais, la question demeure de justifier cet optimisme un peu naïf : en quoi est-on assuré de l'existence de cette géométrie nouvelle ou au moins de sa non-contradiction [5] ?

1.1.3 Gauss

D'ailleurs, à la même époque que Bolyai, Gauss était bien conscient, lui, de la difficulté. Voilà ce qu'il dit :

Pour traiter la Géométrie, dès les débuts, d'une manière bien ordonnée, il est indispensable de démontrer la possibilité de l'existence du plan. La définition habituelle renferme trop de choses et implique déjà un théorème à proprement dire tacite. L'on doit s'étonner que tous les écrivains, depuis Euclide jusqu'à nos jours, se soient mis à l'œuvre d'une façon si négligente.

1.1.4 Modèles

La réponse apportée par la quête des modèles à la question de l'existence des géométries non euclidiennes est de la ramener au cas euclidien. En réalité, c'est une réponse qui ne devrait pas être convaincante pour les mathématiciens, dans la mesure où l'existence d'un modèle de la géométrie euclidienne n'est pas plus assurée que les autres [6]. Cela étant, le poids de la tradition, voire de l'ancienneté, plaide en faveur des modèles euclidiens et atteste de leur validité. À partir de là, les géométries non euclidiennes, que l'on peut représenter au sein de la géométrie euclidienne comme on le verra, ont une existence tout aussi assurée que leur sœur aînée.

Une question historique intéressante est d'ailleurs la suivante : à l'époque, disons au milieu du XIX-ième siècle, et parmi le public des mathématiciens, y a-t-il eu un basculement en faveur de l'existence de la géométrie hyperbolique quand on (Beltrami, ou Klein, ou Poincaré) en a exhibé un modèle ? Je n'ai pas de réponse historique sur ce sujet.

4. Il dit : *À partir de rien, j'ai créé un étrange et nouvel univers.*

5. Kant notamment faisait une différence entre ces deux concepts. Depuis le théorème de complétude de Gödel, les mathématiciens savent que la non-contradiction d'une théorie est équivalente à l'existence d'un modèle.

6. On est ici à nouveau au cœur des théorèmes de Gödel, entre modèles et non-contradiction, avec l'épée de Damoclès du théorème d'incomplétude, même si ce théorème n'a jamais empêché les mathématiciens de dormir.

1.2 Bien comprendre ce qui est en jeu

Attention, la plupart des gens, dès lors qu'ils ont entendu parler de géométrie non euclidienne, se focalisent sur le fait que les droites de cette géométrie ne sont pas des droites mais des arcs de cercles, voire des courbes plus compliquées. Cela n'est pourtant pas l'essentiel et si l'on est un esprit fort, on peut aller jusqu'à dire que cela n'a rien à voir, comme le montre l'exemple suivant [7]. Il s'agit du plan $\mathbf{R}^2$ usuel, mais où l'on définit les droites et plus généralement les éléments géométriques de manière exotique. Pour cela, on considère l'application $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $\Phi(x, y) = (x, y + x^2)$. C'est évidemment une bijection et, si l'on transporte les notions de la géométrie euclidienne par Φ, on a un modèle du plan euclidien où les droites sont des paraboles, où les cercles ont des formes bizarres, etc. Cela étant, c'est le plan euclidien et pas autre chose, voir Fig. 1 et 2 !

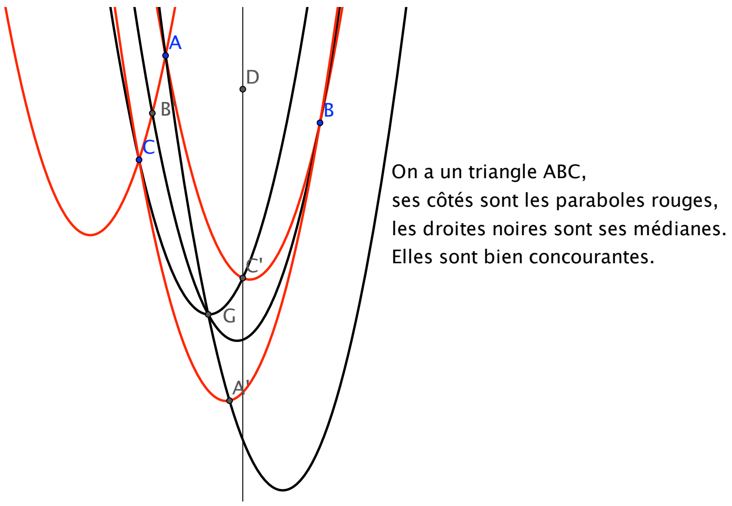


FIGURE 1 – Un triangle du plan euclidien et ses médianes !

On peut même faire bien pire en choisissant une bijection Φ beaucoup moins régulière. On peut même choisir une bijection de $\mathbf{R}^2$ sur tout autre espace de même cardinal. On n'est pas loin de Hilbert disant qu'on pouvait aussi bien nommer les objets de la géométrie tables et chopes de bière au lieu de points et droites.

En résumé, ce qui importe pour affirmer que deux géométries sont distinctes ce n'est pas l'apparence de leurs objets, qui n'est qu'anecdotique, mais les théorèmes qu'on y démontre.

7. Exemple que m'a suggéré Yves Martin.

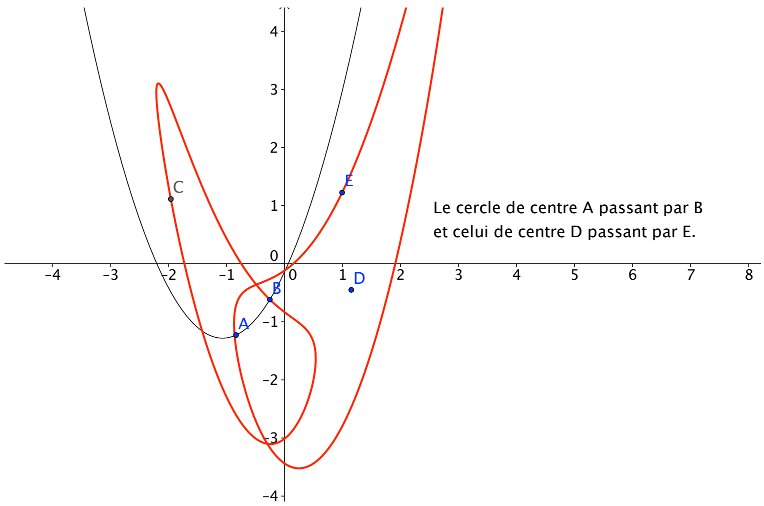


Figure 2 – Les cercles du plan euclidien !

1.3 Et le point de vue physique ?

La question la plus simple : qu'est-ce qu'une droite ? est sans doute la plus difficile. Bien sûr, il ne faut pas perdre de vue le monde physique et les réponses données dans les manuels d'autrefois (un fil tendu entre deux points, le fil à plomb, le pli d'une feuille de papier, etc.) ne sont pas si mauvaises. Mais cela n'a pas grand-chose à voir avec ce que nous faisons ici, qui est de nature axiomatique [8]. En tous cas, l'exemple du plan des paraboles montre qu'il ne peut y avoir de définition purement mathématique de la droititude [9] : on pourra toujours transformer le plan, les droites etc., sans en altérer aucune des propriétés !

2 Le postulat d'Euclide et ses conséquences

Dans ce paragraphe, et après cette excursion dans les hautes sphères de la pensée, on revient sur terre, donc à Euclide, en examinant quelques-uns de ses résultats et en précisant si oui ou non ils dépendent du postulat des parallèles. **Attention**, si l'on ne précise pas **tous** les axiomes utilisés, et notamment les questions de position (que signifient les expressions : du même côté, de part et d'autre, etc.) on court au-devant de graves ennuis. D'ailleurs, sur ce point, Euclide est imparfait à de nombreux endroits et cela justifie la refonte opérée

8. Les mathématiques sont-elles nécessairement axiomatiques ? Pour une discussion sur ce thème, voir Annexe 8.1.

9. Encore un brave néologisme ...

par Hilbert vers 1900, voir [10]. Comme je ne veux pas alourdir inutilement ce texte et comme mon but principal n'est pas de discuter des axiomes, je ne donnerai pas tous les détails sur ce point.

2.1 L'axiome d'Euclide

2.1.1 L'axiome originel d'Euclide

Attention, le cinquième postulat [10] d'Euclide est souvent énoncé dans la version de Proclus, qui est postérieure. Voici la version originale, dans la traduction de Peyrard (celle de Kayas formule les choses de manière plus moderne), voir Fig.3.

2.1 Axiome. *Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

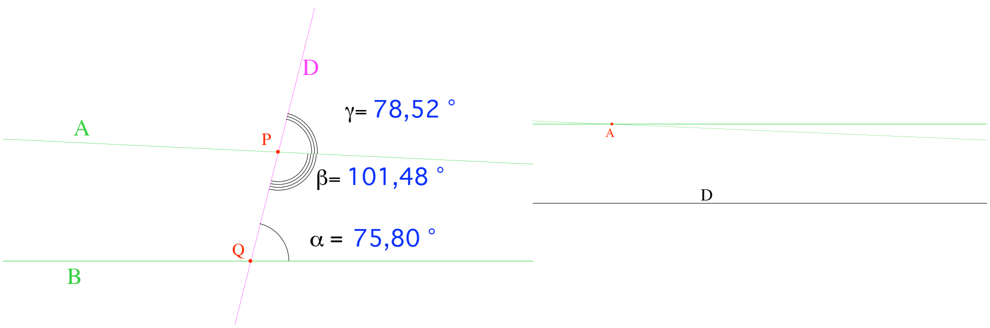


Figure 3 – L'axiome dans les versions d'Euclide et de Proclus.

2.1.2 La variante de Proclus

Nombre de successeurs d'Euclide ont essayé de prouver le cinquième postulat à partir des autres, voir 3.1 ci-dessous. C'est notamment le cas de Proclus (410-483). Pour ce faire, il prétend démontrer un lemme qui affirme que si une droite coupe une droite elle coupe aussi ses parallèles. Son raisonnement est le suivant, voir Fig. 4. On a deux parallèles (BE) et (CD) et une droite passant par E. Sur cette droite, on considère un point F situé dans le même demi-plan que (CD) par rapport à (BE). Lorsque la distance EF

10. Les mathématiciens actuels ne font plus vraiment de différence entre les mots *axiome* et *postulat*.

tend vers l'infini, la distance FH de F à la droite (BE) dépasse la distance des deux parallèles, donc (EF) coupe (CD).

Il ya plusieurs points faibles dans cette preuve. Déjà, l'utilisation de la notion de demi-plan nécessite un nouvel axiome (et écarte d'emblée la géométrie elliptique). Ensuite, outre le fait que l'assertion "FH tend vers l'infini" n'est pas évidente (c'est ce qu'on appelle l'axiome d'Aristote, que l'on peut prouver avec l'axiome d'Archimède, voir [8] Prop. 35.6), le point fautif essentiel est que la distance d'un point de (BE) à (CD) n'est pas nécessairement constante. En géométrie hyperbolique cette distance tend vers l'infini quand on s'approche de l'horizon.

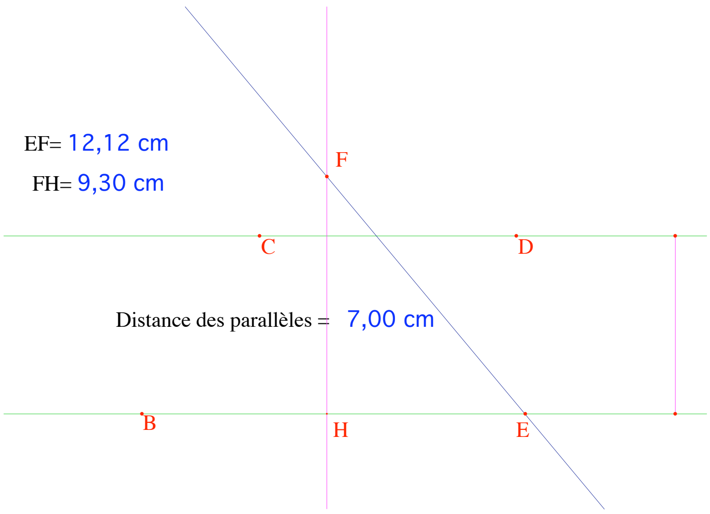


Figure 4 – Le raisonnement de Proclus.

Le raisonnement de Proclus ne prouve donc pas le postulat d'Euclide. En fait, sous la forme suivante, le résultat qu'il annonce est équivalent [11] au cinquième postulat, comme nous le verrons en 2.15 et 2.16 ci-dessous :

2.2 Axiome. *Étant donnés un point A du plan et une droite D, il existe une et une seule droite parallèle à D passant par A.*

Cet axiome sera repris par Playfair (1748-1819), mais l'antériorité de Proclus ne fait guère de doute, sauf peut-être pour les britanniques ...

11. Pourvu qu'on dispose de quelques axiomes de position supplémentaires.

2.2 Des résultats indépendants du postulat

Pour alléger les notations on parlera de l'angle π au lieu de l'angle plat (ou encore de deux droits).

2.2.1 Le premier cas d'égalité des triangles

2.3 Proposition. (Premier cas d'isométrie des triangles [12]) *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose qu'on a $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Alors, les triangles sont isométriques [13] et, en particulier on a les égalités d'angles $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.*

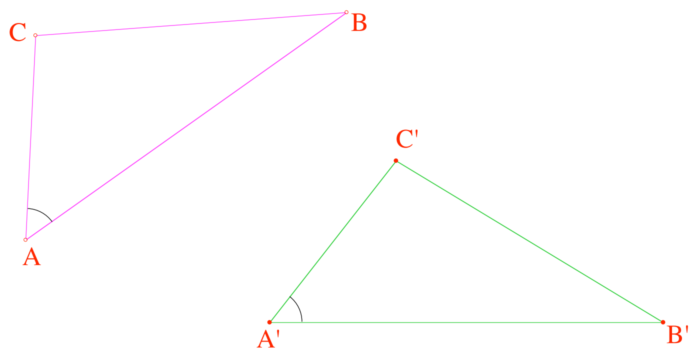


Figure 5 – Le premier cas d'égalité des triangles.

