Le problème 1 du numéro 554

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question : une construction d'Escher

Soit ABC un triangle. On construit, à l'extérieur de ABC trois triangles BPC, CQA, ARB isocèles en P, Q, R avec des angles égaux à $120°$ en P, Q, R. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

C'est une très jolie question qui m'a donné bien du fil à retordre.

Un préliminaire : le lemme du chevron

C'est l'un des "lemmes du collège" de [1] (Ch. 7, cor. 2.8), lemme très utile[1] dont je fais la publicité depuis longtemps. Le lecteur le verra à l'œuvre ici. On note $\mathscr{A}(X)$ l'aire d'une partie X du plan.

1.1 Lemme. *Soit ABC un triangle, M un point du plan distinct de A. On suppose que la droite (MA) coupe (BC) en A'. Alors on a la relation* $\dfrac{\mathscr{A}(ABM)}{\mathscr{A}(ACM)} = \dfrac{A'B}{A'C}$.

Démonstration.

On a $\mathscr{A}(ABM) = \mathscr{A}(ABA') - \mathscr{A}(MBA')$ et $\mathscr{A}(ACM) = \mathscr{A}(ACA') - \mathscr{A}(MCA')$ et la formule $aire = base \times hauteur/2$ montre qu'on a $\dfrac{\mathscr{A}(ABA')}{\mathscr{A}(ACA')} = \dfrac{\mathscr{A}(MBA')}{\mathscr{A}(MCA')} = \dfrac{A'B}{A'C}$ d'où le résultat par différence.

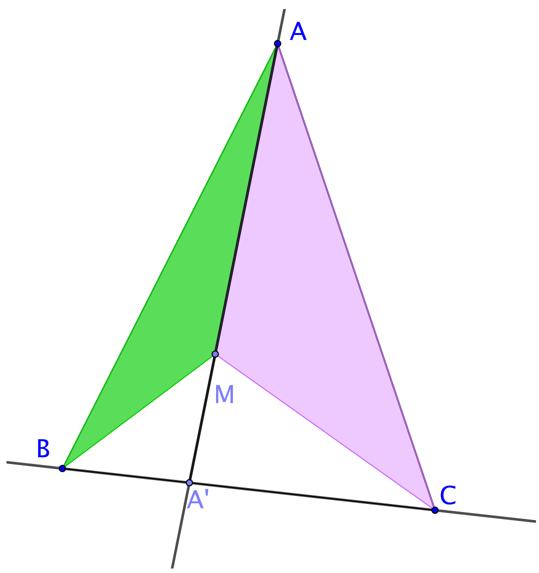

FIGURE 1 –

1. Il permet notamment de montrer le concours des médianes d'un triangle.

1.2 *Remarque.* Le nom de lemme du chevron se comprend bien lorsqu'on est dans la position de la figure, mais il vaut (en adaptant la preuve) même si M est extérieur au triangle ou A' extérieur à $[BC]$.

2 Solution 1 : avec Céva

2.1 La méthode

On note α, β, γ les angles du triangle ABC et on suppose, par exemple, que α est le plus grand angle. On appelle D, E, F les intersections de (PA), (QB) et (RC) avec (BC), (CA) et (AB) respectivement. (Ces intersections existent car A et P, par exemple, sont de part et d'autre de (BC) par hypothèse.) Nous allons utiliser la réciproque du théorème de Céva qui s'énonce ainsi :

Soit ABC un triangle et D, E, F des points de (BC), (CA) et (AB) respectivement, distincts de A, B, C. On suppose qu'on a la relation :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$$

alors, les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes ou parallèles.

Le sens direct de Céva résulte aisément du lemme du chevron et le sens réciproque, dans le cas où deux des droites se coupent, est conséquence du sens direct.

2.2 Premier cas : $\alpha < 150°$

Dans ce cas, les points D, E, F sont dans les segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. En effet, l'hypothèse sur les angles assure que les points P, Q, R sont dans les secteurs $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$ et $[\widehat{ACB}]$ respectivement. Il s'ensuit que A et C, par exemple, sont de part et d'autre de (BQ). Une conséquence est aussi que les droites $(AP) = (AD)$ et $(BQ) = (BE)$ ne sont pas parallèles (A et C sont de part et d'autre de (BE) et D est du même côté que C, de sorte que $[AD]$ coupe (BE)).

