Le problème 1 du numéro 555

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question : l'intersection inaccessible

Deux droites d_1, d_2 se coupent en un point O. Malheureusement ce point est situé en dehors de la feuille. Soit M un point placé sur la feuille entre les deux droites ; comment tracer la droite (OM)

1) à l'aide d'une règle et d'une équerre ?

2) à l'aide d'une règle et d'un compas ?

3) à l'aide d'une règle seulement ?

2 Remarques préliminaires

C'est une belle question, très classique, pour laquelle je proposerais volontiers le principe suivant :

Principe. *Toute idée non stupide conduit à une solution de la question posée.*

À l'appui de ce principe, je propose ci-dessous plus de 20 solutions différentes de la question posée et je suis sûr que beaucoup d'autres sont possibles.

2.1 *Remarques.* 1) Un mot sur les instruments. Évidemment, tout ce qui peut être fait à la règle seule peut l'être avec la règle et un autre instrument. De même tout ce qui peut être fait avec règle et équerre peut l'être avec règle et compas.

2) Je ne justifierai pas la possibilité des constructions à la règle et au compas, renvoyant le lecteur aux nombreux livres qui traitent de cette question. Un principe simple peut nous guider : toutes les macros de GeoGebra, hormis celles qui mettent en jeu des nombres et celles qui concernent les coniques, sont réalisables à la règle et au compas.

3) Dans tous les exemples traités ci-dessous, je me suis débrouillé pour que la figure puisse être faite dans la feuille. En général, cela dépend de la position des droites, de M et de O et les constructions ne fonctionnent pas toujours. Il n'est sans doute pas du tout évident de délimiter le domaine de validité de chaque méthode.

3 Les constructions à la règle seule

Je renvoie à [1] dont j'utilise les notations (lettres minuscules pour les points et majuscules pour les droites). Le plan (projectif) est noté $\mathbf{P}$.

3.1 Avec le théorème à quatre points

Voir [1] Exercice 2.5.12 et Figure 1.

3.1 Théorème. *Soient a, b, c, d formant un repère de $\mathbf{P}$ (c'est-à-dire que trois quelconques d'entre eux sont non alignés). Soient a', b', c' les intersections respectives de (ad) et (bc) ; (bd) et (ca) ; (cd) et (ab). On considère les points a'', b'', c'' intersections des côtés des triangles abc et $a'b'c'$ (par exemple, a'' intersection de (bc) et $(b'c')$, etc.). Alors a'', b'', c'' sont alignés.*