Démonstration. Euclide "prouve" ce résultat par la méthode de superposition. Sa démonstration repose sur un axiome implicite (il "applique" un triangle sur l'autre). D'ailleurs, dans le système d'axiomes revu par Hibert, cette proposition est devenue un axiome. Ma proposition, voir [20] un jour peut-être, est plutôt d'ajouter à l'axiomatique d'Euclide un axiome de transitivité d'un groupe de "mouvements" sur les drapeaux [14] qui permet de rendre correcte la preuve d'Euclide. L'existence d'un tel groupe est ce qui permet de prouver l'homogénéité du plan : points et droites sont tous "pareils", et de donner un sens aux notions d'égalité de longueurs et d'angles : deux segments sont de même longueur s'ils sont superposables, c'est-à-dire s'il existe

12. Dans tout ce qui suit, quand on parle de triangle, il est supposé non aplati.
13. Euclide (et on continue ainsi jusque vers 1960) dit "égaux".
14. Un drapeau est formé d'un point, d'une demi-droite issue de ce point et d'un demi-plan limité par cette demi-droite. Dire que le groupe des mouvements est transitif sur les drapeaux signifie que l'on peut amener un drapeau sur un autre par un mouvement.

un mouvement qui envoie l'un sur l'autre. Mon opinion est qu'en dépit de son apparence "moderne", cette version de l'homogénéité est plus proche d'Euclide et de l'intuition que la version de Hilbert.

2.2.2 Angles opposés par le sommet

2.4 Proposition. *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

Démonstration. Ils sont supplémentaires d'un même troisième[15].

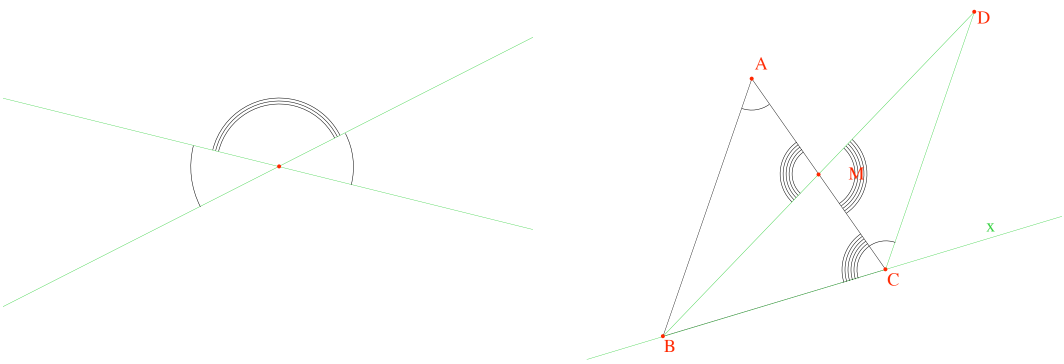


FIGURE 6 – Angles opposés par le sommet, somme de deux angles.

2.2.3 La somme de deux angles d'un triangle

2.5 Proposition. *Soit ABC un triangle. La somme de deux des angles de ABC est plus petite que π.*

Ce résultat est équivalent à la Proposition 16 d'Euclide[16]. Je donne ici essentiellement la preuve d'Euclide, mais dite sous forme moderne. Là encore, on verra qu'elle repose sur des axiomes non explicités.

Démonstration. Montrons par exemple qu'on a $\widehat{A} + \widehat{C} < \pi$, voir Fig. 6. On considère le milieu M de $[AC]$, puis on construit le point D symétrique de B par rapport à M. Le point D est dans le secteur ouvert $\widehat{ACx}$ (où $[Cx)$ est la demi-droite opposée à $[CB)$). En effet, il est dans deux demi-plans ouverts, l'un limité par (BC) contenant A, l'autre limité par (AC) et ne contenant pas B. Pour ce dernier c'est parce que $[BD]$ coupe (AC) en M, pour l'autre parce

15. Ici on utilise en fait deux axiomes : l'homogénéité, qui permet de dire que les angles plats sont tous égaux, et la conservation par les mouvements de l'addition géométrique des angles (la mise côte à côte).

16. Qui dit qu'un angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés.

que M y est, donc aussi le segment ouvert $]BM[$. Cela montre que l'angle $\widehat{BCD}$ est $< \pi$. Par ailleurs, les triangles AMB et CMD sont isométriques (on a $AM = CM$, $BM = DM$ par construction, et les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{CMD}$ sont opposés par le sommet). On en déduit l'égalité d'angles $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$. La somme des angles en A et C du triangle est donc $\widehat{BCD}$ (car A est dans le secteur en question) qui est $< \pi$.

2.6 *Remarque.* Cette preuve utilise implicitement les deux axiomes suivants :

2.7 Axiome. *Chaque droite D est munie d'une*[17] *relation d'ordre total sans plus petit ni plus grand élément.*

Cet axiome permet de parler de segments et de demi-droites.

2.8 Axiome. *Une droite D partage le plan en trois parties non vides disjointes : D et deux demi-plans ouverts notés E^+ et E^-. Deux points a, b sont dans le même demi-plan (on dit aussi "du même côté de D") si et seulement si $[ab]$ ne rencontre pas D.*

Pour plus de détails sur ce thème, je renvoie à mon cours du module *Projet de géométrie* :

`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Cours1.pdf`

`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Coursangles.pdf`

L'usage de l'ordre sur les droites et des demi-plans fait que cette preuve n'est pas valable en géométrie elliptique. D'ailleurs, là les choses sont plus compliquées, ne serait-ce que la notion même de triangle, voir [15], prop. 6.3.4.

2.2.4 Perpendiculaires et parallèles 1

2.9 Proposition. *Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.*

Démonstration. Sinon, ces droites formeraient un triangle avec deux angles droits.

2.3 Des conséquences du postulat

Dans ce paragraphe, on suppose que le postulat d'Euclide (sous la forme d'Euclide ou de Proclus) est vérifié. Pour être tranquille, on suppose aussi les axiomes d'ordre 2.7 et 2.8 ci-dessus.

17. Il y en a automatiquement deux, opposées l'une de l'autre. En choisir une revient à orienter la droite. Si l'on préfère, on peut aussi se contenter de définir la relation "entre". Ainsi le segment $[ab]$ sera l'ensemble des points m qui sont entre a et b.

2.3.1 Transitivité du parallélisme

2.10 Proposition. *La relation de parallélisme est transitive.*

Démonstration. Supposons D parallèle à D' et D' parallèle à D''. Il s'agit de montrer que D et D'' sont parallèles. Sinon, D et D'' sont distinctes et se coupent en M. Mais alors, par M il passe deux parallèles à D' contrairement au postulat sous la forme de Proclus.

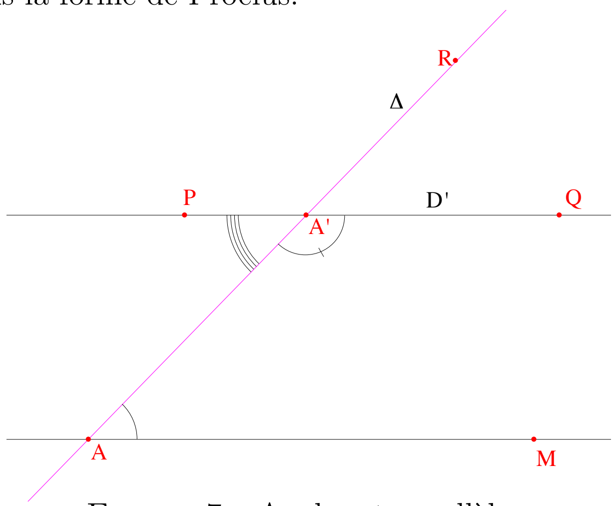


FIGURE 7 – Angles et parallèles.

2.3.2 Angles alternes-internes et correspondants

2.11 Proposition. *Soient D, D' deux droites parallèles. Une droite Δ coupe D en A et D' en A'. Alors les angles alternes internes $\widehat{PA'A}$ et $\widehat{A'AM}$ sont égaux, ainsi que les angles correspondants $\widehat{RA'Q}$ et $\widehat{A'AM}$.*

Démonstration. Montrons la première assertion. Si les angles ne sont pas égaux, on peut supposer par exemple $\widehat{A'AM} < \widehat{PA'A}$. Mais alors, la somme des angles $\widehat{A'AM}$ et $\widehat{QA'A}$ est plus petite que π, de sorte que D et D' se coupent en vertu du postulat, énoncé sous la forme d'Euclide.

La seconde assertion en résulte en utilisant les angles opposés par le sommet.

2.3.3 Perpendiculaires et parallèles 2

2.12 Proposition. *Soient D, D' deux droites parallèles et soit Δ une droite perpendiculaire à D. Alors elle est aussi perpendiculaire à D'.*

Démonstration. Notons A le point d'intersection de D et Δ. On note d'abord que Δ coupe D' (sinon il y aurait deux parallèles à D' passant par A : D et Δ). On appelle A' le point d'intersection de D' et Δ. Les angles alternes-internes en A et A' étant égaux, on voit que Δ est perpendiculaire à D'.

2.3.4 La somme des angles d'un triangle

2.13 Théorème. *La somme des angles d'un triangle est égale à π.*

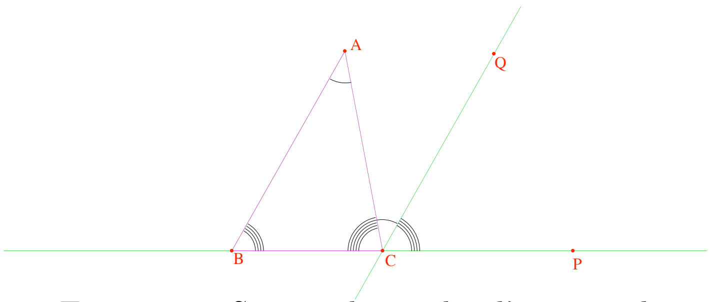


FIGURE 8 – Somme des angles d'un triangle.

Démonstration. On prolonge la demi-droite $[BC)$ en $[BP)$ et on trace la parallèle (CQ) à (AB) passant par C. En vertu de 2.11 on a les égalités d'angles : $\widehat{BAC} = \widehat{ACQ}$ (alternes-internes) et $\widehat{ABC} = \widehat{QCP}$ (correspondants). On en déduit que la somme des angles du triangle est égale à $\widehat{BCA} + \widehat{ACQ} + \widehat{QCP} = \widehat{BCP} = \pi$.

2.3.5 Le concours des médiatrices

2.14 Proposition. *Les médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes en un point O qui est centre d'un cercle contenant A, B, C.*

Démonstration. Soit D la médiatrice de $[AB]$ et D' celle de $[AC]$. Ces droites se coupent. En effet, sinon, elles seraient parallèles, donc (AB) qui est perpendiculaire à D le serait aussi à D' (2.12). Mais alors (AB) et (AC) seraient toutes deux perpendiculaires à D', donc parallèles (2.9). C'est absurde puisque ces droites se coupent en A.

Soit O le point d'intersection de ces médiatrices. On a $OA = OB = OC$, donc il est aussi sur la médiatrice de $[BC]$.

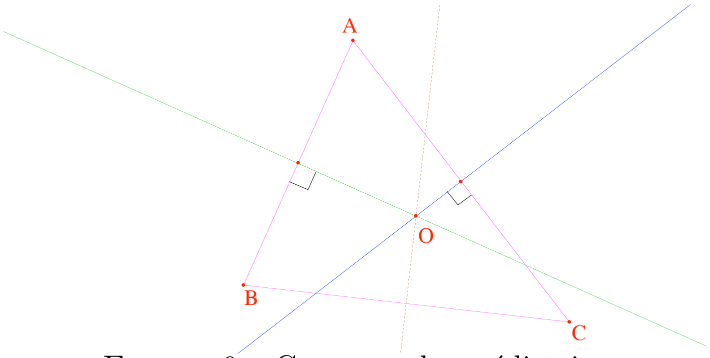


FIGURE 9 – Concours des médiatrices.

2.4 Appendice : l'équivalence d'Euclide et de Proclus

Pour établir les résultats suivants on suppose trois axiomes (implicites chez Euclide) : les axiomes 2.7 et 2.8 et un axiome de report d'angle ou d'homogénéité comme celui utilisé dans la preuve du premier cas d'égalité. Avec ces précautions, on obtient :

2.15 Proposition. *Proclus implique Euclide.*

Démonstration. On suppose qu'on est dans la situation d'Euclide (deux droites A, B et une sécante $D = (PQ)$, $P \in A$, $Q \in B$) avec les angles β et α en P, Q ($\alpha = \widehat{PQx}$) de somme $< \pi$, voir Fig. 3. On suppose que les droites sont parallèles. On trace une demi-droite passant par P qui fait l'angle α avec D en P, dans le même demi-plan limité par D que $[Qx)$. Comme $\beta + \alpha < \pi$ cette droite n'est pas A donc, par Proclus, elle n'est pas parallèle à B qu'elle coupe en R. Mais alors, la somme des angles en P, Q du triangle PQR est égale à π et cela contredit 2.5.

2.16 Proposition. *Euclide implique Proclus.*

Démonstration. Unicité : on se donne D et $A \notin D$, on prend $B \in D$ et l'angle de la parallèle à D par A est déterminé par la propriété des angles alternes-internes. Pour l'existence, on utilise encore les reports d'angles. On a D et A. On prend B, B' sur D et on appelle θ l'angle $\widehat{ABB'}$. En A, on reporte $\widehat{BAA'} = \pi - \theta$. Alors, la droite (AA') est parallèle à D à cause de 2.5.

2.17 *Remarque.* Évidemment, la proposition 2.16 est fausse en elliptique (il n'y a pas de parallèles). Cela est dû au fait que la proposition 2.5 est fausse, conséquence de l'absence des axiomes de position 2.7 et 2.8.

3 Historique

3.1 Les tentatives de preuve de l'axiome des parallèles

Beaucoup de géomètres (Proclus, Clavius, Clairaut, Simson, etc.) ne se sont pas satisfaits de devoir prendre le postulat d'Euclide comme un axiome et ont essayé de le prouver. Toutes ces tentatives ont été infructueuses, mais parfois intéressantes. Lorsqu'elles n'étaient pas évidemment fausses, elles revenaient le plus souvent :

• soit à donner une nouvelle définition de parallèle (par exemple, l'ensemble des points équidistants d'une droite donnée situés d'un même côté de cette droite),

• soit à remplacer l'axiome d'Euclide par un autre (par exemple celui de Proclus, ou celui de Clairaut sur le rectangle).

