

Les poids

Daniel PERRIN

Cette question est inspirée d'un exercice posé dans l'académie de Versailles lors du concours René Merckhoffer pour les élèves de quatrième (voir ci-dessous). L'intérêt que j'y vois est de montrer comment des questions élémentaires peuvent mener, de manière naturelle, à d'autres, nettement plus difficiles. C'est une belle illustration d'une maxime que j'aime bien : *Faire des mathématiques c'est poser des problèmes et, si possible, les résoudre.*

1 Le problème pour les élèves de quatrième

1.1 Énoncé

Dans cet exercice, les nombres considérés sont des entiers écrits selon la numération décimale. Pour cet exercice, on appelle poids d'un nombre N la somme de ses chiffres.

1. *Quel est le poids du nombre 29 ? Quel est le poids du nombre 7646 ?*
2. *Proposer trois nombres différents de même poids 42.*
3. *Est-il exact de dire que "plus un nombre a de chiffres, plus son poids est élevé" ?*
4. *Quel est le plus petit nombre de poids 50 ?*
5. *Quel est le plus petit nombre de poids 2022 ?*
6. *Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 5 et des 7 et dont le poids soit 53 ?*
7. *Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 3 et des 6 et dont le poids soit 200 ?*

1.2 Solution

On note $p(n)$ le poids du nombre n .

- 1) On a $p(29) = 11$, $p(7646) = 23$.
- 2) On peut prendre par exemple 69999 ou 777777 ou 6666666 et bien d'autres ... Il y en a même une infinité si l'on se permet d'ajouter des zéros.
- 3) Non, ça dépend des chiffres en question. Par exemple on a $p(1000) = 1$ mais $p(9) = 9$.
- 4) C'est $n_0 = 599999$. En effet, si n a moins de 6 chiffres son poids est $\leq 5 \times 9 = 45$ et il ne convient pas. Si n admet strictement plus que 6 chiffres il est plus grand que n_0 . S'il a exactement 6 chiffres, si le plus petit est > 5 , le nombre est plus grand que n_0 . Si le plus petit est < 5 , comme la somme

des 5 autres est $\leq 5 \times 9 = 45$, le nombre ne convient pas. Il reste le cas où le plus petit chiffre est 5, les cinq autres étant tous des 9 et le plus petit de ces nombres est n_0 .

5) On divise 2022 par 9 : $2022 = 224 \times 9 + 6$. Le plus petit nombre de poids 2022 est 6999...999 avec 224 chiffres 9. Le raisonnement est le même que ci-dessus.

6) Oui, par exemple 777755555 (ou tout nombre obtenu en permutant ces chiffres).

7) Non, car un nombre qui s'écrit exclusivement avec des 3 ou des 6 est de poids multiple de 3, ce qui n'est pas le cas de 200.

2 Le problème généralisé

Les nombres considérés sont des entiers écrits en base 10. Le poids d'un nombre est la somme de ses chiffres.

- 1) Combien y a-t-il de nombres n de poids donné p ?
- 2) Et si l'on n'utilise pas le chiffre 0 ?
- 3) Quel est le plus petit nombre de poids donné p ?
- 4) On se donne plusieurs chiffres (entre 0 et 9). Quels sont les poids que l'on peut obtenir avec les nombres écrits uniquement avec les chiffres donnés ?

3 Des éléments de solution

On verra que je ne donne pas vraiment une solution complète à chacune de ces questions. De fait, certaines ne sont pas évidentes.

On note $p(n)$ le poids d'un entier n .

3.1 Question 1

Il y en a une infinité, par exemple les nombres constitués de p chiffres 1 suivis d'un nombre quelconque de zéros.

3.2 Question 2

Cette question est vraiment difficile et je me contente de donner quelques exemples et une méthode pour aborder le cas général.