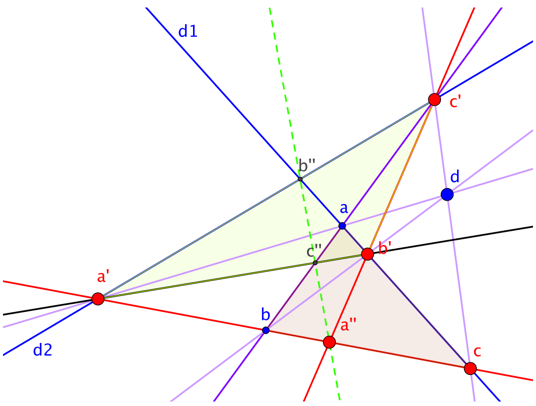

Figure 1 – Le théorème à quatre points

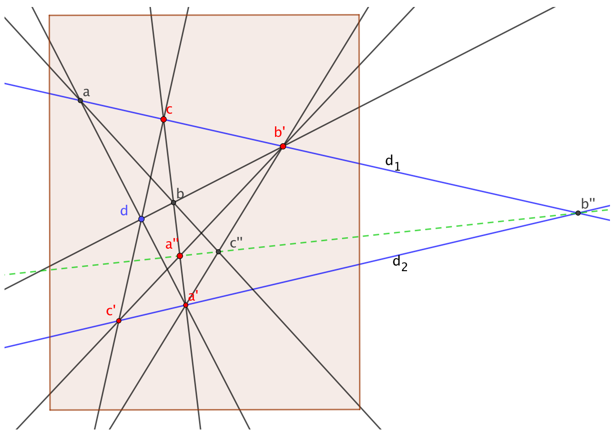

Figure 2 – Avec le théorème à quatre points

On en déduit une solution du problème posé. Il suffit de reconstituer la figure du théorème à quatre points, voir Figure 2. La droite cherchée sera $(a''b''c'')$ (M est a'', O est b''). On prend c, b' sur d_1 on en déduit c', a' sur d_2. On choisit d quelconque sur (cc') qui donne a, b et on obtient $c'' = (ab) \cap (a'b')$. La droite cherchée est $(a''c'')$.

3.2 Avec la polaire

Voir [1] théorème 2.4.1.

3.2 Théorème. *Soient A, B deux droites distinctes sécantes en o et soit $d \notin A \cup B$. Soient $\Delta, \Delta', \Delta''$ trois droites distinctes, passant par d mais pas par o, qui coupent respectivement A, B en a, b ; a', b' ; a'', b''. On considère les points d'intersection u, v de (ab') et (ba') et de $(a'b'')$ et $(b'a'')$ respectivement. Alors, les points o, u, v sont alignés.*

La droite $D = (ou)$ est appelée **polaire** *de d par rapport aux droites A, B.*

Pour trouver une solution du problème posé on reconstitue la figure de la polaire, voir Figure 3. Les droites d_1, d_2 sont A, B, donc O est en o et M est égal à u. On choisit $a, a' \in A$ et $b'' \in B$ qui déterminent tous les autres points. La droite cherchée est (uv).

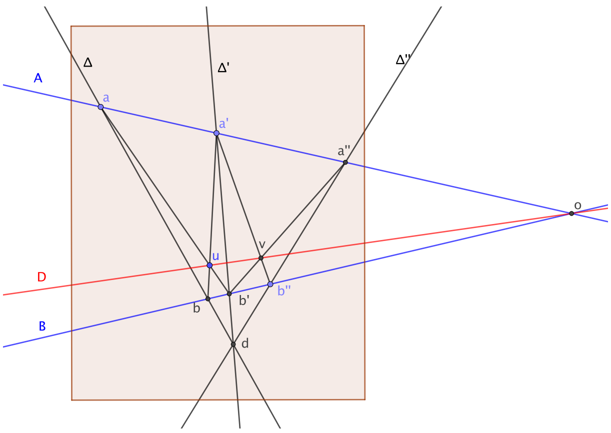

FIGURE 3 – Avec la polaire

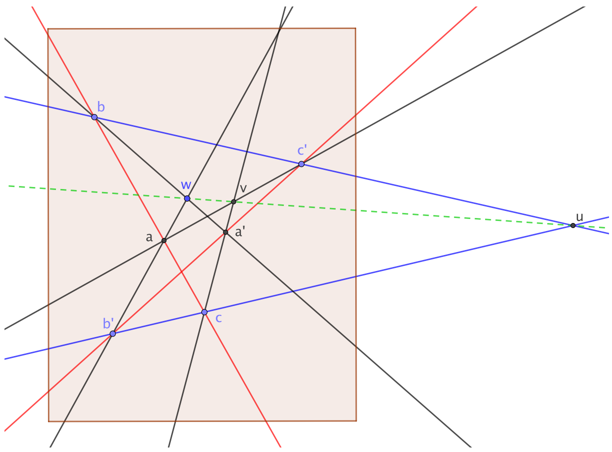

FIGURE 4 – Avec Pappus

3.3 Avec le théorème de Pappus

Il s'agit du théorème suivant, voir [1] théorème 2.2.1 :

3.3 Théorème. *Soient D, D' deux droites distinctes de* **P***, se coupant en o et soient a, b, c (resp. a', b', c') trois points distincts de D (resp. de D'), distincts de o. On appelle respectivement u, v, w les points d'intersection des droites (bc') et $(b'c)$, (ca') et $(c'a)$, (ab') et $(a'b)$. Alors, u, v, w sont alignés.*

On reconstitue la figure de Pappus avec $O = u$, $M = w$, voir Figure 4. On prend $b, c' \in d_1$, $b', c \in d_2$. On en déduit les droites (rouges) $D = (bc)$ et $D' = (b'c')$, puis a, a' en joignant à w et enfin v. La droite cherchée est (wv).