3.2 La période intermédiaire : Saccheri, Legendre, Lambert

Le principe de Saccheri (1667-1733) comme de Legendre (1752-1833) a été de partir de l'hypothèse que le postulat des parallèles est faux et d'écrire les conséquences de cette hypothèse. Leur espoir, bien entendu, était d'aboutir à une contradiction, ce qui aurait montré que le postulat était vrai. D'ailleurs ils y sont parvenus, en commettant une erreur, ou en rajoutant un axiome, comme Legendre qui ajoute l'axiome :

étant donné un angle $\widehat{ABC}$ *et un point* P *intérieur à cet angle, il existe une droite passant par* P *qui coupe les droites* (AB) *et* (BC).

Il ne présente pas cette assertion comme un axiome, mais il dit : *... or il répugne à la nature de la ligne droite, qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée, puisse être renfermée dans un angle.*

Le cas de Lambert (1728-1777) est original. Connaissant la formule de Girard sur la sphère, voir 6.1, il imagine une sphère de rayon imaginaire pour avoir une somme des angles $< \pi$. Peut-être que Lambert est celui, parmi les précurseurs, qui est passé le plus près de la géométrie hyperbolique : il ne semble pas avoir eu, autant que les autres, le souci de démontrer le cinquième postulat.

3.3 D'autres axiomes pour remplacer le cinquième postulat

Il y a plusieurs axiomes équivalents au cinquième postulat (ou pouvant le remplacer), Proclus, bien sûr, mais aussi :

• Clavius, 1574, pour qui l'ensemble des points d'un demi-plan à distance donnée de la frontière est une droite.

• Wallis, 1663, qui demande qu'il existe des triangles semblables non isométriques (nous reviendrons sur ce point de vue, intimement lié à l'inexistence de similitudes en hyperbolique).

• Gauss, 1799, il y a des triangles d'aire arbitrairement grande (ce point est lié avec le fait que dans le plan hyperbolique l'aire d'un triangle est $< \pi$).

• Enfin, Bolyai père (Farkas) : trois points sont cocycliques ou alignés. Bien sûr c'est très lié au concours des médiatrices.

3.4 Les géométries non euclidiennes : Gauss, Bolyai, Lobatchevsky

3.4.1 Bolyai

Janos Bolyai (1802-1860) est hongrois, capitaine au corps du génie dans l'armée autrichienne. Il est le fils du mathématicien Farkas Bolyai qui a montré le fameux théorème du découpage et qui est un ami de Gauss, le plus grand mathématicien de l'époque. Il écrit vers 1830 *La science absolue de l'espace* où il développe toute une géométrie sans l'axiome des parallèles. Comme il le dit : *À partir de rien, j'ai créé un étrange et nouvel univers.* Son père l'incite à publier ses travaux et ce texte apparaît en appendice d'un ouvrage du père *Tentamen*, 1831. Le père envoie ce texte à Gauss qui répond, en substance : *je savais déjà tout cela depuis longtemps, mais je n'avais pas osé le publier de peur de la réaction du public*[18]. Cela déprime complètement

18. Voici précisément la lettre de Gauss à Bolyai père :

Parlons maintenant un peu du travail de ton fils. Si je commence en disant que je ne puis louer ce travail, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement ; mais je ne puis dire autre chose ; le louer serait me louer moi-même ; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit, coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. Quant à mon travail personnel, dont d'ailleurs j'ai confié peu de chose jusqu'ici au papier, mon intention était de n'en rien laisser publier de mon vivant.

En effet, la plupart des hommes n'ont pas l'esprit juste sur les questions dont il s'agit, et j'ai trouvé seulement bien peu d'entre eux qui prissent un intérêt particulier à ce que je leur ai communiqué à ce sujet. Pour pouvoir prendre cet intérêt, il faut d'abord avoir senti bien vivement ce qui fait essentiellement défaut, et sur ces matières la plupart des hommes sont dans une obscurité complète. C'était, au contraire, mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi. Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière si remarquable.

Janos, qui était, il faut le dire, d'un tempérament ombrageux[19].

3.4.2 Lobatchevsky

Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1792-1856) est russe, il devient recteur de l'université de Kazan en 1826 et publie en 1829 en russe, puis en 1837 en français son article *Géométrie imaginaire*, indépendamment de Bolyai[20]. Outre les formules relatives à l'aire d'un triangle en fonction des angles, Lobachevsky développe des formules pour le cercle, introduit des objets nouveaux, inexistants en géométrie euclidienne comme les horocycles. Malgré cela, il est congédié de son poste en 1846.

3.5 Les modèles non euclidiens : Beltrami, Klein, Poincaré, Riemann

Les travaux de Bolyai et Lobatchevsky, s'ils sont essentiels et précurseurs n'ont, comme Gauss le craignait, pas entraîné l'adhésion de leurs contemporains. En vérité, pour croire à **l'existence** des géométries non euclidiennes, il faudra attendre de les voir vraiment, et dans un cadre euclidien (ou presque). C'est la problématique des modèles. Bien entendu, comme les géométries euclidiennes ne sont pas euclidiennes (sic) on se doute bien qu'on ne parviendra à les représenter dans le cadre euclidien qu'au prix de renoncements. Les principaux modèles de géométries non euclidienne ont été proposés, pour la géométrie hyperbolique, par Beltrami (1868), Klein et Poincaré (dans les années 1870-80), Minkowski, et pour la géométrie elliptique par Riemann (1854). Nous allons les étudier dans les paragraphes suivants. Pour toutes précisions, voir [15].

4 La quête des modèles

On a vu au paragraphe 1 l'intérêt de cette recherche de modèles : le but est, d'abord et avant tout, de convaincre les sceptiques de l'existence des géométries non euclidiennes en les leur faisant voir dans un cadre euclidien.

19. Il a à son actif 13 duels victorieux au sabre.

20. Comme le remarque Bolyai père, les découvertes apparaissent souvent simultanément en plusieurs endroits, comme les violettes au printemps !

4.1 Les objectifs de la quête des modèles

Pour représenter une image convenable d'une géométrie plane, euclidienne ou non, les modèles cherchés doivent remplir un certain nombre de conditions.

1) On doit avoir un "plan" qu'on puisse représenter comme une partie d'un plan ou d'un espace euclidien comme expliqué ci-dessus.

2) On doit avoir un plan qui ressemble à un plan, c'est-à-dire qui soit une variété de dimension 2, donc une surface.

3) On doit avoir des droites qui soient de dimension 1, donc des courbes, et qui vérifient les propriétés d'incidence et en tous cas le premier axiome d'Euclide : par deux points passe une droite et une seule [21]. Parmi les requêtes qui concernent les axiomes, implicites chez Euclide, mais explicites chez Hilbert, il y a la question de l'ordre. Si l'on souhaite avoir des droites ordonnées, la géométrie elliptique sera bannie [22] car ses droites sont topologiquement des cercles, donc non ordonnées.

Ensuite, si l'on mène cette quête dans l'esprit du programme d'Erlangen de Felix Klein (voir [12]) :

4) On doit avoir un plan issu de la géométrie-mère : la géométrie projective et spécialement du plan projectif $\mathbf{P}(E)$. Si l'on garde points et droites, éventuellement sur une partie du plan, cela donnera déjà les trois premiers points.

5) On doit disposer d'un groupe de transformations assez gros pour avoir les propriétés de transitivité sur les points, les droites, les drapeaux. En effet, on a en vue (entre autres) le premier cas d'égalité des triangles et on sait que la transitivité sur les drapeaux est nécessaire dans la preuve d'Euclide.

On souhaite enfin récupérer les propriétés métriques :

6) On doit avoir des notions analogues à celles de la géométrie euclidienne : orthogonalité, distance, angle. En termes d'Erlangen, il s'agit (pour distance et angle) d'invariants de double transitivité.

7) On doit avoir des droites qui soient des lignes de plus court chemin. C'est le côté riemannien de notre quête.

8) Enfin, on doit avoir, si possible, une compatibilité entre les invariants de ces géométries (longueur, angle) et ceux du modèle (par sa structure euclidienne).

Inutile de dire que si l'on ajoute toutes ces requêtes on obtient un Graal impossible à atteindre, voir ci-dessous Annexe 8.2. Dans ce qui suit on va

21. C'est ce qui fait que la géométrie sphérique est écartée au profit de sa sœur elliptique.

22. C'est ce qui faisait dire jadis à Jacqueline Lelong-Ferrand que la géométrie hyperbolique était "plus euclidienne" que l'elliptique.

produire une construction en suivant en priorité les principes 4) et 5), donc le programme d'Erlangen.

4.2 La construction dans l'esprit d'Erlangen

On part donc de l'une des idées-force de Klein, le fait que toutes les géométries sont dans la géométrie projective et qu'elles s'obtiennent avec une donnée supplémentaire. Le groupe d'une telle géométrie est le sous-groupe du groupe des homographies qui laisse cette donnée invariante.

4.2.1 Le plan affine

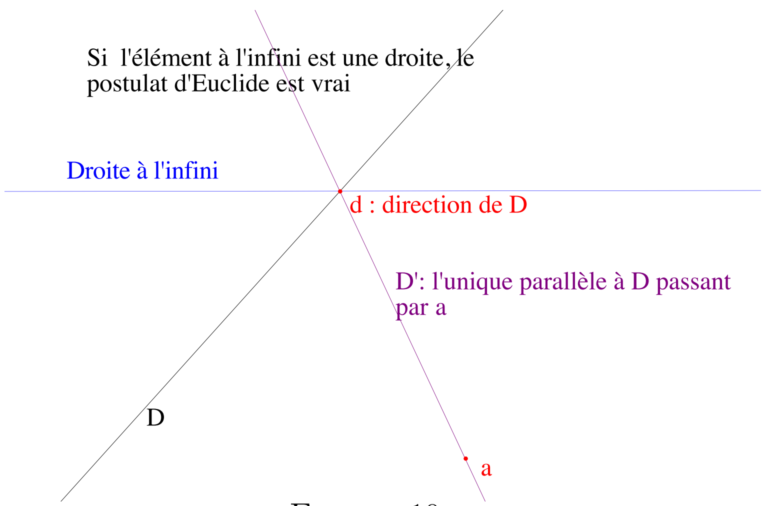


FIGURE 10 –

On sait que la géométrie affine (dont la géométrie euclidienne est une sous-géométrie) s'obtient à partir de la géométrie projective en se donnant une droite, décrétée à l'infini, et que les droites parallèles sont les droites qui se coupent à l'infini (c'est-à-dire qui ont même "direction" : $\delta := D \cap D_\infty = D' \cap D_\infty$). La question qui se pose alors est : pourquoi avoir pris une droite à l'infini ? Il y a une double réponse, d'abord c'est le plus simple, et ensuite cela assure le postulat d'Euclide : si on se donne une droite D et un point a, l'unique parallèle à D passant par a est la droite (ad) où d est la direction de D.

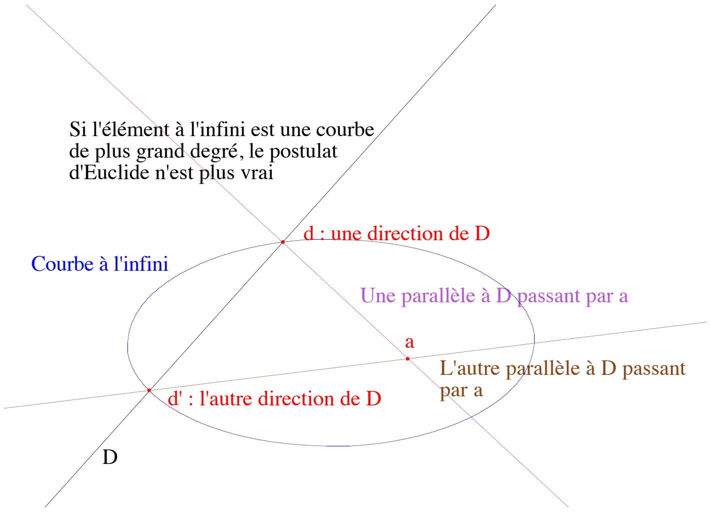


FIGURE 11 –

4.2.2 Un plan affine non euclidien ?

Pour obtenir une géométrie (*a priori* affine) non euclidienne, on va remplacer la droite à l'infini par une courbe algébrique $\Gamma = \Gamma_\infty$ de degré $d \geq 2$. En effet, alors, une droite D coupera (en général) Γ_∞ en d points qui seront autant de directions de D et il y aura d parallèles à D passant par a. C'est justement ce qu'on veut pour certaines des géométries non euclidiennes.

On prend donc une courbe Γ comme infini, appelé **horizon**. Le plus simple est de prendre une conique (disons un cercle puisque toutes les coniques sont projectivement équivalentes). C'est le plus simple et c'est aussi la seule possibilité raisonnable. En effet, si G est le groupe des homographies conservant Γ on souhaite qu'il opère transitivement sur $\mathbf{P}(E) - \Gamma$ (c'est le point 4 ci-dessus : l'homogénéité du plan). Or, en degré ≥ 3, le groupe est beaucoup trop petit, voir Annexe 8.3.

Notons que, si Γ est une conique, le groupe G est (une variété) de dimension 3 (les coniques sont de dimension 5 et le groupe de toutes les homographies de dimension 8, donc celles qui conservent une conique sont de dimension 3). C'est une bonne dimension : c'est celle du groupe euclidien et c'est ce qu'il faut pour avoir les cas d'isométrie des triangles[23].

23. Les triangles, vus comme triplets de points du plan, sont de dimension 6, si le groupe des isométries est de dimension 3, les triangles sont déterminés à isométrie près par 3 paramètres et c'est bien ce que disent les cas d'isométrie.

4.2.3 Le plan de Klein : tout le plan privé de la conique ?

On choisit donc un cercle Γ comme lieu de l'infini. Les droites, elles, sont les droites projectives (éventuellement privées des points de Γ).

