Compte-rendu de l'atelier maths du 31 mars 1998

0. Compte-rendu de la journée maths du 21 mars.

Il s'agit de la journée disciplinaire organisée, dans le cadre du colloque sur les lycées, par les trois académies de la région Ile de France et qui portait sur les mathématiques. Il y a eu une centaine de participants. Les deux animateurs de l'atelier ayant participé à cette journée en ont donné un bref compte-rendu au début de l'atelier. En voici les points essentiels.

a) Atelier 1 : Formation aux mathématiques et rôle formateur des mathématiques.

Cet atelier était animé par J.-C. Yoccoz. Le débat a tourné autour du thème du raisonnement, à partir d'un constat fait par de nombreux enseignants du supérieur et qui peut se résumer à la phrase : "nos élèves ne savent plus raisonner", cf. ci-dessous. Ce constat a été tempéré par plusieurs intervenants (notamment le président de l'APM), mais il n'en demeure pas moins qu'il s'agit d'un problème sérieux. Le débat a porté ensuite sur les programmes et notamment la place de l'analyse, jugée excessive par certains. La question du Bac a été aussi évoquée pour déplorer l'aspect "application de recettes" des sujets.

b) Atelier 2 : Interactions de l'enseignement des mathématiques avec celui d'autres disciplines.

L'atelier a été animé par J.-P. Raoult (avec, au bureau, des représentants des sciences économiques, de la technologie, de l'informatique, du français, mais curieusement pas de physicien).

Dans son introduction J.-P. Raoult a rappelé que la place des mathématiques était discutée à l'heure actuelle (notamment par le ministre). Pourtant les mathématiques interviennent de plus en plus dans la vie courante (exemples cités : cryptographie, finance, économie,...), mais c'est souvent de manière implicite. Le rôle des enseignants de mathématiques, à tous les niveaux, doit être de rendre visible cette présence des maths, en présentant des modélisations (suffisamment pertinentes) et en renforçant le lien avec les autres disciplines.

E. Malinvaud (économiste) a déploré pour sa part le manque de culture en France sur les notions de risque et d'aléa.

G. Cousineau (informatique) a réaffirmé que l'informatique ne remplace pas les mathématiques (contrairement à une opinion répandue).

c) Réponses au questionnaire rempli par les enseignants .

Il s'agit des réponses au questionnaire (du colloque sur les lycées) données par les profs de maths de l'Ile de France. Les réponses ont été assez conformes à ce qu'on pouvait attendre et il serait trop long de les énumérer toutes. Nous en avons sélectionné quelques-unes (elles sont données dans l'ordre décroissant de fréquence) :

À la question “quelles connaissances manquent à vos élèves”, réponse : logique, histoire des maths, arithmétique, ensembles et relations,...

À la question “quelles connaissances vous paraissent obsolètes”, réponse : aucune (parfois : coniques,...)

À la question “quelles compétences sont insuffisantes”, réponse : imagination, créativité, aptitude au travail en groupe.

À la question “quelles qualités nécessaires à notre société républicaine et démocratique (!) développe votre discipline”, réponse : esprit critique, rigueur, honnêteté intellectuelle, sens de l'effort.

À la question “quels obstacles rencontrez-vous dans l'enseignement”, réponse : le manque de temps, les effectifs trop lourds, les programmes trop lourds, la présence des calculatrices et des formulaires au Bac, l'hétérogénéité des classes.

À la question “que préconisez-vous”, réponse : diminution des effectifs, dédoublement des classes, augmentation des modules, diminution des programmes.

Sur le Bac on notera qu'il n'y a pas de critique sur l'existence du Bac comme examen national (et notre groupe du 31 mars confirme fortement cette position). Il y a quelques critiques sur les sujets (jugés stéréotypés) mais sans doute beaucoup moins que celles qui émanent des collègues universitaires.

Il ne s'est pas dégagé de consensus sur deux points : faut-il accroître la part du contrôle continu ? faut-il instaurer une sélection à l'entrée à l'université ?

d) Discussion générale.

Elle a porté notamment sur les relations des maths avec le monde extérieur. Le constat est qu'on entend actuellement beaucoup poser les questions :

1) à quoi servent les maths ?

2) pourquoi enseigne-t-on les maths ?

Cette dernière question est posée notamment au CNP (Conseil National des Programmes).