Il suffit donc de montrer qu'on a $\dfrac{DB}{DC} \times \dfrac{EC}{EA} \times \dfrac{FA}{FB} = 1$. Mais on peut interpréter ces rapports comme des rapports d'aires : $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{\mathscr{A}(APB)}{\mathscr{A}(APC)}$ et de même pour les autres par permutation circulaire, en vertu du lemme du chevron. Or, on a $\mathscr{A}(APB) = \frac{1}{2}BA \times BP \times \sin(\beta + 30°)$ et $\mathscr{A}(APC) = \frac{1}{2}CA \times CP \times \sin(\gamma + 30°)$. Comme on a $PB = PC$, le rapport d'aires est donc $\dfrac{BA \times \sin(\beta + 30°)}{CA \times \sin(\gamma + 30°)}$. Mais les autres rapports se calculent de la même manière, ils sont obtenus par permutation circulaire et le produit des rapports comprend au numérateur et au dénominateur le produit des trois longueurs des côtés de ABC et des trois sinus de leurs angles, augmentés de 30°, donc le produit des rapports vaut 1 comme annoncé.

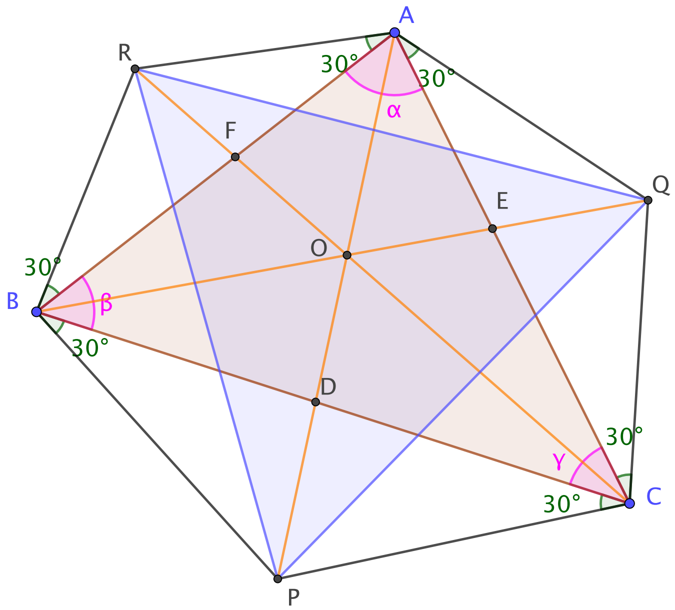

FIGURE 2 – Le cas $\alpha < 150°$

2.3 Le cas $\alpha > 150°$

La démonstration est analogue, voir la figure ci-dessous. Cette fois, le point D est encore dans $[BC]$ mais E et F sont hors des côtés ce qui montre que les rapports de mesures algébriques correspondants sont positifs et que le produit est bien muni du signe $-$. Les calculs avec les aires sont les mêmes (on peut trouver par exemple un angle qui vaut $360° - \alpha - 30°$ mais son sinus est le même que celui de $\alpha + 30°$) et la conclusion est la même.

2.1 *Remarque.* Si $\alpha = 150°$, les trois droites concourent en A. C'est le seul cas où les points E, F sont aussi en A.

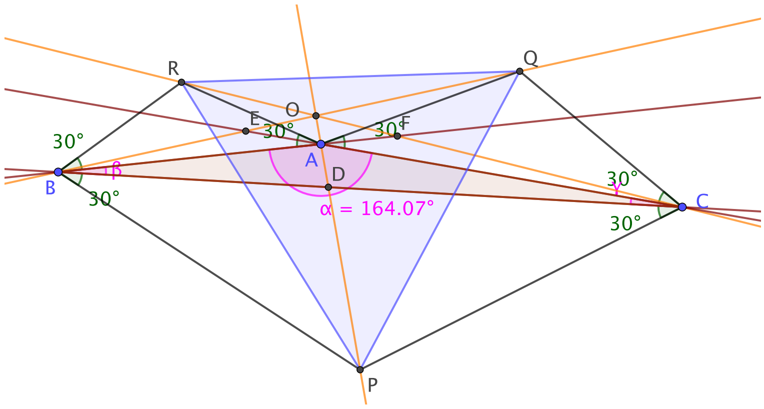

FIGURE 3 – Le cas $\alpha > 150°$

3 Napoléon

La situation étudiée dans la question du bulletin APM est une variante d'un problème attribué [2] à Napoléon. On raconte qu'à la présentation du théorème devant l'Académie des sciences en 1797 au retour de la campagne d'Italie, Lagrange aurait dit à Napoléon : *"Nous attendions tout de vous, mon Général, mais pas une leçon de géométrie."*

Voici une liste de propriétés de cette figure, sans doute non exhaustive :

3.1 Théorème. *Soit ABC un triangle. On construit, à l'extérieur de ABC trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC' et on note respectivement P, Q, R leurs centres* [3]*. On a les propriétés suivantes :*

1) Le triangle PQR est équilatéral et son centre est le centre de gravité G de ABC.