On voit apparaître une forme quadratique q naturelle : l'équation de ce cercle, et le groupe G n'est autre que $PO(q)$, les homographies conservant q (ou conservant la conique, c'est pareil). Attention, l'homogénéité n'est pas vraiment réalisée : on a des points avec $q > 0$ et $q < 0$ et on ne peut les échanger [24] par un élément de $PO(q)$. Si l'on veut l'homogénéité, on doit n'en garder que la moitié.

On refuse l'extérieur parce qu'on souhaite non seulement l'homogénéité de l'ensemble des points, mais aussi de celui des droites. Or, par deux points extérieurs passent trois types de droites qui coupent Γ en 0, 1 ou 2 points, voir Fig. 12. Pour l'intérieur, en revanche, il n'y a plus de problème.

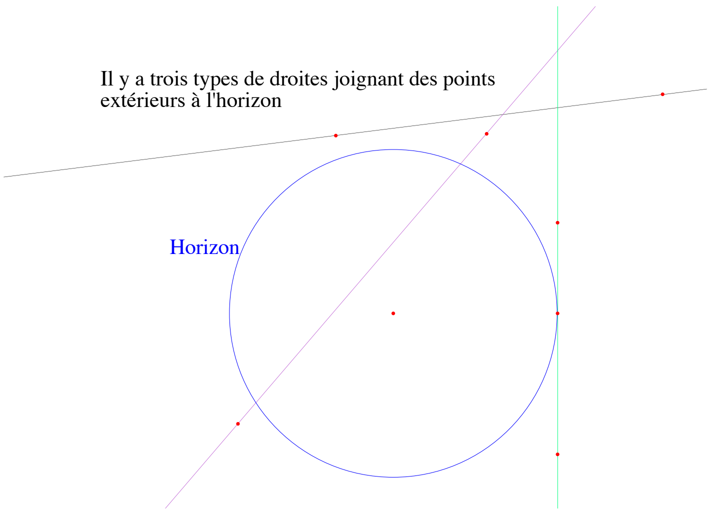


FIGURE 12 –

On prend donc l'intérieur de Γ comme plan. On vient de fabriquer le modèle de Klein $\mathbf{K}$. L'axiome d'Euclide est assuré (par deux points passe une droite et une seule). Les droites sont en bijection avec $\mathbf{R}$, de sorte qu'on peut définir segments et demi-droites. Mais bien sûr, toute droite a deux points à l'infini, de sorte que le postulat d'Euclide n'est pas vrai. Précisément, il y a deux sens pour le mot parallèles dans $\mathbf{K}$: le sens faible, ne pas se couper ou le sens fort, se couper à l'infini. Si l'on se donne une droite D et un point a, il y a une infinité de parallèles au sens faible et deux au sens fort.

24. D'ailleurs, l'extérieur contient des droites, et pas l'intérieur.

4.2.4 L'orthogonalité

On notera que, pour l'instant, on est parti avec une idée de géométrie **affine** et non métrique : on s'est seulement donné l'infini. En fait, on va voir que la métrique est déjà dans cette donnée comme le ver est dans le fruit. C'est essentiel et c'est une grande différence avec le cas euclidien.

Commençons par l'orthogonalité. Que signifie le fait que deux droites D et Δ sont perpendiculaires ? Cela veut dire qu'elles sont sécantes en o et que les deux angles qu'elles déterminent (disons du même côté de Δ) sont égaux. Mais que signifie (au sens du programme d'Erlangen, donc du groupe G) que deux angles sont égaux ? Qu'on peut les échanger par le groupe, donc qu'il existe, par exemple, une transformation τ qui fixe D et transforme l'une des demi-droites Δ^+ issues de o et portées par Δ en l'autre Δ^-. On vérifie facilement [25] qu'alors τ est nécessairement une involution qu'on a évidemment envie d'appeler symétrie axiale (ou réflexion) d'axe D.

Soit donc D une droite du plan de Klein. On cherche à préciser la symétrie τ_D c'est-à-dire l'involution de G qui fixe D. Rappelons que les éléments de G sont les homographies du plaan $\mathbf{P}^2$ qui conservent Γ. On considère les points d'intersection u, v de D et du cercle horizon Γ. Ils sont fixes par τ_D. Mais comme le cercle horizon Γ est invariant par G, les tangentes en u, v aussi sont stables [26] par τ_D. Il en résulte que leur point d'intersection [27] d est fixe par τ_D.

Pour un point $a \in \mathbf{K}$, la perpendiculaire à D passant par a est l'unique droite passant par a et distincte de D qui soit invariante par τ_D. Comme d est fixe par τ_D, il s'agit donc de (ad). On peut d'ailleurs construire l'image a' de a par τ_D. Comme (ad) est stable, a' est sur (ad). On considère un autre point $m \in D$. La droite (ma) coupe Γ en x. Comme (dx) est stable par τ_D, l'image [28] de x est le point y où (dx) recoupe Γ. Mais alors, l'image de la droite (mx) est (my) et $a' = \tau_D(a)$ est à l'intersection de (ad) et de (my).

Comme on l'a dit, on voit que l'orthogonalité est déjà dans la donnée de Γ, mais on constate avec dépit que le modèle n'est pas conforme : les droites D et (ad) sont de drôles de perpendiculaires ...

25. Car τ^2 fixe à la fois D et Δ et une homographie qui fixe quatre points en position générale est l'identité.

26. Une conique projective et une droite sont tangentes si et seulement si leur intersection est un singleton, de sorte que cette notion est conservée par une bijection.

27. Il s'agit bien entendu du pôle de D par rapport à la conique Γ.

28. Les experts reconnaîtront ici l'involution de point de Frégier d.

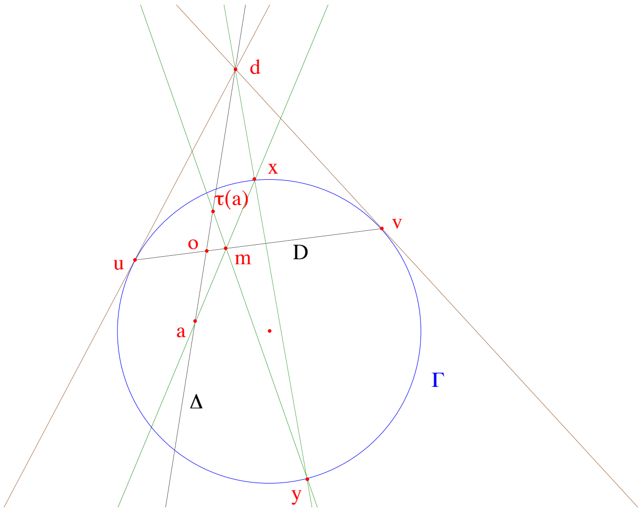


FIGURE 13 –

4.2.5 Annexe, une question naïve : pourquoi pas les perpendiculaires ordinaires ?

On a vu que la notion de perpendiculaire exhibée ci-dessus ne coïncide pas avec la notion euclidienne. Le lecteur peut se demander pourquoi diable on n'a pas pris tout simplement la notion ordinaire. La proposition suivante répond à cette question :

4.1 Proposition. *Une bijection f du disque fermé, conservant le cercle, conservant l'alignement et l'orthogonalité ordinaire, laisse fixe le centre o du disque.*

Démonstration. On sait qu'un triangle abc, dont les sommets sont sur Γ, est rectangle en b au sens ordinaire si et seulement si $[ac]$ est un diamètre de Γ. Cela montre que f conserve les diamètres, donc le centre de Γ.

On voit qu'avec la notion ordinaire, comme le centre du disque est fixe par G, on a perdu l'homogénéité du plan.

4.2.6 La métrique

En euclidien, conserver l'orthogonalité n'est pas l'apanage des isométries, mais des similitudes, et parmi elles les homothéties, qui non seulement sont affines (c'est-à-dire laissent stable D_∞), mais la fixent. Ici, ces transformations n'existent pas et c'est une grande différence avec le cas euclidien (adieu Thalès !) :

4.2 Lemme. *Si une homographie f de $\mathbf{P}^2$ fixe Γ c'est l'identité.*

Démonstration. Soit $m \notin \Gamma$. Deux droites passant par m coupent Γ chacune en deux points. Ces points sont fixes par f, donc aussi m.

L'absence d'homothéties peut nous faire penser que, non seulement l'orthogonalité, mais aussi la distance est contenue dans la donnée de Γ. En termes d'Erlangen, il s'agit de trouver un invariant de non-transitivité sur les couples de points (a, b). Quand on sait un peu de géométrie projective, il est facile d'en fabriquer un. En effet, la droite (ab) coupe Γ en deux points u, v et le birapport $[\![a, b, u, v]\!]$ est un tel invariant. En ce sens c'est une distance. Les traditionalistes ne le trouveront sans doute pas à leur goût, car il ne vérifie pas les propriétés usuelles des distances : l'inégalité triangulaire, sa variante égalité dans le cas aligné, etc. Tout de même, il est positif. Mais avec cet invariant il est facile de fabriquer une vraie distance. En effet, le birapport n'est certes pas additif pour trois points a, b, c alignés, mais il est multiplicatif :

$$[\![a, b, u, v]\!] = [\![a, c, u, v]\!] \times [\![c, b, u, v]\!].$$

(C'est évident en l'écrivant !!) Pour avoir une fonction additive il suffit de prendre le logarithme du birapport (ou plutôt la valeur absolue du logarithme, car il faut que ce soit indépendant de l'ordre de a, b ou de u, v et les permuter passe à l'inverse, donc à l'opposé pour le logarithme). Cette fois plus d'objections ; on vérifie même que les droites sont des géodésiques pour cette distance, voir [15] Ch. 2.

On peut aussi définir des angles, et ce au moins par deux voies : soit à partir des longueurs (en prenant la longueur sur le cercle unité), soit à partir de l'angle droit par division par 2 puis par 4, etc.

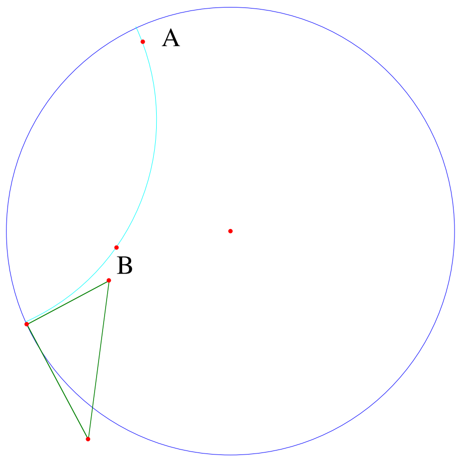
4.2.7 Vers un modèle conforme

On a vu que, dans le modèle de Klein, les droites perpendiculaires au sens hyperbolique ne le sont pas au sens euclidien. Pourtant, pour rassurer les inquiets et convaincre les sceptiques, on voudrait avoir au moins un modèle conforme, c'est-à-dire où les angles sont conservés. Pour réaliser cela, on note qu'il y a des droites du plan de Klein pour qui l'orthogonalité est la bonne (et plus généralement les angles) : celles qui passent par l'origine. On le constate sur la figure et c'est évident car la perpendiculaire (au sens hyperbolique) est la droite qui passe par le pôle du diamètre, qui est à l'infini dans la direction des tangentes, donc perpendiculaire au diamètre au sens usuel. Plus généralement, on voit aisément que le modèle de Klein est conforme à l'origine.

On part donc des droites passant par o, qui nous servent de modèle, et on va leur appliquer un nouveau groupe de transformations avec deux objectifs :

• conserver le cercle Γ,
• avoir des transformations conformes.

Mais on connaît des transformations qui vérifient cela : les inversions, et précisément celles qui conservent Γ, c'est-à-dire celles dont le cercle est orthogonal à Γ. Les nouvelles droites de notre modèle seront les images des droites passant par o par ces transformations. Comme les droites passant par o sont orthogonales à Γ (au sens où elles sont orthogonales aux tangentes), cette propriété sera encore vraie pour leurs inverses. Bien entendu, on aura laissé des plumes dans la bataille, car les droites ne passant pas par o ne seront plus des droites euclidiennes, mais des cercles (en fait des arcs de cercles limités par Γ) avec la propriété d'être orthogonales au bord : on y est ! Le modèle en question est celui du disque de Poincaré, noté **D**. Pour des précisions, voir [15] Ch. 2.



Les droites hyperboliques dans le modèle du disque de Poincaré

FIGURE 14 –

5 Quelques propriétés du plan hyperbolique

Attention, je donne ci-dessous quelques propriétés du plan hyperbolique, mais mon but, encore une fois, n'est pas d'étudier vraiment la géométrie hyperbolique, mais de pointer ses différences avec la géométrie euclidienne. En particulier, je ne donnerai que très peu d'indications de preuves. Le lecteur scrupuleux se reportera à [15] pour les obtenir.

5.1 Parallèles et perpendiculaires

5.1.1 Parallèles

Le plan hyperbolique a été conçu pour mettre en défaut le postulat d'Euclide. En fait, il le contredit de deux manières selon la définition de parallèle que l'on adopte.

• Si l'on définit, comme dans le plan euclidien, des droites parallèles comme ne se coupant pas, il y a une infinité de parallèles à une droite passant par un point donné, voir Fig. 15.

• Si l'on définit, comme en projectif, des droites parallèles comme se coupant à l'infini (donc sur l'horizon) il y a deux parallèles à une droite passant par un point, voir Fig. 16.

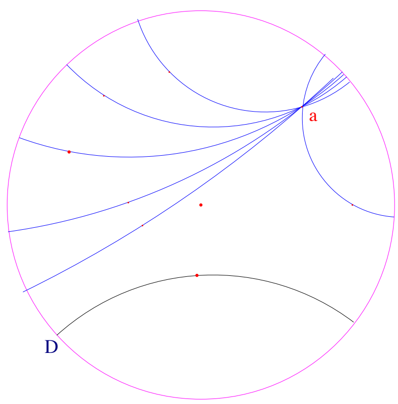


FIGURE 15 – Il y a une infinité de parallèles au sens faible

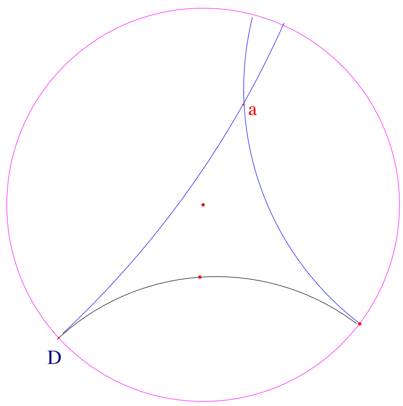


FIGURE 16 – Il y a deux parallèles au sens fort

En vérité, et c'est paradoxal car c'est à partir de la notion de parallèle que le plan hyperbolique a été construit, cette notion est à peu près sans intérêt dans le plan hyperbolique [29]. En effet, la notion faible (ne pas se couper) est une propriété ouverte, donc peu intéressante, et l'expérience montre que la notion forte ne l'est guère plus.