3.4 Avec le théorème de Brianchon

Le théorème de Brianchon (bien connu dans les Alpes auvergnates ...), voir [1] 2.2.5, est l'énoncé dual (ou corrélatif) de Pappus :

3.4 Théorème. *Soient o, o' deux points distincts de* $\mathbf{P}$ *et soient A, B, C (resp. A', B', C') trois droites distinctes passant par o (resp. par o'), et distinctes de (oo'). On appelle respectivement U, V, W les droites qui joignent les points d'intersection de B, C' et B', C, de C, A' et C', A, de A, B' et A', B. Alors, U, V, W sont concourantes.*

On reconstitue la figure de Brianchon, voir Figure 5, en notant $b'c$, etc. les intersections de B' et C, etc. Les droites U, V, W sont les droites d_1, d_2 et (OM). Le point M est ab'. On prend des points $b'c$ et $c'b$ sur U, $c'a$ et $a'c$ sur V. On en déduit o, o' puis ba' et la droite W convient.

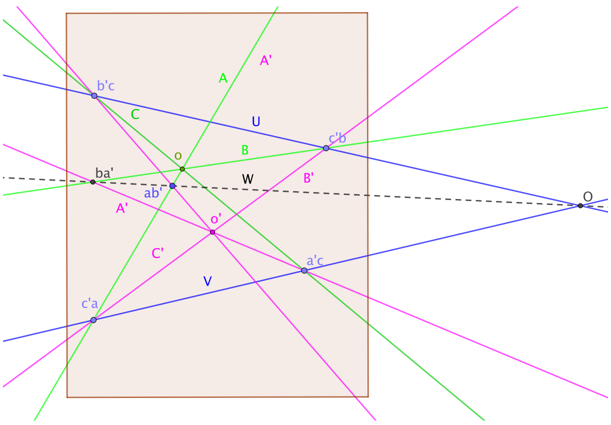

FIGURE 5 – Avec Brianchon

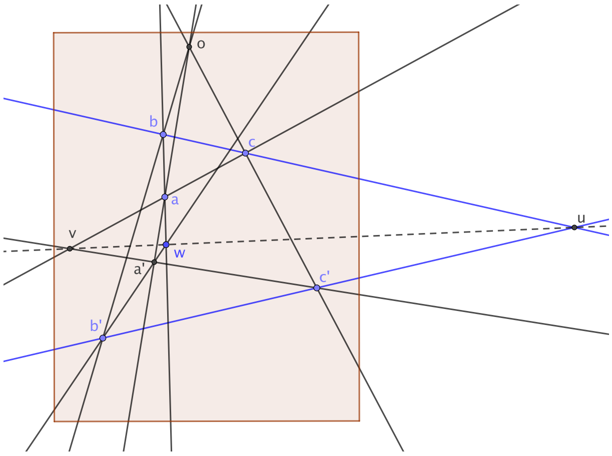

FIGURE 6 – Avec Desargues

3.5 Avec le théorème de Desargues

3.5 Théorème. *Soient A, B, C trois droites distinctes concourant en o et soient $a, a' \in A$; $b, b' \in B$; $c, c' \in C$. On suppose que, sur chaque droite, les points sont distincts et distincts de o et on suppose a, b, c (resp. a', b', c') non alignés. Soient u, v, w les points d'intersection des droites (bc), $(b'c')$; (ca), $(c'a')$; (ab), $(a'b')$ respectivement. Alors, u, v, w sont alignés.*

Ici, voir Figure 6, le point M est égal à w et O à u. Sur les droites bleues on prend b, c (sur d_1) et b', c' (sur d_2) ce qui donne o. On prend enfin a sur (bw) et on en déduit a' et v. La droite (vw) convient.