3.2.1 Les petits p

On note $\mathcal{N}(p)$ l'ensemble des entiers de poids strict p (i.e. sans utiliser le zéro) et $N(p)$ son cardinal. Voici les listes pour p petit :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(1) &= \{1\}, N(1) = 1, \mathcal{N}(2) = \{2, 11\}, N(2) = 2, \mathcal{N}(3) = \{3, 21, 12, 111\}, \\ N(3) &= 4, \\ \mathcal{N}(4) &= \{4, 31, 13, 22, 211, 121, 112, 1111\}, N(4) = 8, \\ \mathcal{N}(5) &= \{5, 41, 14, 32, 23, 311, 131, 113, 221, 212, 122, 2111, 1211, 1121, 1112, 11111\}, \\ N(5) &= 16. \end{aligned}$$

3.2.2 Un algorithme

Pour un entier p donné, une méthode (laborieuse) consiste à déterminer les partitions de p en entiers positifs ≤ 9 , c'est-à-dire les k -uplets $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq 9$, avec $k \geq 1$, tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_k = p$. Leur nombre est déjà considérable. On peut le calculer par une formule de récurrence double. Si l'on note $P(p, r)$ le nombre de partitions de p avec des termes $\leq r$ on a la formule :

$$P(p, r) = \sum_{1 \leq s \leq r} P(p - s, s)$$

en convenant que $P(0, r)$ vaut 1. Quand on a une partition $a_1 + a_2 + \dots + a_k = p$ comme ci-dessus, avec $a_k \leq 9$ on peut l'écrire $1 + \dots + 1 + 2 + \dots + 2 + \dots + 9 + \dots + 9$ avec α_i chiffres i , $\alpha_i \geq 0$. Il s'agit alors de compter le nombre d'entiers dont les chiffres sont les i de 1 à 9 avec α_i occurrences pour i . Ce sont les permutations avec répétitions, dont le nombre est $\frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_9)!}{\alpha_1! \dots \alpha_9!}$.

Par exemple, ici la partition $6 + 2 + 2 + 1 + 1$ qui vérifie $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_6 = 1$ donne $5!/4 = 30$ nombres, ce qu'on vérifie sans peine ...

3.2.3 Un exemple

On cherche le nombre d'entiers n tels que $p(n) = 8$. La réponse est 128. Pour cela on énumère les 22 partitions de 8 en somme d'entiers compris entre 1 et 9. Les voilà :

8, 7 + 1, 6 + 2, 6 + 1 + 1, 5 + 3, 5 + 2 + 1, 5 + 1 + 1 + 1, 4 + 4, 4 + 3 + 1, 4 + 2 + 2, 4 + 2 + 1 + 1, 4 + 1 + 1 + 1 + 1, 3 + 3 + 2, 3 + 3 + 1 + 1, 3 + 2 + 2 + 1, 3 + 2 + 1 + 1 + 1, 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 2, 2 + 2 + 2 + 1 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

Pour chacune on compte combien il y a d'entiers admettant les chiffres figurant dans la partition. On a :

$$N(8) = 1+2+2+3+2+6+4+1+6+3+12+5+3+6+12+20+6+1+10+15+7+1$$

c'est-à-dire 128.

3.1 Remarque. Bien entendu, pour faire ce type de calcul avec des entiers plus grands il est utile d'écrire des programmes. Attention à ne pas oublier d'écartier les nombres qui admettent le chiffre 0.

3.3 Question 3

On effectue la division euclidienne : $p = 9q + r$ avec $0 \leq r < 9$. Si r est nul, le plus petit nombre n tel que $p(n) = p$ est $n_0 := 999 \dots 99$ avec q chiffres 9, si r n'est pas nul c'est $n_0 := r99 \dots 9$ avec q chiffres 9.

Le cas $r = 0$ est facile. En effet, d'abord, un nombre qui a moins de q chiffres est de poids $< 9q$ donc ne convient pas. À l'opposé, un nombre qui a plus que q chiffres est plus grand que n_0 . Le nombre n a donc exactement q chiffres, de sorte qu'on a $p(n) \leq 9q$ avec égalité si et seulement si tous les chiffres sont des 9, auquel cas on a $n = n_0$.

Le cas $r > 0$. D'abord, un nombre qui a au plus q chiffres est de poids $\leq 9q$ donc ne convient pas. À l'opposé, un nombre qui a plus que $q + 1$ chiffres est plus grand que n_0 . On peut donc supposer que n a exactement $q + 1$ chiffres. Si le plus petit de ces chiffres est $s < r$, on a $p(n) \leq s + 9q < p$ et le nombre ne convient pas. Si l'on a $s > r$, le nombre n est $> n_0$. Il reste donc le cas où $s = r$ et les autres chiffres sont nécessairement égaux à 9. Le plus petit de ces nombres est bien n_0 .