5.1.2 Perpendiculaires

On a vu que, dans une géométrie vérifiant les axiomes 2.7 et 2.8, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles et c'est encore

29. Mais je n'en infère évidemment pas que la géométrie hyperbolique est sans intérêt, voir Annexe 9 ci-dessous pour une confirmation.

vrai en géométrie hyperbolique. En revanche, dans ce cas, si l'on a deux parallèles, une perpendiculaire à l'une n'est pas nécessairement perpendiculaire à l'autre, comme on le voit aussitôt expérimentalement. Précisément, on montre que deux droites parallèles ont une seule perpendiculaire commune. Dans la figure 18, seule la droite violette est perpendiculaire aux droites parallèles données.

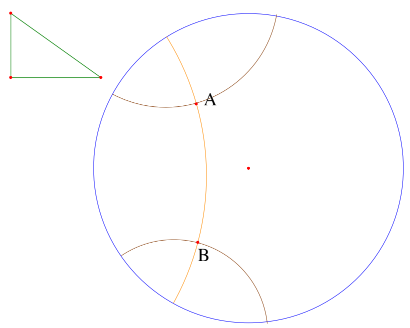


FIGURE 17 – Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième elles sont parallèles

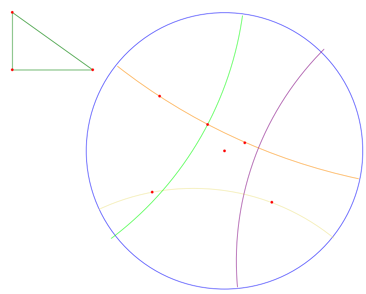


FIGURE 18 – Si on a deux droites parallèles, une perpendiculaire à l'une ne l'est pas nécessairement à l'autre

De plus si l'on a trois droites A, B, C leurs perpendiculaires communes deux à deux sont, en général, distinctes, de sorte qu'on met ainsi en évidence une nouvelle propriété pour trois droites, à côté du fait d'être concourantes, c'est d'admettre une perpendiculaire commune, condition qui implique le parallélisme, mais est bien plus forte, voir Fig. 19. On renvoie à [15] 1.3.14 et 3.4.13 pour toutes précisions.

5.2 La somme des angles d'un triangle

On a dit que le modèle de Poincaré est conforme, de sorte que les angles sont les mêmes dans le plan hyperbolique que dans le modèle. Il y a tout de même une différence cruciale : la somme des angles d'un triangle hyperbolique n'est plus égale à π mais strictement plus petite. Voir Fig. 20.

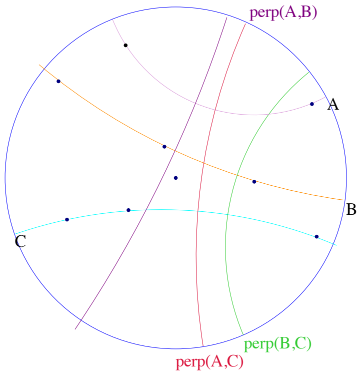


FIGURE 19 – Si on a trois parallèles, leurs perpendiculaires communes deux à deux sont, en général, distinctes

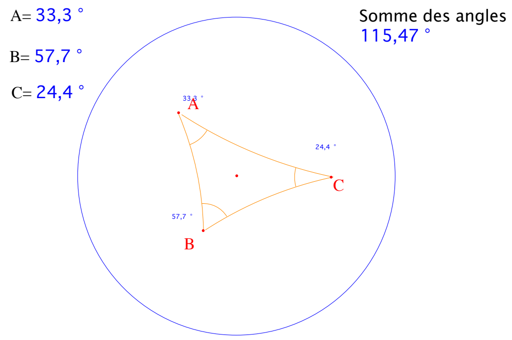


FIGURE 20 – La somme des angles dans le plan hyperbolique

5.3 Le concours des médiatrices

5.3.1 Comme en euclidien ?

Dans le plan hyperbolique on a encore la notion de médiatrice de $[AB]$, avec ses deux propriétés usuelles : perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu et lieu des points équidistants de A, B. On peut se demander si la propriété de concours des médiatrices d'un triangle est encore vraie. L'expérience semble le montrer et la démonstration est la même qu'en euclidien : si O est l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$, on a $OA = OB$ et $OA = OC$, donc $OB = OC$ et O est sur la médiatrice de $[BC]$, voir Fig. 22.

5.3.2 Voire ...

Une expérience un peu plus soigneuse montre que les médiatrices ne sont pas toujours concourantes. C'est le cas en particulier si l'on rend l'angle en A suffisamment obtus. Cependant, on ne peut pas penser qu'il ne subsiste pas quelque propriété dans ce cas. On pourrait imaginer, bien entendu, de remplacer le mot “concourantes” par “concourantes ou parallèles”. L'expérience montre que ce n'est pas le cas (au moins avec la notion forte).

On comprend mieux la situation en la regardant dans le plan de Klein (mais en ne se limitant pas au disque). En effet, dans le plan étendu, les médiatrices sont concourantes soit dans le disque, soit à l'extérieur. Dans ce cas, la **polaire** du point de concours extérieur par rapport au cercle est une perpendiculaire commune aux trois droites.

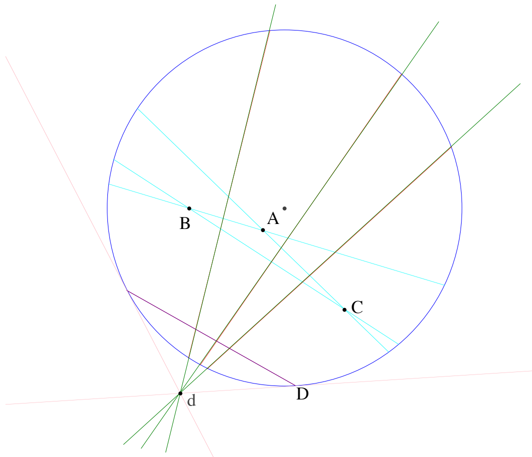


FIGURE 21 – L'explication dans le plan de Klein

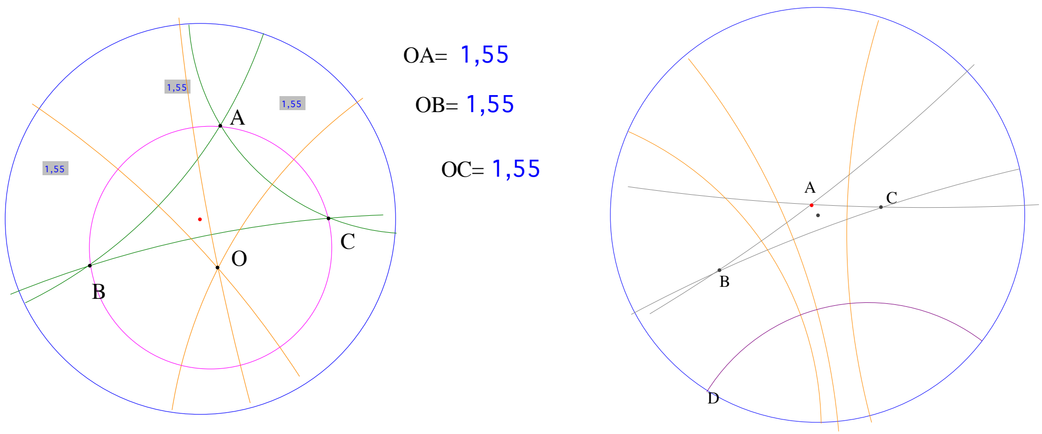


FIGURE 22 – Concours des médiatrices hyperboliques ?

On a donc le résultat suivant, voir Fig. 22 : les médiatrices d'un triangle sont concourantes ou admettent une perpendiculaire commune.

5.3.3 Une preuve

Il reste à démontrer ce résultat. Pour cela, il faut avoir en tête une idée tout à fait essentielle qui est celle de la dualité entre points et droites. Précisément, on connaît la caractérisation suivante des points d'une médiatrice :

• Un point M est sur la médiatrice de A, B si et seulement si A et B sont équidistants de M : $MA = MB$.

Mais, de manière duale, on a une caractérisation des droites perpendiculaires à une médiatrice, voir 8.4 :

• Une droite D est perpendiculaire à la médiatrice de A et B si et seulement si A et B sont équidistants de D (et du même côté).

Avec cela, on peut copier le raisonnement usuel, voir 8.4 pour les détails ou [15] Ch. 3 pour une démonstration englobant tous les cas (y compris celui de la géométrie elliptique).

6 Des géométries sans parallèles : la géométrie sphérique et la géométrie elliptique

Ces géométries sont souvent négligées par les auteurs [30] qui parlent de géométrie non euclidienne, sans doute à cause du fait qu'elles ne vérifient pas les axiomes d'ordre (qui ne sont pas **explicitement** dans Euclide, mais qui sont sous-jacents). En effet, les droites de cette géométrie sont (topologiquement) des cercles, donc non ordonnées, et il n'y a pas de demi-plans.

6.1 Les géodésiques de la sphère

Dans l'espace euclidien, on considère la sphère de centre O et de rayon 1.

Lorsqu'on travaille sur la sphère S, les géodésiques, qui vont remplacer les droites, sont les grands cercles, c'est-à-dire les cercles intersections de S avec les plans diamétraux. Si l'on pense au cas de la sphère terrestre, les méridiens sont des grands cercles, mais pas les parallèles, à l'exception de l'équateur. Bien entendu il y a d'autres grands cercles, qui ne passent pas par les pôles (sur une sphère géométrique on peut prendre comme pôles n'importe quel couple de points antipodes, c'est-à-dire symétriques par rapport à O). Précisément, si A et B sont deux points de S distincts et non antipodes, il existe un unique grand cercle qui passe par A et B, c'est l'intersection de S avec le plan (ABO).

Il n'est pas évident de montrer que les grands cercles sont les géodésiques. On peut s'en convaincre expérimentalement en utilisant un globe terrestre et une ficelle. En revanche, il est facile de montrer que, parmi les cercles tracés sur S et joignant A et B, le grand cercle est le plus court, voir le problème proposé en annexe 8.5 pour une preuve au niveau terminale.

30. Ce paragraphe ne faisait pas partie de l'exposé oral. Voir [15] pour des détails.

6.2 La formule de Girard

Pour tout ce qui concerne angles et aires sur la sphère, on renvoie à [19], chapitre 9.

Contrairement au cas des triangles euclidiens dans lesquels la somme des angles vaut toujours π et à ceux du plan hyperbolique où elle est $< \pi$, sur la sphère cette somme des angles est $> \pi$ comme le montre la formule suivante :

6.1 Théorème. (Formule de Girard) *Soit ABC un triangle tracé sur la sphère unité S, soient T son aire et α, β, γ ses angles, mesurés en radians. On a la formule :*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + T.$$

6.3 Le premier axiome et le quotient

La formule de Girard montre que sur la sphère on a des triangles joufflus, c'est-à-dire dont la somme des angles est plus grande que π. Si l'on en croit Euclide, ce doit être que le postulat n'est pas vrai sur la sphère lorsqu'on utilise comme droites les grands cercles. De fait, il y a une raison toute simple : deux grands cercles se coupent toujours. En effet, leurs plans ont une droite passant par O en commun, donc les cercles se coupent en les points d'intersection de cette droite et de la sphère. Il n'y a donc pas de droites parallèles dans la géométrie sphérique !

Il y a tout de même quelque chose de gênant avec cette géométrie, c'est que, même avant d'aller chercher le postulat des parallèles, il y a un autre axiome d'Euclide qu'elle ne vérifie pas, et c'est même le premier : par deux points distincts passe une droite et une seule. Ici, cet axiome est en défaut lorsque les points sont antipodes. En effet, il y a alors une infinité de grands cercles qui les joignent (penser aux pôles et aux méridiens).

Il y a un moyen de remédier à cela qui consiste à identifier les points antipodes. Cela revient à remplacer la sphère par une autre surface $\overline{S}$, plus bizarre toutefois. Comme on identifie les points antipodes, on peut se limiter aux points de l'hémisphère nord, mais, attention, avec l'équateur compris et en identifiant les points antipodes de l'équateur. On peut se représenter un peu mieux cette surface en projetant l'hémisphère nord sur le plan équatorial. On obtient un disque, mais où les points diamétralement opposés doivent être identifiés. C'est ce qu'on appelle la géométrie elliptique qui vérifie cette fois les premiers axiomes d'Euclide. Les droites sont des arcs de cercles qui joignent deux points opposés du disque.

Pour construire un tel arc, passant par A, B et coupant le cercle de centre O et de rayon R selon un diamètre, on considère l'inversion i de pôle O et de puissance $-R^2$. On pose $A' = i(A)$ et $B' = i(B)$. Ces quatre points sont sur un cercle C' qui est le cercle cherché. En effet, les intersections M et N de C et C' sont échangées par i (car C et C' sont invariants) et donc elles sont alignées avec O.

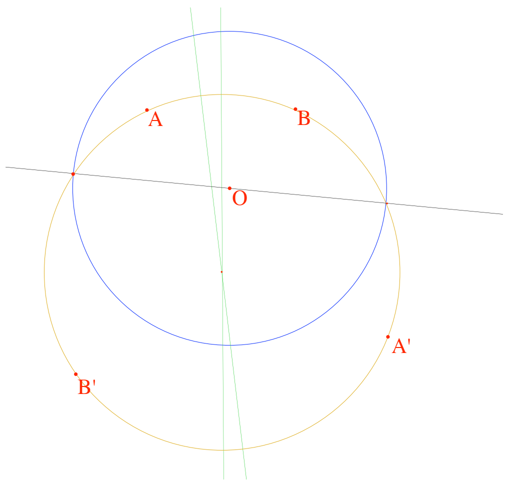


FIGURE 23 – Construction de la droite elliptique passant par deux points.