3.6 *Remarque.* Nul doute qu'on pourrait aussi faire le travail avec le théorème dual de Desargues, mais je l'épargnerai au lecteur.

4 La règle et l'équerre

4.1 Avec le concours des hauteurs

Voir Figure 7, on a d_1, d_2, M et O qu'on appelle C. On trace (avec l'équerre) les perpendiculaires (MB') à d_1 ($B' \in d_1$) et (MA') à d_2 ($A' \in d_2$). Les droites (MA') et (MB') recoupent d_1 et d_2 en A, B respectivement. On voit que M est l'orthocentre du triangle ABC et le concours des hauteurs montre que (CM) est perpendiculaire à (AB) d'où la construction.

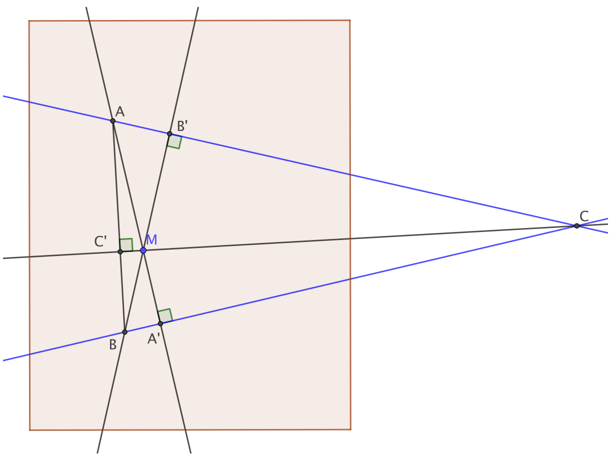

FIGURE 7 – Avec le concours des hauteurs

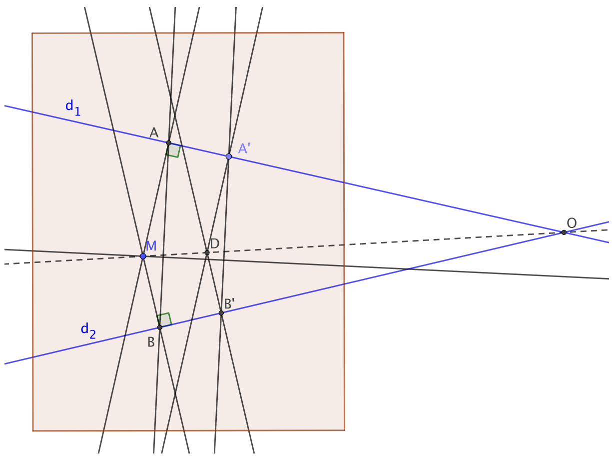

FIGURE 8 – Avec une homothétie

4.2 Homothétie

Avec une équerre on peut tracer des parallèles par double perpendiculaire. Cela permet de réaliser la construction par homothétie, voir Figure 8. On a d_1, d_2, O, M. On trace les perpendiculaires à d_1 et d_2 issues de M, elles coupent ces droites en A, B. On prend $A' \neq A$ sur d_1 et on trace $(A'B')$ parallèle à (AB) avec $B' \in d_2$ par double perpendiculaire. Les perpendiculaires à d_1, d_2 en A', B' se coupent en D et la droite (MD) convient comme on le voit en utilisant l'homothétie de centre O qui envoie A sur A' (donc B sur B' et M sur D).

5 La règle et le compas : transformations

Voici toute une série de méthodes que l'on peut résumer ainsi : pour remédier au fait que O soit à l'extérieur de la feuille on va effectuer une transformation qui le ramène à l'intérieur (avec quelques variantes). Comme il y a beaucoup de transformations possibles, cela fait beaucoup de méthodes.