3.4 Question 4

Là encore, la question, pour naturelle qu'elle soit, n'est pas triviale et je n'ai pas de réponse définitive.

3.4.1 Le problème

On se donne r chiffres $n_1 < \dots < n_r$ compris entre 1 et 9. On pose $D = \{n_1, \dots, n_r\}$ (les données). Il s'agit de déterminer l'ensemble $\mathcal{L}(D)$ (noté aussi $\mathcal{L}(n_1, \dots, n_r)$) des poids des nombres écrits uniquement avec les chiffres de D . Autrement dit on a :

$$\mathcal{L}(D) = \{a_1 n_1 + \dots + a_r n_r \mid a_1, \dots, a_r \in \mathbf{N}\}.$$

On notera aussi parfois $\overline{\mathcal{L}(D)}$ le complémentaire $\mathbf{N}^* \setminus \mathcal{L}(D)$.

Commençons par quelques remarques.

3.2 Remarques. 1) Appelons d le $pgcd$ des $n_i \in D$. Si un nombre n est dans $\mathcal{L}(D)$ il est multiple de d . Quitte à diviser n et les n_i par d on est ramené au cas où le $pgcd$ est égal à 1, ce que nous supposons désormais.

2) Si $D \subset D'$ on a $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D')$.

3) L'ensemble $\mathcal{L}(D)$ est évidemment stable par addition mais pas $\overline{\mathcal{L}}(D)$.

3.4.2 Le cas $r = 2$

Le cas $r = 2$ est relativement facile. Le résultat est le suivant :

3.3 Théorème. Soient p, q des entiers positifs premiers entre eux, de sorte que $pq - p - q$ est un nombre impair.

1) Tout entier $n > pq - p - q$ s'écrit sous la forme $ap + bq$ avec $a, b \geq 0$ (donc $n \in \mathcal{L}(p, q)$). L'entier $pq - p - q$ n'est pas de cette forme.

2) L'application $n \mapsto (pq - p - q) - n$ est une involution de l'ensemble $\mathbf{N} \cap [1, pq - p - q - 1]$ qui échange $\mathcal{L}(p, q)$ et $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$. Le nombre d'entiers $n \leq pq - p - q$ qui sont de la forme $ap + bq$ avec $a, b \geq 0$ est $L(p, q) = [(pq - p - q)/2]$ (partie entière) et on a $|\overline{\mathcal{L}}(p, q)| = [(pq - p - q)/2] + 1$.

Démonstration. 1) On montre d'abord que, si $n > pq$, il s'écrit $n = ap + bq$ avec $a, b > 0$. Pour cela, on écrit une relation de Bézout quelconque $\lambda p + \mu q = 1$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$, qui donne $n = \lambda np + \mu nq$. Les solutions a, b de l'équation $ap + bq = n$ sont de la forme $a = \lambda n + kp$ et $b = \mu n - kp$, avec $k \in \mathbf{Z}$, et il s'agit de trouver k de sorte que a et b soient > 0 . Cela donne les conditions $-\frac{\lambda n}{q} < k < \frac{\mu n}{p}$ et il reste à voir s'il existe toujours un entier dans l'intervalle, ce qui est assuré si la différence des bornes est > 1 . On trouve donc la condition $(\frac{\mu}{p} + \frac{\lambda}{q})n = \frac{(\lambda p + \mu q)n}{pq} = \frac{n}{pq} > 1$, c'est-à-dire $n > pq$.

L'assertion de l'énoncé en résulte car, comme a, b sont > 0 on peut leur retirer une unité à chacun, ce qui permet de trouver les entiers $> pq - p - q$ sous la forme $ap + bq$ avec $a, b \geq 0$.

Si $pq - p - q = ap + bq$ avec $a, b \geq 0$ on a $pq = (a + 1)p + (b + 1)q$ avec $a + 1$ et $b + 1$ positifs. On voit que $a + 1$ est multiple de q et $b + 1$ de p , de sorte que le second membre vaut au moins $2pq$ ce qui est absurde.