On peut faire avec cette géométrie à peu près toutes les opérations usuelles de la géométrie[31].

6.4 Les angles

La définition des angles est un peu délicate en géométrie elliptique. En effet, il y a deux segments qui joignent deux points. On choisit en général le plus court des deux. Avec cette convention, on constate que, comme dans la géométrie sphérique, la somme des angles d'un triangle est toujours plus grande que π (et même, dans certains cas, la somme de deux).

6.5 Le concours des médiatrices

On peut faire l'expérience avec Cabri du concours des hauteurs ou des médiatrices : le théorème est vrai, comme en euclidien, voir Fig. 24. Cela étant, il y a une différence : puisqu'il y a deux segments possibles joignant deux points, il y a aussi deux médiatrices (une intérieure et une extérieure).

31. Voir les macros Cabri d'Yves Martin :
http ://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Formateurs/Yves/ these.html

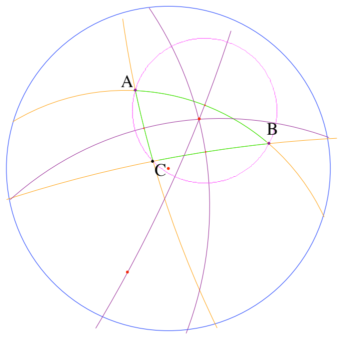


FIGURE 24 – Concours des médiatrices elliptiques.

7 L'apport des géométries non euclidiennes aux géométries euclidiennes

7.1 Les seules géométries ?

On a mis en évidence trois géométries planes : les géométries euclidienne, hyperbolique et elliptique. Trois c'est déjà plus qu'une, mais c'est encore peu. Pourquoi n'y en a-t-il pas vingt ou trente [32] ? C'est ce que j'explique ci-dessous. Attention, chacune des assertions qui suivent correspond à un choix de critères (que l'on peut discuter) et recouvre un théorème (qu'il faudrait prouver). Les critères que je retiens pour une géométrie plane sont essentiellement les suivants :

• Les plans considérés sont des ensembles de points et il y a des parties appelées droites, avec l'axiome d'incidence usuel.

• Ces géométries sont homogènes (c'est-à-dire qu'elles ont un groupe de mouvements transitif sur les points, les droites et même les drapeaux).

• Ce sont des géométries métriques : on a une notion d'orthogonalité des droites et une distance.

Si l'on ne retient pas tous ces critères il y a beaucoup d'autres solutions, par exemple, sans la métrique, il y a les géométries affine et projective. Lors de l'exposé oral un auditeur m'a signalé la géométrie galiléenne, que je ne connaissais pas. Elle ne vérifie pas le second critère (homogénéité) car elle possède une direction de droites privilégiée. En fait, cette géométrie n'est pas vraiment une géométrie plane, mais une géométrie de dimension 1 d'espace, avec une deuxième dimension temporelle. On se reportera au très intéressant livre [21] de Yaglom [33] pour des détails.

32. Comme les brigands dans une bande.
33. Yaglom, lui, retient 9 géométries planes.

7.1.1 Les formes quadratiques

C'est mon point de vue favori. On part du plan projectif $\mathbf{P}(E)$, i.e. de la géométrie mère, qui possède des points et des droites. L'idée est de donner un sens à **l'orthogonalité** des droites. On se donne donc une forme quadratique sur E^*. Si elle est non dégénérée, c'est la même chose qu'une forme sur E et, sur $\mathbf{R}$, on a les deux cas usuels : anisotrope et Lorentz [34] qui donnent les géométries elliptique et hyperbolique, voir [15]. Si elle est dégénérée, on trouve la géométrie euclidienne, voir [16].

Juste pour le fun, on peut noter qu'il y a une quatrième solution : celle d'une forme définie par $u^2 - v^2$ qui doit peu ou prou se ramener à une forme $x^2 - y^2$ sur le plan affine. Les droites $y = \pm x$ sont isotropes et l'orthogonalité c'est la symétrie par rapport à ces droites. Il n'y a pas de vraie distance puisqu'il y a des isotropes ... Cela étant, on a par exemple le concours des hauteurs, voir Fig. 25 et, pour une preuve, la dernière de `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/hauteurs.pdf`.

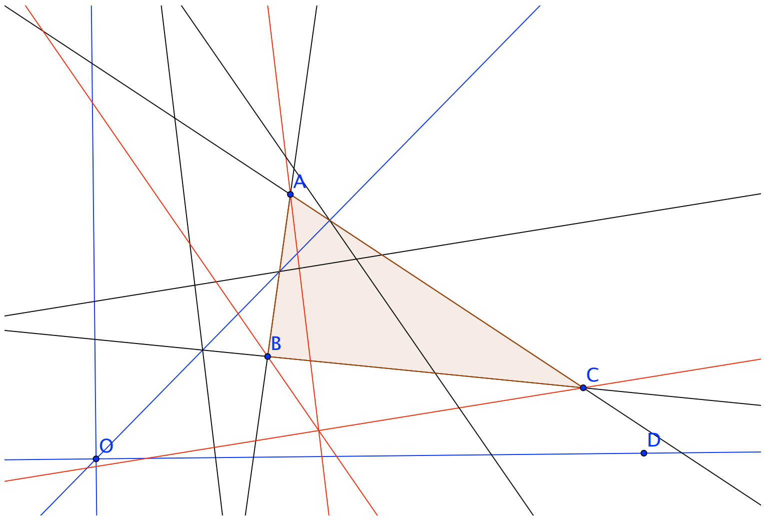


FIGURE 25 – Un plan vraiment bizarre

7.1.2 L'uniformisation

Cette fois, ce qui est premier c'est la notion de surface (au sens variété de dimension 2) et la **métrique** (on se donne une métrique riemannienne). On a donc une notion de distance et des géodésiques qui vont être nos droites,

34. Sur un autre corps, les choses peuvent être plus compliquées.

ainsi qu'un groupe d'isométries. Ce qui fait l'unicité dans ce cas c'est le théorème d'uniformisation de Poincaré : *Toute surface de Riemann simplement connexe*[35] *est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe, ou au disque unité.*

Voir par exemple l'article d'E. Ghys "Géométriser l'espace de Gauss à Perelman" dans Images des mathématiques, 2007, `http://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html`. Voir aussi le livre de Henri Paul de Saint-Gervais *Uniformisation des surfaces de Riemann*, `http://math.unice.fr/~dumitres/Saint-Gervais.pdf`.

7.1.3 Les groupes classiques

Les groupes euclidien $\mathrm{Is}\,(X)$, hyperbolique $PSL(2, \mathbf{R})$ et elliptique $O^+(3, \mathbf{R})$ sont essentiellement les seuls[36] groupes de dimension 3. Les seuls groupes, donc les seules géométries.

7.1.4 Le point de vue d'Euclide

On renvoie à [10], voire à [20] si l'on est patient. Attention, bien sûr, il faut avoir des axiomes adéquats (en particulier, pour trouver la géométrie elliptique il faut renoncer à avoir un ordre sur les droites).

7.1.5 Le point de vue de Bachmann

Ici, la donnée de base est un groupe engendré par des **involutions** (moralement les symétries axiales et centrales) et on traduit les propriétés en termes algébriques (par exemple deux involutions axiales commutent si et seulement si les axes sont perpendiculaires), etc. On renvoie à [1] pour des précisions sur ce sujet.

7.2 Un tour d'horizon des convergences et des différences relatives aux notions enseignées au collège et au lycée

La problématique de ce paragraphe est de comparer les géométries. Une parabole permet de mieux comprendre la question. Imaginons un cosmonaute, perdu dans l'immensité sidérale, dont le vaisseau aborde sur un monde

35. C'est-à-dire sans trous.

36. En tous cas, les seuls groupes de Lie réels semi-simples sont $SL(2, \mathbf{R})$ et $O^+(3, \mathbf{R})$ et leurs variantes évidentes. Le groupe euclidien est un peu différent car c'est une extension de $\mathbf{R}^2$ par $\mathbf{U}$. De ce côté là il y a d'autres possibilités comme le groupe de Galilée, voir [21].

inconnu. Lorsqu'il débarque sur une nouvelle planète, il ignore tout de ce qui l'attend. En particulier il ne sait pas quelle géométrie régit la surface de ce monde : euclidienne, elliptique, hyperbolique. Comment peut-il procéder pour s'en faire une idée, avec seulement une vision locale du monde ? La réponse n'est pas évidente. Le lecteur méditera sur les questions suivantes : comment repérer les droites (i.e. les géodésiques), les angles, les parallèles éventuelles, etc. Ensuite, il imaginera des méthodes (déterminer la somme des angles d'un triangle [37], construire un rectangle, repérer s'il existe des similitudes, etc.)

7.2.1 Quelques points de convergence

Dans les trois cas, on est en présence de géométries planes (i.e. sur une variété de dimension 2), avec une notion de droite et l'axiome d'incidence usuel, avec une métrique, donc les notions de distance, orthogonalité, angle. La distance vérifie les deux propriétés essentielles d'une géométrie : l'inégalité triangulaire et l'additivité dans le cas aligné (les droites sont des géodésiques.) Par ailleurs, on est en présence d'une géométrie avec une forte homogénéité due au fait que le groupe d'isométries est de dimension 3, en particulier, on a les cas d'isométries. Le groupe d'isométries est engendré par les réflexions.

7.2.2 Les avantages des géométries non euclidiennes

Le principal est l'existence d'une dualité [38]. Outre la dualité, il y a, dans le cas hyperbolique, l'existence d'une foule de sous-groupes discrets G du groupe des isométries, qui sont tels que les quotients de $\mathbf{D}$ par G donnent des surfaces de Riemann de genre ≥ 2, voir [4].

7.2.3 Différence majeure numéro 1 : le caractère affine de la géométrie euclidienne

La définition de la géométrie euclidienne à partir du plan projectif et d'une forme **dégénérée** sur le dual (voir [16]), si elle est inhabituelle, met bien en évidence l'existence d'une droite canonique dans le plan projectif (le noyau de la forme), qui va servir de droite à l'infini. Rien de tel n'existe en hyperbolique et en elliptique et cela a deux types de conséquences.

— Qui dit droite à l'infini dit plan affine (le complémentaire de cette droite) et parallèles (les droites qui se coupent sur la droite à l'infini). On sait bien que les parallèles jouent un rôle capital en géométrie euclidienne,

37. Gauss avait procédé ainsi pour vérifier que la terre était ronde en utilisant le triangle formé par sommets les trois collines Brocken, Hohehagen et Inselsberg, éloignées de 100 km environ.

38. Dans le cas hyperbolique, à condition d'utiliser aussi les points extérieurs, voir [15].

chez Euclide (penser aux liens avec les perpendiculaires, aux angles alternes-internes, à Thalès, etc.) et plus tard (penser à l'importance des parallélogrammes pour définir les vecteurs). En revanche, on a vu qu'elles n'ont à peu près aucun intérêt en géométrie non euclidienne.

— À partir du moment où l'on dispose d'un plan affine, on a un invariant associé qui est **l'aire**. Cette notion est porteuse de nombreux résultats (ceux que j'appelle les "lemmes du collège", voir [19] p. 214 et qui ne font que traduire l'invariance de l'aire par le groupe affine, voir [14]), gouvernant toute la partie affine de la géométrie élémentaire (par exemple le théorème de Thalès, voir plus loin). En revanche, même si l'on peut définir l'aire en géométrie non euclidienne, elle n'est pas d'un grand intérêt puisque, dans le cas du triangle par exemple, la formule de Gauss-Bonnet montre qu'elle est égale à la valeur absolue de la différence entre π et la somme des angles. Elle ne constitue donc pas à proprement parler un invariant supplémentaire.

7.2.4 Différence majeure numéro 2 : le groupe des similitudes

Dans les trois géométries usuelles, le groupe des isométries est un groupe de dimension 3 et c'est un de leurs points communs (qui explique qu'il y a toujours besoin de trois invariants pour déterminer un triangle). Mais une autre singularité de la géométrie euclidienne est l'existence, au-delà du groupe des isométries, de celui des similitudes $\mathrm{Sim}\,(X)$, qui est de dimension 4, et qui donne à cette géométrie une souplesse incomparable : on peut non seulement déplacer les figures, mais les augmenter ou les réduire en conservant les angles et les rapports de longueurs, donc la *forme*. Il n'y a rien de tel en géométrie non euclidienne [39], ni homothéties, ni similitudes [40].

7.2.5 Différence majeure numéro 3 : les sous-groupes distingués et les invariants orientés

Dans le cas des géométries non euclidiennes, le groupe des isométries est simple [41] (ou presque). Cela confère à ces géométries une rigidité que n'a

39. C'est un fait que plusieurs mathématiciens avaient noté. Déjà, vers 1663, Wallis avait prouvé le postulat d'Euclide en supposant l'existence de triangles semblables non isométriques, mais c'est Gauss qui le dit le plus clairement (lettre à Schumacher, 1831) : *Dans la géométrie non euclidienne il n'y a jamais, dans les figures, de similitude sans égalité.*

40. En fait, voir 8.6, on peut montrer, au moins dans le cas elliptique, qu'il n'y a aucun groupe intermédiaire (donc aucune géométrie intermédiaire) entre le groupe des isométries et celui des homographies.

41. Cela signifie qu'il n'a pas de sous-groupe distingué non trivial.

pas la géométrie euclidienne. En effet, au contraire, le groupe $\mathrm{Sim}\,(X)$ est totalement dévissé par la suite de sous-groupes distingués :

$$\{\mathrm{Id}\} \subset \mathrm{T}(X) \subset \mathrm{Is}^{+}(X) \subset \mathrm{Is}\,(X) \subset \mathrm{Sim}\,(X),$$

où $\mathrm{T}(X)$ est le groupe des translations, $\mathrm{Is}^{+}(X)$ le groupe des déplacements et $\mathrm{Is}\,(X)$ celui des isométries. Ces sous-groupes étant distingués donnent naissance à des quotients qui sont **tous abéliens**. Cela fournit à chaque pas des invariants algébriques **orientés**, successivement les vecteurs, les angles orientés, le signe des transformations, le rapport de similitude. De plus, le fait d'avoir des homomorphismes à valeurs dans les quotients assure que tous ces invariants se comportent de manière convenable par rapport à la composition des transformations : le vecteur de la translation composée est la somme des vecteurs, l'angle de la rotation composée est la somme des angles, etc. Il n'y a rien de tel en géométrie non euclidienne. On peut bien essayer de définir l'angle d'une rotation ou le vecteur d'une translation, mais ces objets se comportent à peu près aussi mal qu'il est possible (voir [15] Ch. 8) : ils ne s'ajoutent que si les rotations ont même centre ou les translations même direction. En un mot, on perd en géométrie non euclidienne l'un des outils les plus puissants [42] de la géométrie euclidienne : **la relation de Chasles**. C'est d'ailleurs aussi une différence [43] entre la géométrie euclidienne de dimension 2 et celle de dimension 3 où il n'y a plus d'angles orientés.