2) Les droites (AA'), (BB') et (CC') concourent en un point F et on a $AA' = BB' = CC'$. Si les angles de ABC sont tous plus petits que $120°$, le point F est le point de Fermat de ABC autrement dit, il réalise le minimum de la somme des longueurs $MA + MB + MC$ et les angles $\widehat{BFC}$, $\widehat{CFA}$ et $\widehat{AFB}$ sont tous égaux à $120°$.

Démonstration. Je montre seulement le fait que PQR est équilatéral dont j'aurai besoin au paragraphe suivant. Il y a de nombreuses manières de le faire. La plus élémentaire consiste à noter que les triangles QCP et ACA' sont semblables (les angles en C sont égaux et les côtés adjacents à ces angles sont dans le rapport $\sqrt{3}$). On en déduit qu'on a $QP = AA'/\sqrt{3}$. En procédant

2. Mais c'est sans doute une légende.
3. Ce sont bien sûr les points définis dans la question APM 554-1.

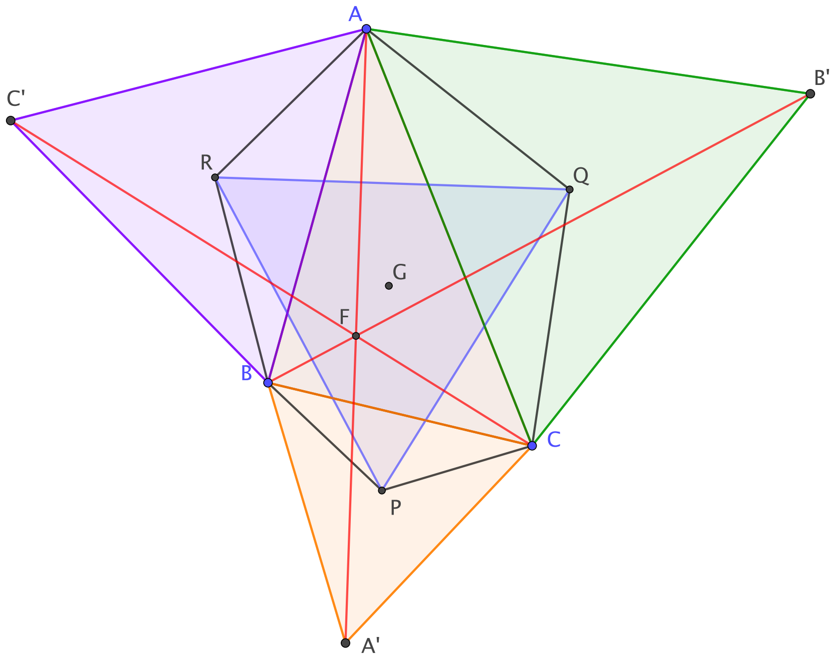

FIGURE 4 – Le problème de Napoléon

de même avec RBP et ABA' on trouve aussi $PR = AA'/\sqrt{3}$ d'où $QP = PR$. Par permutation circulaire on obtient ainsi les égalités $QR = RP = PQ$.

Une autre méthode consiste à utiliser la composée de la similitude de centre A qui envoie Q en C et de celle de centre B qui envoie C en P et à noter que c'est la rotation de centre R et d'angle $-60°$ et qu'elle transforme $[RQ]$ en $[RP]$.

Enfin, le calcul est très facile aussi en utilisant les complexes et on le reverra plus loin. On note a, b, c, p, q, r les affixes des points. Les rotations de $120°$ donnent $b - p = j(c - p)$, $c - q = j(a - q)$ et $a - r = j(b - r)$ d'où l'on tire $(1 - j)p = b - jc$, $(1 - j)q = c - ja$ et $(1 - j)r = a - jb$. On vérifie qu'on a $p + jq + j^2r = 0$ ce qui montre que PQR est équilatéral.

4 Solution 2 : avec le lemme du double chevron

4.1 Le lemme

Le lemme du double chevron est un joli résultat de concours de trois droites qui fait intervenir les aires.

4.1 Théorème. (Lemme du double chevron) *Soient A, B, C, P, Q, R six points du plan affine. On suppose que les points A, P (resp. B, Q, resp. C, R) sont distincts. Alors les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a l'égalité de rapports d'aires orientées :* $\dfrac{\mathscr{A}(APC)}{\mathscr{A}(APR)} = \dfrac{\mathscr{A}(BQC)}{\mathscr{A}(BQR)}$.