Sur cette question on pourra consulter ma page web :

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/arithmetique/diophantepositif.pdf>

2) Il est clair que l'application est une involution sans point fixe. Soit $n < pq - p - q$, $n \in \mathcal{L}(p, q)$. Alors, $pq - p - q - n$ n'est pas dans $\mathcal{L}(p, q)$, sinon $pq - p - q$ y serait aussi et c'est absurde. Inversement, soit $1 \leq n < pq - p - q$, $n \in \overline{\mathcal{L}}(p, q)$. Le théorème de Bézout montre que n s'écrit comme combinaison

linéaire de p, q , mais obligatoirement avec des coefficients dans \mathbf{Z} , disons, par exemple, $n = ap - bq$ avec $a, b \in \mathbf{N}^*$. On peut supposer $a \leq q - 1$. En effet, on divise a par q : $a = sq + r$ avec $0 \leq r < q$. On a ainsi $n = rp + (sp - b)q$ avec $0 \leq r \leq q - 1$ et $sp - b < 0$ (sinon n serait dans $\mathcal{L}(p, q)$).

Mais alors on a $(pq - p - q) - n = ((q - 1)p - q) - (ap - bq) = (q - 1 - a)p + (b - 1)q$ et, comme $q - 1 - a$ et $b - 1$ sont ≥ 0 , on voit que $pq - p - q - n$ est dans $\mathcal{L}(p, q)$. Dans l'intervalle $[1, pq - p - q - 1]$ il y a donc le même nombre d'éléments de $\mathcal{L}(p, q)$ et de $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$. Les calculs de cardinaux en résultent aussitôt (on n'oubliera pas que $pq - p - q$ est dans $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$).

3.4 Exemple. Par exemple, avec les chiffres 5 et 7 on obtient tous les entiers $n > 5 \times 7 - 5 - 7 = 23$. En deçà de cette valeur on obtient les entiers 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22 (11 entiers). Les valeurs non obtenues sont les $23 - n$ avec n dans la liste précédente, plus le nombre 23 lui-même (12 valeurs).

On déduit du cas $r = 2$ un corollaire pour le cas général :

3.5 Corollaire. *Si le pgcd des n_i est égal à 1, $\mathcal{L}(D)$ contient tous les entiers à partir d'un certain rang.*

Démonstration. C'est évident si 1 est dans D , et sinon, comme les n_i sont premiers entre eux, il existe $p, q \in D$ premiers entre eux¹, de sorte qu'on obtient tous les entiers $> pq - p - q$.

3.4.3 Les cas $r \geq 3$

Pour $r > 2$ les choses sont plus délicates. Voici quelques remarques. On suppose toujours les n_i premiers entre eux.

3.6 Remarques. 1) Si le chiffre 1 figure parmi les n_i , on obtient tous les entiers. On supposera donc désormais $n_1 > 1$.

2) Il est clair que les entiers $< n_1$ ne sont pas dans $\mathcal{L}(D)$.

3) Si l'on a, dans $\mathcal{L}(D)$, n_1 entiers consécutifs : $a + 1, \dots, a + n_1$, tous les entiers $\geq a + 1$ sont dans $\mathcal{L}(D)$.

4) Si l'on adjoint à D un multiple d'un des $n_i \in D$, l'ensemble $\mathcal{L}(D)$ ne change pas. Il en est de même si l'on ajoute à D un entier $\equiv n_i \pmod{n_1}$.

On a un résultat dans le cas $n_1 = 2$:

1. Attention, cette propriété n'est pas toujours vraie, ainsi si p, q, r sont des nombres premiers distincts, pq, pr et qr sont premiers entre eux dans leur ensemble, mais deux d'entre eux ne le sont pas. Le lecteur vérifiera qu'avec des entiers compris entre 1 et 9 cela ne peut pas se produire.

3.7 Proposition. Si $n_1 = 2$, on peut supposer les autres n_i impairs (cf. 3.6.4). L'ensemble $\mathcal{L}(D)$ est formé des nombres pairs et des nombres impairs $\geq n_2$ (autrement dit il manque les nombres impairs $1, \dots, n_2 - 2$).

Démonstration. C'est clair.

On peut aussi traiter le cas $n_1 = 3$:

3.8 Proposition. Si $n_1 = 3$, en vertu de 3.6.4, on peut supposer les autres n_i non multiples de 3 et $n_2 \not\equiv n_3 \pmod{3}$. L'ensemble $\mathcal{L}(D)$ est alors formé des multiples de 3, des entiers $\equiv n_2 \pmod{3}$ et $\geq n_2$ et des entiers $\equiv n_3 \pmod{3}$ et $\geq n_3$. En particulier il contient tous les entiers $\geq n_3$.