7.2.6 Différence majeure numéro 4 : la notion d'angle

Lorsqu'on pratique la géométrie euclidienne à la manière d'Euclide, c'est-à-dire en utilisant les cas d'égalité et de similitude des triangles, on est aussitôt confronté à la nécessité d'établir des égalités de longueurs et d'angles. Ce dernier point repose sur plusieurs accessoires qui permettent de faire efficacement ce travail. J'en répertorie quatre types :

– les notions de complémentaire et supplémentaire [44],

– les propriétés des angles vis à vis des parallèles (alternes-internes, etc.),

42. Ce n'est pas parce qu'il s'agit d'une relation connue dès le lycée (autrefois dès le collège), ni parce que nos élèves l'utilisent parfois à tort et à travers, qu'elle n'est pas essentielle !

43. Sur ce point, je suis en désaccord total avec ce que disait G. Choquet à propos des angles orientés : *Pourquoi les monter en épingle ainsi que la cocyclicité alors que dans* $\mathbf{R}^3$ *cette notion n'a plus de sens. En fait l'essentiel de la géométrie euclidienne peut être traité sans les angles.* (Conférence pour Math. en Jeans, 1995) On voit ici en action ce que je décrivais plus haut : le refus de prendre en compte la richesse et la singularité de la géométrie euclidienne plane.

44. Et la relation de Chasles si l'on utilise des angles orientés.

– la somme des angles d'un triangle,
– le théorème de l'angle inscrit.

En géométrie non euclidienne, à l'exception du premier point, tous ces outils disparaissent : les propriétés des parallèles ne subsistent pas, la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à deux droits, il n'y a plus de théorème de l'angle inscrit. Autrement dit, on n'a plus à disposition de quoi utiliser les cas d'isométrie (pour la similitude, c'est encore plus radical puisqu'elle n'existe plus).

Cette difficulté d'utilisation des angles en géométrie non euclidienne ne fait que renforcer en creux leur importance en euclidien où l'on dispose d'outils efficaces pour les utiliser : **l'invariant angle est vraiment l'un des fondements essentiels de la géométrie euclidienne**.

7.2.7 Encore quelques différences de détail

• **Les droites** Attention, la perception élémentaire de la différence (les droites deviennent des arcs de cercle, par exemple), n'est pas du tout pertinente, comme on l'a vu avec l'exemple de la géométrie euclidienne à droites paraboliques. De fait, en hyperbolique, les droites sont de même nature topologique qu'en euclidien. En revanche, en elliptique, il y a une vraie différence : les droites sont bornées, donc il n'y a pas d'ordre (donc pas de demi-droites ni de segments [45]).

• **La distance** Deux différences essentielles à noter : en elliptique, la distance est bornée ; en hyperbolique, elle n'est pas bornée, mais, étant donné un triangle, il y a toujours un point qui est à une distance moindre de $(\ln 3)/2$ des trois côtés : décidément, les triangles sont maigrichons ! Le théorème de Pythagore n'est pas vrai tel quel, mais on en a des avatars : en elliptique $\cos bc = \cos ba \cos ac$, en hyperbolique $\operatorname{ch} bc = \operatorname{ch} ba \operatorname{ch} ac$. Attention enfin, dans ces géométries, les triangles équilatéraux n'ont pas des angles de 60 degrés.

• **Les perpendiculaires et les médiatrices** Une perpendiculaire à une droite n'est pas perpendiculaire à ses parallèles (il y a une seule perpendiculaire commune). Il n'y a ni rectangles ni carrés dans ces géométries.

• **Les symétries**

En hyperbolique, le groupe engendré par les symétries centrales est le groupe des isométries positives, donc très gros. Il y a une seule symétrie centrale pour échanger deux droites faiblement parallèles. En elliptique, il y a identité entre les symétries axiales et centrales et pas d'orientation.

45. Ou alors avec moultes précautions, et lorsque les points sont orthogonaux il n'y a plus de solution, voir [15].

• **Les cercles**

En elliptique ils ont de drôles de têtes quand ils touchent le bord et leurs centres ne sont pas ceux de l'euclidien. Attention, en elliptique, deux cercles peuvent se couper en quatre points. En hyperbolique il y a en plus les horicycles et les équidistantes et on a vu qu'il n'y a pas de cercle passant par trois points en général.

• **Les cas d'égalité des triangles**

On a les mêmes qu'en euclidien, plus un cas avec trois angles. Attention, en elliptique, il y a un invariant supplémentaire, le **signe du spin.**

7.3 Discussion sur l'enseignement

Afin que les choses soient claires, je précise ce que je veux dire ici. Je ne parle que de l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée, pas dans l'enseignement supérieur. La géométrie que l'on enseigne à ce niveau est essentiellement la géométrie euclidienne [46]. Il n'est donc pas question d'enseigner les géométries non euclidiennes [47]. Cela étant, même en se limitant à la géométrie euclidienne, il y a plusieurs manières de concevoir son enseignement. Au moment de la réforme des “maths modernes” la position dominante était d'enseigner en priorité ce qui pouvait se généraliser soit en grande dimension, soit dans les autres géométries, voire dans d'autres domaines.

Ainsi, voici ce que disait Dieudonné : *j'ai essayé d'introduire dès que possible les notions qui seront à la base de l'Algèbre et de l'Analyse ... telles que celles d'application linéaire ou multilinéaire, de vecteur propre ...*

Un autre exemple dans le même sens est la phrase de Choquet à propos des angles orientés citée dans la note 43 ci-dessus.

Le défaut de cette position est un appauvrissement radical de la géométrie : on perd ainsi tout ce qui fait sa richesse et son charme. Ce que je suggère est, au contraire, de garder en mémoire les spécificités de la géométrie euclidienne par rapport aux autres et des dimensions 2 ou 3 par rapport aux plus grandes et de les mettre en avant. Cela signifie qu'il faut privilégier, dans l'enseignement du collège et du lycée, l'usage des parallèles, des aires, des angles, des similitudes et, plus tard, des invariants orientés. En particulier, si l'on pense, comme c'est mon cas depuis très longtemps, voir [11], que l'outil le plus adapté pour faire de la géométrie au niveau du collège est l'emploi des

46. Cela comprend quelques rudiments de géométrie affine. Autrefois il y avait un peu de géométrie projective avec les divisions harmoniques et de géométrie anallagmatique, avec l'inversion, vue en terminale. Ce n'est plus le cas depuis bien longtemps et je le regrette.

47. En revanche, dans l'enseignement post-Bac, cela me semble tout à fait intéressant, notamment en formation des maîtres.

cas d'isométrie des triangles, les propriétés des angles, telles qu'énumérées en 7.2.6, en sont un complément indispensable.

8 Annexes

8.1 Les mathématiques sont-elles nécessairement axiomatiques ?

C'est clairement une question difficile, mais j'y réponds positivement, sans hésiter, pour deux raisons au moins.

8.1.1 Les fondements

Il est clair que si les prémisses d'une théorie ne sont pas suffisamment précisées, les résultats peuvent être totalement divergents. On l'a vu ci-dessus avec Euclide et le cinquième postulat, dont l'absence mène aux géométries non euclidiennes. En outre, on a vu aussi que, dans les Éléments, il y a de nombreux points où les axiomes utilisés ne sont pas explicités (la possibilité de transporter ou de reporter des figures, les questions de position, etc.) et que les résultats annoncés ne sont vrais qu'avec ces axiomes supplémentaires.

Pour résumer, la justification fondamentale des théories axiomatiques c'est qu'on ne sait peut-être pas de quoi on parle, voir 1.2, mais qu'au moins on sait manipuler les objets dont on parle.

8.1.2 Les intermédiaires

À côté de cette nécessité évidente d'avoir des fondements assurés, il est un autre intérêt de l'axiomatique qui est de servir d'intermédiaire, dans une théorie, sans avoir à remonter aux sources. Je donne ici trois exemples.

• La géométrie. Certes, on peut la rattacher aux nombres *via* la théorie des espaces vectoriels (ou affines, ou projectifs), mais l'utilisation d'axiomes comme ceux d'Euclide est un palier qui permet de partir de bases plus directement utilisables.

• Les aires. À l'intérieur même de la géométrie, la théorie des aires, formulée de manière axiomatique, permet de prouver un grand nombre de résultats de nature affine, voir [19].

• Les réels. Plutôt que de se fatiguer à construire les réels à partir des rationnels, voire des entiers ou des ensembles, on peut les utiliser de manière efficace à partir d'un système d'axiomes simple (un corps, ordonné, archimédien et vérifiant par exemple la propriété des suites adjacentes).

8.2 Désespoir !

Dans ce paragraphe on explique pourquoi la recherche de modèles euclidiens des géométries non euclidiennes est désespérée si l'on maintient toutes les exigences du paragraphe 4.1.

Les modèles de la géométrie elliptique ne sont pas vraiment des parties d'un espace euclidien (on doit toujours identifier des points). Cela tient au fait que le plan elliptique est un plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ et que ce plan ne se plonge pas dans $\mathbf{R}^3$, comme l'exprime le théorème suivant (cf. [6] Ch. VII §1 Th. 2) :

8.1 Théorème. *Le plan projectif* $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ *n'est pas orientable donc ne se plonge pas comme une surface de* $\mathbf{R}^3$*.*

Dans le cas hyperbolique, voir [15], les droites sont rectilignes dans certains des modèles (le modèle $\mathbf{K}$ de Klein), mais pas dans les autres, certains sont conformes (les modèles de Poincaré $\mathbf{D}, \mathbf{H}$ et le modèle de Beltrami $\mathbf{B}$), mais pas les autres et le seul qui soit isométrique ($\mathbf{B}$) n'est qu'un modèle partiel de la géométrie. Là encore, cela est incontournable et le théorème suivant permet de comprendre pourquoi (cf. [3] 5.11 p. 446) :

8.2 Théorème. (Hilbert)
Une surface riemannienne complète à courbure négative constante ne se plonge pas isométriquement dans $\mathbf{R}^3$*.*

8.3 Le groupe des homographies conservant une courbe algébrique

On discute ici le point, abordé en 4.2.2, de savoir si le groupe des homographies conservant une courbe Γ opère transitivement sur $\mathbf{P}(E) - \Gamma$. C'est vrai si Γ est une conique, mais pas en degré > 2. En effet, on sait que le groupe des automorphismes d'une courbe plane de degré 3 (une courbe elliptique Γ) est isomorphe à Γ donc il ne peut être transitif sur une variété de dimension 2 et, dans le cas $d \geq 4$, le groupe en question est même fini. En fait, la situation est même encore pire car le groupe dont il s'agit est le groupe des automorphismes de la courbe abstraite, pas de la courbe plongée et celui-ci peut être encore plus petit. En particulier :

8.3 Lemme. *Le groupe des homographies du plan qui conservent une courbe elliptique est fini.*

Démonstration. On suppose qu'on est sur $\mathbf{C}$. Il est clair que si le groupe était infini sur $\mathbf{R}$ il le serait sur $\mathbf{C}$. Voici deux démonstrations.

1) Les homographies qui conservent une courbe elliptique transforment inflexion en inflexion. Or une courbe elliptique admet 9 inflexions 3 à 3 alignées. Il suffit de montrer qu'il y a un repère dedans car alors G sera contenu dans $\mathfrak{S}_9$. On en prend deux, disons a, b, et on écarte la troisième alignée, a'. Il en reste 6. On en prend une, disons c, et on écarte celles alignées avec a, c et b, c, disons b', c'. Il en reste 3 et n'importe laquelle convient.

2) Soit Γ une courbe elliptique du plan. On montre (voir par exemple [9]) qu'il existe une homographie du plan qui la transforme en $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Cela signifie que le quotient des courbes elliptiques (i.e. l'ouvert d'un $\mathbf{P}^9$ puisqu'une telle courbe a 10 coefficients) par $PGL(3, \mathbf{C})$ (de dimension 8) est de dimension 1, donc le stabilisateur est de dimension 0.

8.4 Les médiatrices

On prouve dans ce paragraphe le résultat sur les médiatrices d'un triangle hyperbolique dans le cas non concourant, voir 5.3.3.

8.4.1 Un lemme

8.4 Lemme. *Soient $A, B \in \mathbf{D}$ et D la médiatrice de $[AB]$. Soit Ω une droite et M, N les projetés orthogonaux de A, B sur Ω. Alors, Ω est perpendiculaire à D si et seulement si on a $AM = BN$ (c'est-à-dire si A, B sont équidistants de Ω) et du même côté.*

Démonstration. Supposons d'abord Ω perpendiculaire à D. On considère τ_D symétrie par rapport à D. Dire que D est la médiatrice de A, B signifie qu'on a $\tau_D(A) = B$. Dire que Ω est perpendiculaire à D signifie qu'on a $\tau_D(\Omega) = \Omega$. La droite (AM) est donc transformée en une droite passant par B et perpendiculaire à Ω, donc en (BN). Mais alors, M est transformé en N et on a bien $AM = BN$. Si A, B étaient de part et d'autre de Ω, le segment $[AB]$ couperait Ω. Or on a vu que deux droites (ici (AB) et Ω) perpendiculaires à une même troisième (ici D) sont "parallèles" (i.e. ne se coupent pas).