Démonstration. Pour toutes précisions, voir la prop. 5.5.14 de : `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livregeometrie/DPPartie2.pdf`

Je traite seulement ici le cas concourant et précisément je montre le lemme suivant :

4.2 Lemme. *Soient A, B, C, P, Q, R six points du plan affine. On suppose que les points A, P (resp. B, Q, resp. C, R) sont distincts et que les droites (AP) et (CR) (resp. (BQ) et (CR)) se coupent en O (resp. O') avec $O, O' \in [CR]$. Alors les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si on a l'égalité de rapports d'aires (ordinaires) :* $\dfrac{\mathscr{A}(APC)}{\mathscr{A}(APR)} = \dfrac{\mathscr{A}(BQC)}{\mathscr{A}(BQR)}$.

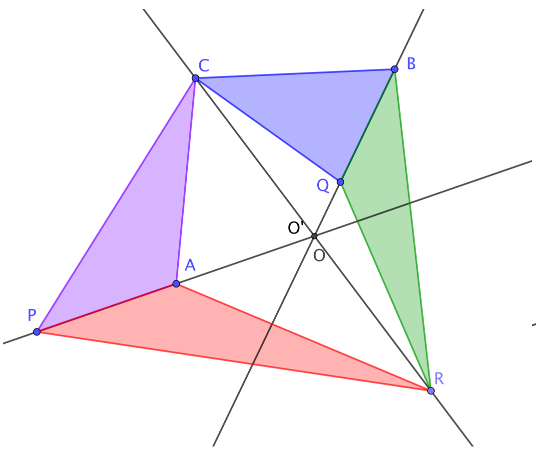

FIGURE 5 – Le double chevron

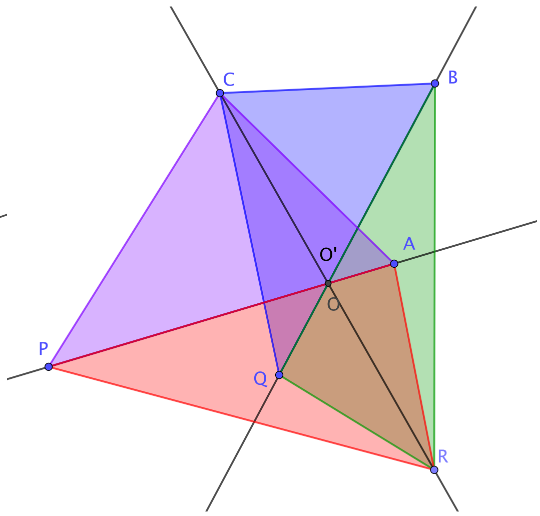

FIGURE 6 – Le double chevron quand les chevrons n'en sont plus

Démonstration. Voir les figures 5 et 6. Le lemme du chevron donne $\dfrac{\mathscr{A}(APC)}{\mathscr{A}(APR)} = \dfrac{OC}{OR}$ $\Big($resp. $\dfrac{\mathscr{A}(BQC)}{\mathscr{A}(BQR)} = \dfrac{O'C}{O'R}\Big)$. L'égalité des rapports d'aires est donc équivalente à $\dfrac{OC}{OR} = \dfrac{O'C}{O'R}$ ce qui, comme O, O' sont tous deux dans le segment $[CR]$, signifie $O = O'$, donc le concours de (AP), (BQ), (CR).

4.2 Son application

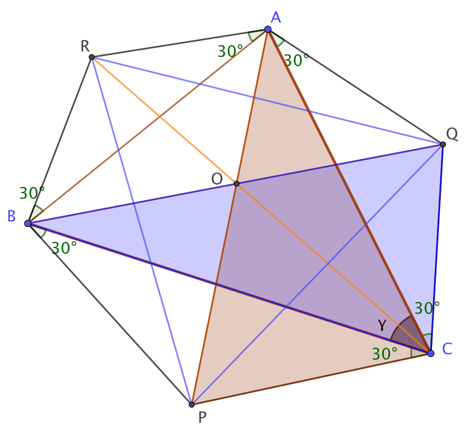

FIGURE 7 –

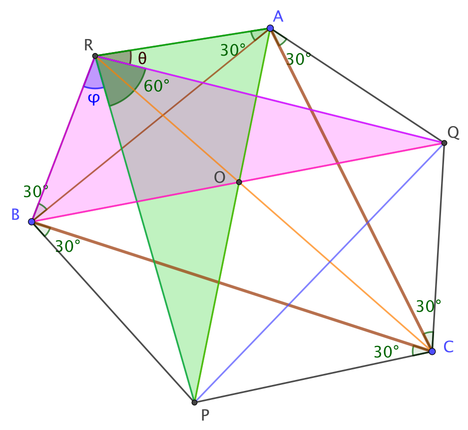

FIGURE 8 –

Le lecteur vérifiera qu'on est exactement dans le cadre d'application de 4.2. Il suffit évidemment de montrer les deux égalités $\mathscr{A}(APC) = \mathscr{A}(BQC)$ et $\mathscr{A}(APR) = \mathscr{A}(BQR)$.

