Les problèmes 2,3,4 du numéro 554

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 De la somme au produit (554-2)

Ce problème m'a été proposé par Jacques Douaire (du temps où nous étions collègues à l'IUFM de Versailles). Il a été utilisé par l'équipe ERMEL à l'école élémentaire, voir le passionnant livre [1]. Je donne ci-dessous le résultat et une preuve destinée à des profs de maths. Pour voir comment des élèves de CM1 ou CM2 peuvent aborder et (essentiellement) résoudre ce problème on se reportera à [1].

1.1 Théorème. *Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On considère les décompositions additives de N : $N = a_1 + \cdots + a_n$ avec $n \geq 1$ et les a_i entiers ≥ 1. Parmi ces décompositions, celles pour laquelle le produit $a_1 \cdots a_n$ est maximum sont données comme suit :*

1) Si N est multiple de 3, $N = 3k$, c'est $N = 3+3+\cdots+3$ avec k termes égaux à 3.

2) Si N est congru à 1 modulo 3, $N = 3k+1$, c'est $N = 3+\cdots+3+2+2$ avec $k-1$ termes égaux à 3 et deux égaux à 2 ou $N = 3+\cdots+3+4$ avec $k-1$ termes égaux à 3 et un égal à 4.

3) Si N est congru à 2 modulo 3, $N = 3k+2$, c'est $N = 3+\cdots+3+2$ avec k termes égaux à 3 et un égal à 2.

Démonstration. On note d'abord qu'il y a un nombre fini de décompositions de N, donc qu'il y en a bien pour lesquelles le produit soit maximum. Soit $N = a_1 + \cdots + a_n$ une décomposition qui atteint le maximum. On fait plusieurs remarques :

1) La décomposition ne contient pas de 1. Sinon, comme elle a au moins deux termes (car $N \geq 2$), on a $N = 1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ et la décomposition $(a_2+1) + a_3 + \cdots + a_n$ admet un plus grand produit : $(a_2+1)a_3 \cdots a_n = a_2 \cdots a_n + a_3 \cdots a_n$ au lieu de $a_2 \cdots a_n$ (et $a_3 \cdots a_n$ est ≥ 1 même si $n = 2$: le produit vide est égal à 1 comme cet exemple permet de le vérifier).

2) La décomposition ne contient pas d'entier ≥ 5. En effet, si l'on a $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ avec $a_1 \geq 5$, on obtient un produit strictement plus grand en remplaçant a_1 par $2 + (a_1 - 2)$ en vertu du lemme évident suivant :

1.2 Lemme. *Si p est un entier ≥ 3 on a $2p > p + 2$.*

3) Si la décomposition contient des 4 on peut remplacer chacun d'eux par $2+2$ sans changer le produit. On peut donc supposer que la décomposition ne contient pas de 4. Elle est alors exclusivement composée de 2 et de 3.

4) Si la décomposition contient trois 2, on peut les remplacer par deux 3 en augmentant le produit car on a $3 \times 3 = 9 > 2 \times 2 \times 2 = 8$. On voit qu'une décomposition maximum contient donc au plus deux termes égaux à 2.

5) Il n'y a plus qu'à conclure en notant que les décompositions sont donc du type $3k$ ou $3k+2$ ou $3k+2+2$ et que cela correspond aux congruences de N modulo 3.

2 Les factorielles (554-3)

2.1 Théorème. *Soient a, b des entiers > 0. Le nombre $M(a,b) := \dfrac{(ab)!}{a! \times (b!)^a}$ est un entier.*

Démonstration. On fixe un entier b quelconque et on raisonne par récurrence sur a. On a $M(1,b) = 1$. Supposons $M(a,b)$ entier et montrons que $M(a+1,b)$ l'est aussi. On a :

$$M(a+1,b) = M(a,b) \times \frac{(ab+1)(ab+2)\cdots(ab+b-1)(ab+b)}{(a+1) \times b!} := M(a,b)C(a,b).$$

En divisant numérateur et dénominateur de $C(a,b)$ par $ab+b = (a+1)b$ il reste $C(a,b) = \dfrac{(ab+1)(ab+2)\cdots(ab+b-1)}{(b-1)!}$ et on constate qu'on a $C(a,b) = \dbinom{ab+b-1}{b-1}$ et ce coefficient binomial est un entier, d'où le résultat.

2.2 *Remarque.* La démonstration précédente permet de donner une version explicite de $M(a,b)$:

$$M(a,b) = \prod_{k=1}^{a} \binom{kb-1}{b-1}.$$

3 Inconnue et paramètre (554-4)

3.1 La question et sa solution

3.1 Théorème. *Soit $n \in \mathbf{N}$. L'équation en x, y : $y^2 - x^2 = n^7 - n^4$ a des solutions entières si et seulement si l'on a $n \not\equiv 3 \pmod 4$.*

Démonstration. Il est bien connu qu'un entier $d \in \mathbf{N}$ est différence de deux carrés si et seulement s'il n'est pas congru à 2 modulo 4, voir par exemple [2], exercice 39 ou annexe ci-dessous. Il reste à examiner quand $n^7 - n^4$ est congru à 2 modulo 4. Si n est pair $n^7 - n^4$ est multiple de 4. Si n est congru à 1 modulo 4, $n^7 - n^4$ est encore congru à 0 modulo 4. En revanche, si n est congru à 3 modulo 4 (c'est-à-dire à -1), on a $n^7 - n^4 \equiv -1 - 1 \equiv 2 \pmod 4$.

Sans beaucoup d'efforts on obtient la généralisation suivante :

3.2 Proposition. *Soient p, q des entiers avec $p > q \geq 1$. L'équation $x^2 - y^2 = n^p - n^q$, pour $n \in \mathbf{N}$, admet des solutions x, y entières sauf dans les cas suivants :*

1) Pour $q = 1$: si $n \equiv 2 \pmod 4$ ou (si p est pair et $n \equiv 3 \pmod 4$).

2) Pour $q \geq 1$: si p et q sont de parités différentes et $n \equiv 3 \pmod 4$.

3.2 Annexe : les différences de carrés

Un nombre impair est différence de deux carrés : $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$. Un nombre multiple de 4 aussi : $4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2$. En revanche un nombre congru à 2 modulo 4 ne l'est pas car les carrés modulo 4 sont 0 et 1 et leurs différences peuvent valoir 0, 1 ou -1 (c'est-à-dire 3 modulo 4), mais jamais 2.

Références

[1] ERMEL, *Vrai ? Faux ? ... On en débat !*, INRP, 1999.

[2] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.