Fatale erreur

Daniel PERRIN

1 Le problème

Dans la classe de cours moyen de Marcelle Hulite, institutrice à Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), le petit Valentin Tamar, toujours contestataire, proteste :

– Mais, Madame, je ne vois pas pourquoi vous m'avez mis zéro à ma division, j'avais tout bon !

La maîtresse a beaucoup de mal à lui expliquer que diviser 624 par 18 c'est écrire $624 = 18 \times 34 + 12$ *et non pas* $624 = (18 + 34) \times 12$, *même si le résultat est le même.*

Montrer qu'on peut fabriquer une infinité d'exemples de cette situation, c'est-à-dire d'entiers b, q, r, *avec* $0 \leq r < b$, *vérifiant* $bq + r = (b + q)r$.

2 La solution

On travaille dans les entiers positifs. On écartera la solution triviale $r = q = 0$, $b > 0$ quelconque, de sorte que q et r sont > 0.

2.1 Analyse

On suppose qu'on a des entiers b, q, r, avec $0 < r < b$, vérifiant $bq + r = (b + q)r$.

Soit d le *pgcd* de b et r. La comptine du *pgcd* permet d'écrire $b = db'$, $r = dr'$ avec b' et r' premiers entre eux. En remplaçant dans l'égalité et en divisant par d on obtient $b'q + r' = db'r' + qr'$. Comme r' est premier avec b', il divise q : $q = r'q'$. On remplace encore dans l'égalité, on divise par r' et on obtient $1 = q'r' + (d - q')b'$ c'est-à-dire une égalité de Bézout liant r' et b', $1 = \lambda r' + \mu b'$ avec $\lambda = q'$ et $\mu = d - q'$.

2.2 Synthèse

Pour fabriquer des solutions à la question posée, on part de deux entiers r' et b' premiers entre eux, avec $0 < r' < b'$ et on écrit une relation de Bézout $\lambda_0 r' + \mu_0 b' = 1$ avec $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{Z}$. On sait qu'alors toutes les solutions de l'équation $\lambda r' + \mu b' = 1$ sont de la forme $\lambda = \lambda_0 + b'k$, $\mu = \mu_0 - r'k$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Pour k assez grand on obtient $\lambda > 0$ et $\mu < 0$. Précisément, il suffit de prendre k plus grand que $-\dfrac{\lambda_0}{b'}$ et que $\dfrac{\mu_0}{r'}$ et on vérifie alors que l'on a $|\mu| = r'k - \mu_0 < \lambda = \lambda_0 + b'k$. On pose alors $q' = \lambda$, $d = \lambda + \mu$ (qui est positif), $q = q'r'$, $r = dr'$, $b = db'$ et on a la solution cherchée.

Par exemple, avec $b' = 3$, $r' = 2$, $\lambda_0 = -1$, $\mu_0 = 1$, on prend $k = 6$, qui donne $\lambda = q' = 17$, $\mu = -11$, $d = 6$, $q = 34$, $r = 12$, $b = 18$ et on retrouve l'exemple proposé.

2.3 Une remarque

Tant qu'on est dans les questions biscornues, on peut se demander si, avec trois nombres > 0, b, q, r avec $r < b$ (donc $b > 1$) il est possible que $bq + r$ soit égal à l'une des valeurs obtenues en effectuant une multiplication et une addition (comme avec $(b+q)r$ ci-dessus). On ne trouve cependant pas grand chose de bien palpitant. Les différents cas sont $qr+b$ (qui donne $q = 1$), $br+q$ (on trouve $q = r$), $(b + r)q$ (encore $q = 1$) ou $(q + r)b$ (pas de solutions).