Supposons maintenant $AM = BN$ avec A, B du même côté de Ω. On va montrer que D est la médiatrice de $[MN]$, ce qui montrera bien que D et $\Omega = (MN)$ sont perpendiculaires. Soit P le point d'intersection [48] Ω et D. On va montrer $OM = ON$ et $PM = PN$ ce qui donnera le résultat. On utilise les cas d'isométrie, d'abord pour montrer que les triangles AOP et BOP sont isométriques ($AO = OB$, OP commun et les angles droits en O), puis pour

48. Ces droites se coupent car M, N, comme A et B, sont de part et d'autre de D.

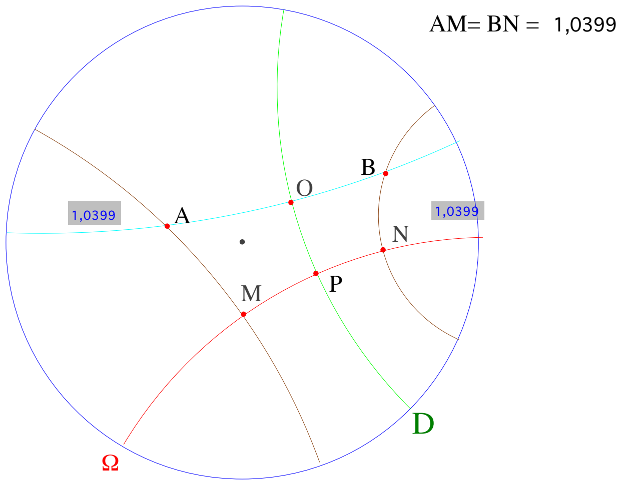


FIGURE 26 –

voir l'isométrie entre AMP et BNP ($AP = BP$ par le précédent, $AM = BN$ par hypothèse et l'angle droit). On en déduit déjà $MP = NP$. Par ailleurs, avec les triangles précédents, par addition, on a $\widehat{OAM} = \widehat{OBN}$, ce qui donne l'isométrie des triangles de même nom. On en déduit $OM = ON$.

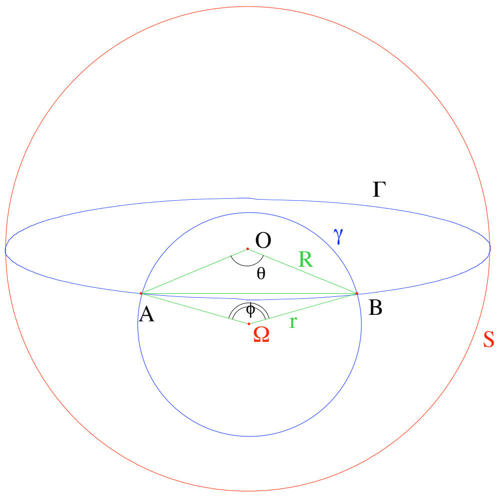
8.4.2 La fin de la démonstration

Si les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ ne se coupent pas, elles ont une perpendiculaire commune Ω. Par le lemme précédent, cela signifie que A, B d'une part et A, C d'autre part sont équidistants de Ω et du même côté. Mais alors B et C le sont aussi et donc la droite Ω est aussi perpendiculaire à la médiatrice de $[BC]$.

8.5 Annexe : les géodésiques de la sphère

Ce qui suit est un énoncé de problème pour des élèves de Terminale.

On considère une sphère S de centre O et de rayon R et deux points A et B, non antipodes, de cette sphère. On pourra penser à deux points situés sur l'équateur. Le but du problème est de montrer que, parmi les arcs de cercles tracés sur la sphère et joignant A et B, le plus court est celui qui correspond à un "grand cercle", c'est-à-dire à un cercle de centre O. En vérité, on peut montrer que l'arc de grand cercle est non seulement le plus court parmi les arcs de cercles joignant A et B, mais le plus court parmi tous les chemins possibles, tracés sur S, et joignant A et B, mais c'est beaucoup plus difficile. On dit que c'est une **géodésique** de la sphère.



On considère le grand cercle Γ, de centre O et de rayon R, passant par A et B (sur la figure il s'agit de l'équateur) et un autre cercle γ, de centre Ω et de rayon r, tracé sur S et passant par A et B. On appelle θ (resp. ϕ) l'angle au centre $\widehat{AOB}$ (resp. $\widehat{A\Omega B}$).

1) Montrer que Ω est intérieur à la boule et en déduire qu'on a $r \leq R$.

2) Montrer qu'on a $AB = 2R\sin\dfrac{\theta}{2} = 2r\sin\dfrac{\phi}{2}\cdot$

3) Montrer que la longueur de l'arc AB de Γ (resp. γ) est égale à $R\theta$ (resp. $r\phi$).

4) Soient $x, y \in]0, \pi/2[$. Montrer qu'on a $\dfrac{\sin x}{\sin y} \geq \dfrac{x}{y}\cdot$ (On étudiera la fonction $f(x) = y\sin x - x\sin y$ pour y fixé en se souvenant que l'arc est plus grand que la corde et plus petit que la tangente.)

5) Conclure.

8.6 Le lemme du sous-groupe intermédiaire

L'idée de ce paragraphe est de montrer qu'il n'y a pas de géométrie intermédiaire entre la géométrie elliptique [49] et la géométrie projective en montrant qu'il n'existe **aucun** groupe intermédiaire (distingué ou non) entre le groupe des isométries elliptiques et le groupe des homographies. C'est une grande différence avec le cas euclidien où l'on a non seulement le normalisateur (les similitudes), mais aussi le groupe affine et d'autres encore.

8.6.1 Le cas $n = 2$

8.5 Lemme. *Soit G un groupe vérifiant $O^+(2, \mathbf{R}) \subset G \subset SL(2, \mathbf{R})$. Alors, on a $G = O^+(2, \mathbf{R})$ ou $G = SL(2, \mathbf{R})$.*

Démonstration. Supposons que G contient une matrice A qui n'est pas dans $O^+(2, \mathbf{R})$. La décomposition de Cartan de A s'écrit $A = BC$ avec $B \in O(2, \mathbf{R})$ et C symétrique définie positive. Comme C est de déterminant positif, B aussi, donc est dans $O^+(2)$. Il en résulte que C est dans G, de déterminant 1 et $\neq$ Id. De plus, il existe P dans $O(2)$ telle que $D = {}^tPCP$ est diagonale à coefficients positifs et, quitte à conjuguer D par une réflexion diagonale, on peut supposer $P \in O^+(2)$. On en déduit que D est dans G et différente de Id, donc de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$. Quitte à changer D en son inverse, on peut supposer $0 < \lambda < 1$.

Soit alors U une matrice de $O^+(2)$, $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On a $DU = \begin{pmatrix} \lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta \\ \frac{1}{\lambda}\sin\theta & \frac{1}{\lambda}\cos\theta \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{Tr} DU = \cos\theta(\lambda + \frac{1}{\lambda})$.

On cherche θ pour que DU soit une transvection, et il suffit qu'elle soit de trace 2 (car son déterminant est 1). C'est le cas si et seulement si on a $\cos\theta = \dfrac{2\lambda}{\lambda^2+1}\cdot$ Posons $\lambda = \tan\varphi$ avec $0 < \varphi < \pi/4$. Si l'on prend $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$ on a $\cos\theta = \sin(2\varphi) = \dfrac{2\lambda}{\lambda^2+1}$, et on a gagné.

On a donc montré que G contient une transvection non triviale. Appelons Δ sa droite. Comme $O^+(2)$ est transitif sur les droites, on voit, en conjuguant par $O^+(2)$, qu'on obtient dans G toutes les transvections. Comme elles engendrent $SL(2)$, on a gagné.

49. J'imagine que la situation est la même en hyperbolique, mais je ne l'ai pas démontré dans ce cas.

8.6.2 Le cas $n = 3$

8.6 Théorème. *Soit G un groupe vérifiant $O^+(3, \mathbf{R}) \subset G \subset SL(3, \mathbf{R})$. Alors, on a $G = O^+(3, \mathbf{R})$ ou $G = SL(3, \mathbf{R})$.*

Démonstration. On suppose que le groupe contient strictement $O^+(3)$. La décomposition de Cartan montre qu'il contient une matrice symétrique définie positive de déterminant 1, différente de l'identité, que l'on peut supposer diagonale (dans une base orthonormée directe) avec des valeurs propres λ, μ, ν positives, vérifiant $\lambda\mu\nu = 1$. Appelons la D. Il y a nécessairement une valeur propre < 1, disons μ, et une > 1, disons ν. On regarde alors le produit DU où U est dans $O^+(3)$ avec 1 comme valeur propre sur le premier vecteur et la rotation d'angle θ ensuite. On obtient la matrice : $DUD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\frac{\mu}{\nu}\sin\theta \\ 0 & \frac{\nu}{\mu}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On regarde le sous-groupe de $SL(2)$ formé des matrices A telles que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit dans G. Il contient $O^+(2)$ et une autre matrice (celle construite ci-dessus). C'est donc $SL(2)$ en vertu de 8.5 et il contient, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, une transvection du type $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En prolongeant ces matrices et en conjuguant par $O^+(3)$ on obtient toutes les transvections et comme elles engendrent $SL(3)$, on a gagné.

9 Annexe 2 : quelques applications de la géométrie hyperbolique, de Poincaré à Gromov

Il est fascinant de constater que la géométrie hyperbolique, bien loin de son introduction par le problème des parallèles, a acquis actuellement une position centrale dans de nombreux domaines des mathématiques [50]. En voici un bref aperçu.

9.1 Les groupes fuchsiens

L'un des charmes de la géométrie hyperbolique réside dans les sous-groupes discrets de son groupe d'isométries. Contrairement au cas du plan euclidien où il y a peu de tels sous-groupes (17, qui correspondent aux pavages du plan), les sous-groupes analogues (dits fuchsiens) sont en nombre

50. Et je n'ai évidemment aucune réserve à son encontre !

infini pour le groupe de Lorentz (groupe des isométries du plan hyperbolique). L'origine de ces recherches remonte à Poincaré. Je cite *in-extenso* le texte extraordinaire de Poincaré (Science et méthode, 1909), pour son intérêt historique et philosophique.

Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant. Tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux : j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude ; je ne pus m'endormir, les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique. Je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries ; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l'analogie avee les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries, si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.

A ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'Ecole des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification, je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avee les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne.

Etant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchslens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique ; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des sérles thétafuchsiennes, et que, par conséquent, il existait des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions ; j'en fis un siège systématique et j'enlevai, l'un après l'autre, tous les ouvrages avancés ; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire ; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine.

9.2 Les surfaces à courbure constante

Un autre intérêt de la géométrie hyperbolique tient à la notion de courbure. On montre en effet qu'il n'y a que trois types de surfaces à courbure constante : le plan (courbure nulle), la sphère (courbure constante et positive) et le plan hyperbolique (courbure constante négative). En ce sens, le plan hyperbolique est aussi important que la sphère.

9.3 La relativité

La géométrie hyperbolique est très liée à la théorie de la relativité. L'explication tient au modèle de Minkowski du plan hyperbolique, $\mathbf{M}$. Il s'agit de l'hyperboloïde de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - t^2 = -1$ (la nappe $t \geq 1$). On voit apparaître la forme quadratique de Lorentz (pour la physique on rajoute une variable d'espace z et on fait apparaître la vitesse de la lumière : $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$).

9.4 Gromov

Gromov est l'un des mathématiciens actuels qui utilise le plus la géométrie hyperbolique, voir par exemple l'article [5] de Ghys dans *Images des maths.*

Rappelons quelques points.

9.1 Définition. *Soit E un espace métrique. On dit que E est* **géodésique** *si pour tous $a, b \in E$ il existe une courbe $\gamma(t)$ d'origine a et d'extrémité b telle que $d(\gamma(u), \gamma(v)) = |v - u|$.*

Dans un espace métrique géodésique on peut parler de côtés d'un triangle.

9.2 Définition. *Soit E un espace métrique géodésique. On dit qu'il est* **δ-hyperbolique** *si quels que soient $a, b, c \in E$ il existe $o \in E$ qui est à une distance moindre que δ des côtés.*

Dans le plan hyperbolique c'est le centre du cercle inscrit qui joue le rôle de o avec $\delta = (\ln 3)/2$. Voir [15] 6.10.17. Une conséquence est le fait que quand on a un triangle le minimum des distances d'un point d'un côté aux autres est $\leq 2 \ln 3$.

L'intérêt des espaces hyperboliques c'est qu'il y en a beaucoup, comme le dit E. Ghys : *Dans un certain sens on peut penser que "presque tous les espaces" sont δ-hyperboliques.*

Références

[1] Bachmann Friedrich, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer Verlag, 1959

[2] Bolyai Janos, *La science absolue de l'espace, Appendice au Tentamen de Farkas Bolyai*, Math. Studies 38.

[3] Do Carmo Manfredo *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[4] Douady Adrien et Douady Régine, *Algèbre et théories galoisiennes*, Cassini, 2005.

[5] Ghys Étienne, *Les triangles d'Euclide, de Gauss et de Gromov*, `http://images.math.cnrs.fr/Les-triangles-d-Euclide-de-Gauss`

[6] Gramain André, *Topologie des surfaces*, PUF, 1971.

[7] Greenberg Marvin, *Euclidean and Non-euclidean geometries. Development and history*, Freeman and C°, 1972.

[8] Hartshorne Robin, *Geometrie, Euclide and beyond*, Springer, 2000.

[9] Hartshorne Robin, *Algebraic geometry*, Springer, (1977).

[10] Hilbert David (trad. Paul Rossier), *Les fondements de la géométrie*, Paris, Dunod, 1971, Gabay 1997.

[11] Kahane Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 2002.

[12] Klein Felix, *Le programme d'Erlangen*, Jacques Gabay, 1974.

[13] Mansion Paul, *Gauss contre Kant sur la géométrie non euclidienne*, Revue néo-scolastique, Volume 15 Numéro 60 pp. 441-453 (1908).

[14] Perrin Daniel, *L'exemple de la géométrie affine du collège, vu au travers du programme d'Erlangen et de la théorie des invariants*, Bull. APMEP 431, 758-784, 2000.

[15] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Les géométries non euclidiennes*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie4.pdf`

[16] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, La géométrie euclidienne*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie5.pdf`

[17] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Postface*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPostface.pdf`

[18] Perrin Daniel, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[19] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.

[20] Perrin Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), 2050.

[21] Yaglom I.M. *A simple Non-euclidean Geometry and its physical Basis*, Springer, 1979.