Pour la première (voir figure 7) on note que les triangles AQC et CPB sont semblables (ils ont des angles de $30°$, $30°$ et $120°$) et on a donc $\dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{CA}{CB}$ ou encore $CQ \times CB = CP \times CA$. Comme les angles $\widehat{ACP}$ et BCQ sont égaux à $\gamma + 30°$, on conclut grâce à la formule d'aire utilisant le sinus.

Pour la seconde (voir figure 8) on utilise le résultat "de Napoléon". On calcule les aires par la formule du sinus : $\mathscr{A}(APR) = \frac{1}{2} RA \times RP \times \sin(\widehat{ARP})$ et $\mathscr{A}(BQR) = \frac{1}{2} RB \times RQ \times \sin(\widehat{BRQ})$. Or on a $RA = RB$ par construction, $RP = RQ$ par Napoléon. De plus, voir figure 8, on a $\widehat{ARP} = \theta + 60°$ (toujours Napoléon) et $\widehat{BRQ} = \varphi + 60°$ et $\theta + \varphi + 60° = 120°$ donc aussi $(\theta + 60°) + (\varphi + 60°) = 180°$, de sorte que les angles $\widehat{ARP}$ et $\widehat{BRQ}$ sont supplémentaires, donc ont même sinus et on a le résultat.

5 Avec les complexes

5.1 Une condition de concours

Lorsqu'on travaille avec les complexes, on manque cruellement d'une condition de concours de trois droites qui soit commode à utiliser. Le lemme du double chevron va en donner une, assez saumâtre, mais qui a le mérite d'exister. Rappelons que l'aire algébrique du triangle ABC n'est autre [4] que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Le calcul du déterminant de deux vecteurs en complexes est donné par le lemme évident suivant :

5.1 Lemme. *Si $\vec{Z}, \vec{W}$ sont deux vecteurs d'affixes $z, w \in \mathbf{C}$, on a* $\det(\vec{Z}, \vec{W}) = \mathrm{Im}\,(\overline{z}w) = \dfrac{\overline{z}w - z\overline{w}}{2i}\cdot$

Cela permet de formuler la condition de concours :

5.2 Proposition. *Soient $A, B, C; P, Q, R$ six points du plan d'affixes a, b, c ; p, q, r. On suppose $A \neq P$, $B \neq Q$ et $C \neq R$. Alors, les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes ou parallèles si l'on a la relation $(*)$:*

$$\big((\overline{p}-\overline{a})(c-a)-(p-a)(\overline{c}-\overline{a})\big) \times \big((\overline{q}-\overline{b})(r-b)-(q-b)(\overline{r}-\overline{b})\big) := \alpha \times \beta$$

$$= \big((\overline{p}-\overline{a})(r-a)-(p-a)(\overline{r}-\overline{a})\big) \times \big((\overline{q}-\overline{b})(c-b)-(q-b)(\overline{c}-\overline{b})\big) := \gamma \times \delta.$$

Démonstration. C'est la traduction de la relation $\dfrac{\mathscr{A}(APC)}{\mathscr{A}(APR)} = \dfrac{\mathscr{A}(BQC)}{\mathscr{A}(BQR)}\cdot$

5.2 Application au problème posé

Dans le cas du problème initial, on a vu qu'on a les formules $(1-j)p = b - jc$, $(1-j)q = c - ja$ et $(1-j)r = a - jb$. On pose $x = b - c$, $y = c - a$ et $z = a - b$. On a alors $(1-j)(p-a) = -z - jy$, $(1-j)(q-b) = -x - iz$, $(1-j)(r-a) = jz$ et $(1-j)(r-b) = z$. On vérifie alors, par un calcul un peu pénible, que l'on a, avec les notations de 5.2, $\alpha = -\delta$ et $\beta = -\gamma$, ce qui montre $(*)$ et redonne le théorème attendu.

Références

[1] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.

4. On peut oublier les coefficients 1/2 qui vont disparaître dans les calculs. D'ailleurs si l'on prend comme unité d'aire le triangle moitié du carré unité, la formule est juste sans le 1/2.