Démonstration. Il est clair que les entiers indiqués sont dans $\mathcal{L}(D)$. La seule chose non évidente est de vérifier qu'il n'y a pas d'entier $\equiv n_3 \pmod{3}$ et $< n_3$. La seule manière d'avoir un tel entier serait de prendre $2n_2$. Mais comme on a $n_2 \geq 4$, donc $2n_2 \geq 8$, l'entier n_3 , qui est congru à $2n_2$ modulo 3 et $> 2n_2$, serait au moins 11, donc > 9 ce qui est absurde.

3.9 Exemple. Si $D = \{3, 5, 7\}$, $\mathcal{L}(D)$ contient 3, 5, 6 et tous les entiers ≥ 7 .

Pour $n_1 = 4$, en supposant les n_i sans congruences modulo 4 il n'y a plus que six cas : $\{4, 5, 6\}$; $\{4, 5, 7\}$; $\{4, 6, 7\}$; $\{4, 6, 9\}$; $\{4, 5, 6, 7\}$; $\{4, 6, 7, 9\}$ et les valeurs de $\mathcal{L}(D)$ sont respectivement les suivantes ; $\{1, 2, 3, 7\}$; $\{1, 2, 3, 6\}$; $\{1, 2, 3, 5, 9\}$; $\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$; $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 3, 5\}$.

Le lecteur pourra traiter les cas $n_1 \geq 5$ si le cœur lui en dit ... (Il y a 11 cas pour $n_1 = 5$, 4 pour $n_1 = 6$ et un seul pour $n_1 = 7$.)

3.4.4 C'est le fonds qui manque le moins

La Fontaine nous propose cet adage, traduit ici en termes de $\mathcal{L}(D)$. On a vu que les nombres $< n_1$ ne sont pas dans $\mathcal{L}(D)$. La question est de déterminer quelles sont les données pour lesquelles il ne manque que ceux là. Voici la réponse :

3.10 Proposition. Les données $D = \{n_1, \dots, n_r\}$ avec $1 \leq n_1 < \dots < n_r \leq 9$ qui sont telles que $\overline{\mathcal{L}(D)}$ soit exactement égal à $\{1, \dots, n_1 - 1\}$ sont exactement celles qui contiennent l'un des ensembles suivants : $\{1\}$; $\{2, 3\}$; $\{3, 4, 5\}$; $\{4, 5, 6, 7\}$; $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Démonstration. Il est clair que les données répertoriées ci-dessus conviennent (voir 3.6.3). La réciproque est facile : si le plus petit entier donné est n_1 , il faut avoir tous les entiers compris entre n_1 et $2n_1 - 1$, sinon les entiers absents ne seront pas atteints.

3.4.5 C'est le fonds qui manque le plus ?

Cette fois la question est de savoir quelle est la donnée pour laquelle $\overline{\mathcal{L}}(D)$ est le plus grand possible, autrement dit de déterminer les mauvais D . La réponse est la suivante :

3.11 Proposition. *Parmi les D formés d'entiers premiers entre eux, c'est pour $D = \{8, 9\}$ que $\overline{\mathcal{L}}(D)$ a le plus grand cardinal (28).*

Démonstration. Comme $\mathcal{L}(D)$ augmente avec D on est ramené au cas où $D = \{p, q\}$ et on sait qu'alors le cardinal de $\overline{\mathcal{L}}(D)$ est $[(pq - p - q)/2] + 1$. Il est donc maximum lorsque $pq - p - q = (p - 1)(q - 1) + 1$ l'est, donc lorsque p, q sont les plus grands possibles, i.e. 8 et 9.

3.12 Remarque. Dans le cas 8, 9 il manque les sept paquets de nombres $[55 - 9k, \dots, 55 - 8k]$ pour $k = 6, 5, \dots, 1, 0$.

3.13 Remarque. Pour les D de cardinal ≥ 3 , je subodore que c'est $D = \{7, 8, 9\}$ qui est le plus mauvais (déficit 12). Dans le cas 7, 8, 9 on obtient tous les nombres > 20 (car on a 21, \dots , 27, cf. 3.6.3). Il manque 1, \dots , 6, 10, 11, 12, 13, 19, 20.