5.1 Translation

Voir Figure 9. On choisit un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et on applique la translation $t_{\vec{v}}$ aux droites bleues d_1, d_2 qui deviennent d'_1, d'_2 (rouges) et se coupent en $t_{\vec{v}}(O) = O'$ qui est rentré dans la feuille. On appelle M' l'image de M, on trace $(M'O')$ et on obtient (MO) en appliquant la translation inverse. Bien sûr, il y a des conditions assez strictes pour que cette méthode fonctionne.

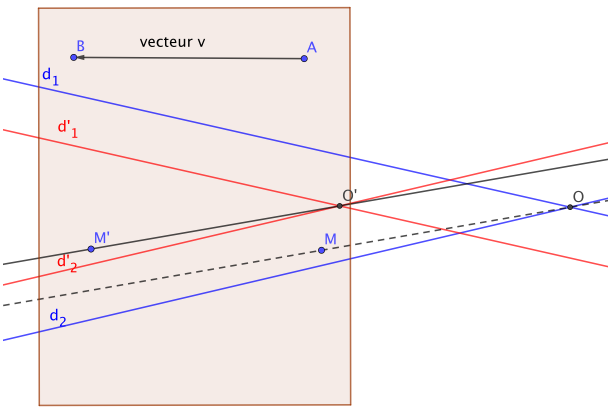

Figure 9 – Avec une translation

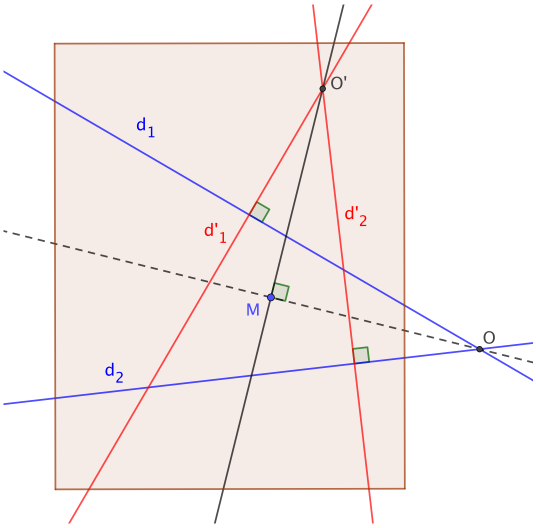

Figure 10 – Avec une rotation

5.2 Rotation

Voir Figure 10. On effectue la rotation de $\pi/2$ autour de M sur les droites d_i qui deviennent d'_i. On suppose qu'elles se coupent en O' dans la feuille. On joint O' et M et on trouve (OM) en appliquant la rotation inverse.

Il y a beaucoup de variantes possibles de cette méthode en variant le centre et l'angle de la rotation, le point essentiel est que les images de M et O soient dans la feuille.

5.3 Avec une symétrie centrale 1

Voir Figure 11. On effectue une symétrie de centre A qui transforme d_i en d'_i, O en O' (intersection des d'_i) et M en M'. On suppose que O' et M' sont dans la feuille, on les joint et on applique la symétrie pour avoir (OM).