La réponse de nombreux participants a été de plaider pour un rapprochement des maths et du réel. A.-M. Marmier a notamment rappelé les objectifs des maths de l'école d'autrefois : les notions d'espace, de mouvement, de mesure des grandeurs et de nombre.

Plusieurs participants ont déploré le manque de documents abordables concernant les applications des maths et leurs liens avec les autres disciplines.

Un autre thème abordé a été le Bac. Citons deux positions qui sont apparues :

1) celle de J. Giraud d'un Bac “à deux étages” (une partie minimale au niveau national, une partie optionnelle au niveau local),

2) celle de P. Attali d'une commission indépendante (dont les membres seraient déchargés de leur classe) pour élaborer les sujets.

1. Introduction à la discussion.

Le thème retenu pour l'atelier d'aujourd'hui a été “apprendre à raisonner, où et comment”.

Dans un premier temps, il a paru nécessaire de mener la réflexion indépendamment des multiples contraintes du système (le Bac, les programmes, le temps, ...), mais en tenant compte, en revanche, des nouveaux publics d'élèves qui sont les nôtres, avant et après le Bac, et des problèmes qu'ils nous posent. Bien entendu, les contraintes institutionnelles évoquées ci-dessus existent et sont souvent incontournables. On ne peut oublier ni celles qui pèsent sur le Bac (dans la mesure où le maintien de taux de réussite élevés semble politiquement obligatoire), ni les incertitudes sur les projets du ministre concernant les mathématiques (il se peut que nous soyons confrontés à de nouvelles diminutions d'horaires et de programmes). Mais il nous a paru utile de tenter de repérer ce qu'il faudrait faire pour améliorer les capacités de nos élèves à raisonner si les conditions étaient favorables. On peut toujours espérer, si un consensus se dégage dans le milieu mathématique, que cela permettra de faire des propositions concrètes : quelles évolutions souhaitons nous pour le Bac, pour les programmes, les horaires, etc.

2. Le constat côté enseignement supérieur.

Le constat des collègues qui enseignent en DEUG peut souvent se résumer en une phrase simple autant que provocatrice : les élèves ne savent plus raisonner. Bien entendu, il faut immédiatement tempérer cette affirmation en se souvenant que les étudiants qui viennent à l'université sont le plus souvent ceux qui n'ont été acceptés ni en classe préparatoire, ni en IUT et que ce ne sont donc pas les meilleurs élèves des lycées.

Voici, en vrac, quelques carences signalées de nos étudiants :

• le manque de rigueur logique ; par exemple, la confusion entre condition nécessaire et suffisante,

• une manipulation souvent incorrecte des inégalités, surtout lorsqu'il y a des signes moins,

• une incapacité à formuler correctement un raisonnement par récurrence (notamment quand il ne s'agit pas seulement de montrer une formule),

• l'incapacité à enchaîner plusieurs étapes de raisonnement (c'est un point qui reste encore vrai plusieurs années après, par exemple en préparation au CAPES),

• une grande difficulté à manipuler les concepts abstraits (par exemple une fonction ou une suite non spécifiée par une formule)

Sur ce dernier point, voici un exemple de texte posé en DEUG MO dont le résultat a été catastrophique :

Soit f une fonction définie continue croissante sur $[0,1[$ avec $f(0)=0$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(1) Pour tout réel $y>0$, il existe au moins un $x \in]0,1[$ tel que $y=f(x)$.

(2) On a $\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$.

Ce constat (avec des variantes) semble vraiment partagé par la plupart des collègues du supérieur et il perdure souvent jusqu'en licence.

Les participants à l'atelier ont, dans l'ensemble, repris à leur compte, au moins partiellement, le constat ci-dessus. Certains se demandaient si ce jugement sévère porté sur les étudiants était le même au début et à la fin de l'année. D'autres ont évoqué diverses raisons pour expliquer ces phénomènes : la diminution des programmes : “il n'y a plus de grain à moudre”, la contradiction entre une logique de la réussite immédiate aux examens et une logique de l'apprentissage, la disparition de bases solides dans les classes antérieures, par exemple le calcul algébrique au collège, le manque de temps (c'est un point qui est revenu comme un leitmotiv tout au long de l'atelier).

3. Des propositions.

a) Des problèmes riches et ouverts.

Un certain consensus s'est dégagé sur un certain nombre de points :

• Il est possible de faire raisonner les élèves sur de nombreux thèmes des programmes, même si certains s'y prêtent mieux que d'autres, cf. ci-dessous.

• Il convient de prendre garde à l'excès de formalisme qui réduirait la pratique de la démonstration à un exercice de style autoritaire et stérile en lui ôtant sa fonction de conviction. Trop souvent les problèmes (notamment au Bac) se réduisent à des questions fermées : "montrer que ..." Ce que supportaient les élèves des lycées il y a encore quelques années n'est sans doute plus acceptable et la question que posent souvent les non-mathématiciens : "pourquoi doit-on démontrer des choses qui sont évidentes sur la figure ou la calculatrice, etc." doit être prise au sérieux.

• Un moyen de convaincre les élèves de la nécessité du raisonnement, au-delà de l'argument d'autorité (le sempiternel "montrer que ...") est de leur proposer des problèmes qui soient suffisamment **riches et ouverts** et de leur permettre d'utiliser plusieurs approches (au moins quand le programme le permet ce qui n'est pas toujours le cas).

• Sur ce point, s'il y a eu un large accord des participants, la plupart ont mis en avant, en donnant des exemples précis, le fait qu'un tel travail est très coûteux en temps. Une piste évoquée pour ce type de travail de recherche a été l'utilisation des devoirs à la maison voire de projets, mais des disparités ont été relevées selon les endroits quant à la capacité de travail des élèves hors de l'école.

• Certains ont rappelé que la technique est évidemment indispensable, qu'il s'agisse de calcul (mais attention de ce côté à l'irruption des moyens de calcul informatiques) ou de démonstration. Il est clair qu'un élève qui ne maîtrise pas les techniques de base n'a aucune chance de pouvoir aborder des situations plus complexes.

• Enfin, au moment où les mathématiques sont mises en cause un peu partout, il a semblé important de ne pas les confiner dans leur splendide isolement mais de montrer qu'elles sont aussi un incomparable instrument de découverte et de compréhension du monde et pour cela de multiplier les exemples d'applications des mathématiques à d'autres disciplines et de modélisations. Des difficultés sont apparues sur ce sujet : mauvaise coordination entre les programmes (et les inspections générales !) de maths et de physique,([1]) virage excessivement qualitatif des programmes de physique, manque de documents pertinents et utilisables (il y a toutefois les bulletins de l'APMEP et les brochures IREM).

b) Un exemple.

Un exemple, pris en analyse (où pourtant on affirme souvent qu'il n'y a pas de raisonnement à faire au niveau du secondaire), a été proposé comme base de discussion. Il s'agit

([1]) Par exemple, en TS les équations différentielles linéaires du second ordre n'ont plus de termes en y', donc ne s'appliquent plus aux circuits R, L, C, mais seulement L, C.

de l'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, (avec un f explicite). Plusieurs conditions semblent permettre de promouvoir le raisonnement chez les élèves (le scénario suppose que de telles suites aient déjà été vues auparavant) :

1) ne pas imposer la valeur de départ u_0, (pour avoir une situation suffisamment riche),

2) laisser, pendant un temps assez long, à la charge de l'élève le soin d'explorer le problème (en rappelant deux outils utiles : la calculette programmable et l'étude graphique), en tous cas de ne pas demander trop tôt "monter que u_n a pour limite l", laissant ainsi la situation ouverte.

De l'étude expérimentale doivent alors émerger des conjectures sur la monotonie et les limites éventuelles (points fixes de f), ainsi que la mise en évidence du lien avec la dérivée en ces points (points attractifs, répulsifs,...)

Il est important ensuite de laisser à la charge de l'élève la sélection d'un intervalle stable où la dérivée est majorée par $k < 1$ et la conclusion. Le choix de l'intervalle semble un point particulièrement intéressant mais il est presque toujours occulté dans les problèmes de Bac où on l'impose, enlevant ainsi une partie de la substance du problème et réduisant le travail de l'élève à la tâche d'éxécution, en l'occurrence appliquer l'inégalité des accroissements finis.

Dans le même domaine, on peut aussi montrer aux élèves des exemples, simples en apparence, mais où la suite a un comportement chaotique que l'on perçoit bien sur la calculatrice. Exemple : $u_{n+1} = 3u_n^2 - 2u_n$, avec deux idées en tête :

1) On rencontre ce type de suites en dynamique des populations lorsqu'on ne se contente pas d'un modèle exponentiel (souvent peu conforme à la réalité). Cela permet de combattre l'idée que les mathématiques, appliquées à la réalité, produisent des résultats aberrants : dans ce cas, ce ne sont pas les mathématiques qui sont en cause, mais le modèle.

2) Évidemment, il est impossible d'étudier ces suites au niveau du lycée, mais on peut signaler aux élèves que les mathématiciens sont parvenus, avec d'autres outils, à dire des choses pertinentes sur leur comportement qualitatif.

c) Les domaines les plus propices au raisonnement.

On a essayé de montrer plus haut qu'on peut trouver l'occasion de développer des aptitudes au raisonnement dans n'importe quel domaine, pourvu qu'on choisisse un problème riche et ouvert. Cependant il est clair que certains domaines se prêtent mieux que d'autres au raisonnement, au moins dans sa forme enchaînement logique. Citons :

• La géométrie.

C'est le lieu d'élection de la rigueur, mais attention à ne pas tout verrouiller en ne posant que des questions contenant leur réponse (demander de préférence : quel est l'ensemble des points vérifiant telle propriété, plutôt que "montrer que").

Une question, d'apparence paradoxable, a occupé les participants quelques minutes. Au fait, à quoi sert la géométrie ? Diverses réponses ont été données : à développer la vision dans l'espace, à fournir un modèle intuitif pour d'autres domaines (cf. l'algèbre linéaire). De nombreuses utilisations en physique, en architecture, etc. ont été citées. La question a alors été précisée : à quoi sert la géométrie du triangle, par exemple les propriétés classiques de l'orthocentre, du centre du cercle circonscrit, le tout pouvant aller jusqu'à la droite d'Euler et à quoi servent les démonstrations. Les réponses les plus convaincantes n'ont pas été formulées en termes d'applications, mais en termes culturels :

1) la géométrie est une école incomparable pour l'apprentissage de la rigueur : pas d'affirmation sans preuve,

2) la géométrie est un acquis culturel de l'humanité au même titre que la peinture ou la musique.

Sur ce plan, on a constaté, avec un peu d'amertume, qu'on ne tolère pas dans notre société qu'un premier ministre ignore que Gambetta était mort au moment de l'affaire Dreyfus, alors que dans certains aréopages prestigieux (le CNP pour ne pas le nommer) on peut se glorifier d'ignorer ce qu'est une équation du premier degré.

• L'arithmétique.

Elle peut permettre de résoudre des problèmes séduisants parce que d'énoncés simples, mais non évidents. Elle présente l'avantage de permettre de raisonner sur un domaine relativement limité, assez concret mais néanmoins riche. Les participants étaient en général très satisfaits du retour de l'arithmétique dans l'enseignement de spécialité maths de terminale S, même si certains déploraient la disparition d'autres thèmes dans l'enseignement de spécialité.

• Les problèmes de dénombrement et de probas.

Là, la rigueur retrouve sa vraie raison d'être. En effet, il est très facile dans ce type de questions de trouver, en faisant des raisonnements approximatifs, des résultats complétement divergents. C'est alors la rigueur et elle seule qui permet de trancher.

• La modélisation.

Il s'agit là d'une autre forme de raisonnement où la critique du modèle a un grand rôle à jouer.

• Les raisonnements "de physiciens".

Un premier pas pour montrer que les mathématiques sont ouvertes sur le réel serait de faire l'effort de comprendre et de reformuler en un langage plus mathématique les raisonnements "de physiciens". L'exemple du calcul du moment d'inertie d'une plaque circulaire homogène par rapport à son centre a été proposé. On peut en effet écrire rigoureusement le raisonnement du physicien en terminale en partant de deux axiomes bien naturels sur les moments d'inertie :

1) le moment d'inertie est additif (si on a deux solides disjoints le moment de la réunion est la somme des moments),

2) si un corps de masse m est situé à une distance de l'axe comprise entre r et R, son moment est compris entre mr^2 et mR^2.

Conclusion.

Il semble que la plupart des participants ont trouvé la discussion intéressante, même si elle s'est parfois éloignée du sujet retenu. En réalité, pour qu'un tel atelier soit vraiment utile, il faudrait sans doute que ses objectifs soient fixés de manière plus précise (et peut être pour cela choisir des thèmes plus étroits). Ce point mérite une réflexion sérieuse si l'expérience devait être renouvelée.