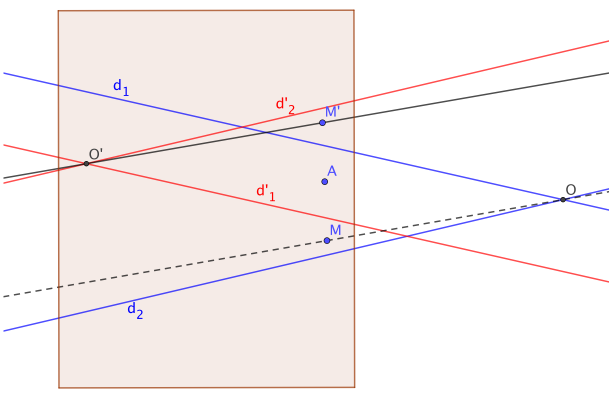

FIGURE 11 – Avec une symétrie centrale, 1

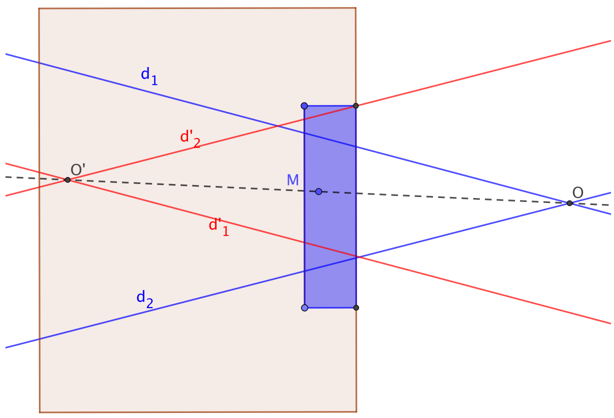

FIGURE 12 – Avec une symétrie centrale, 2

5.4 Avec une symétrie centrale 2

Une variante de la méthode précédente s'applique quand le symétrique O' de O par rapport à M est dans la feuille (ce qui n'a lieu que si M est dans la zone bleue de la figure). On a alors $(OM) = (O'M)$ voir Figure 12.

5.5 Avec une symétrie axiale

La méthode est la même, voir Figure 13, on effectue une symétrie par rapport à la droite Δ en espérant que les images O' et M' sont dans la feuille, on les joint et on applique à nouveau la symétrie.

5.6 Avec une inversion

Voir Figure 14 : on effectue une inversion de cercle Γ de centre A, les droites d_i deviennent des cercles d'_i passant par A qui se recoupent en O'. On construit aussi l'image M' de M. On "joint" O' et M' par le cercle circonscrit à A, O', M' et l'inverse de ce cercle est la droite (OM).

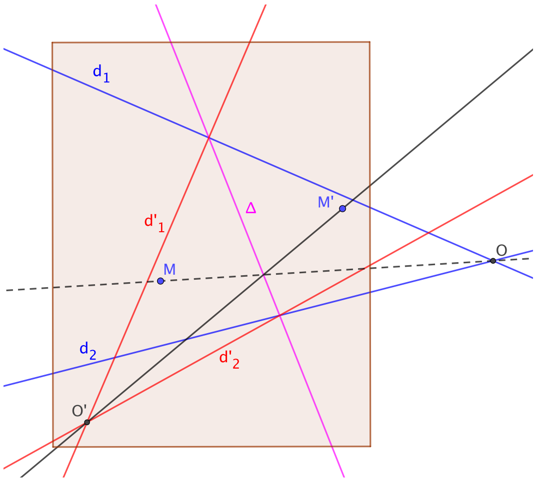

FIGURE 13 – Avec une symétrie axiale

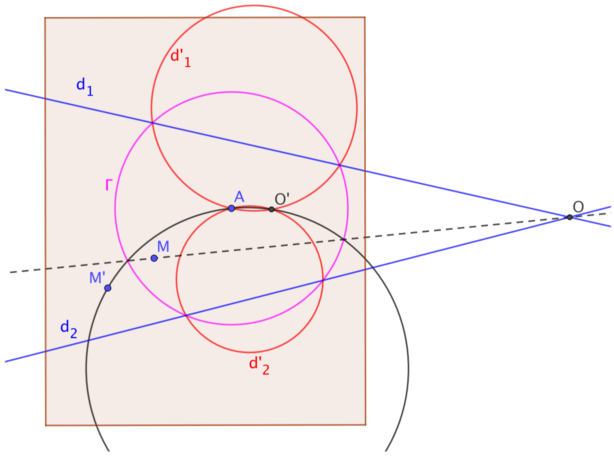

FIGURE 14 – Avec une inversion

5.7 Avec une affinité

Voir Figure 15. On choisit une droite Δ et une direction δ et on applique l'affinité d'axe Δ, de direction δ et, par exemple (c'est le cas sur la figure), de rapport 1/2, qui transforme d_i en d_i', O en O', M en M'. On trace $(O'M')$ et on obtient (OM) en appliquant l'affinité inverse.

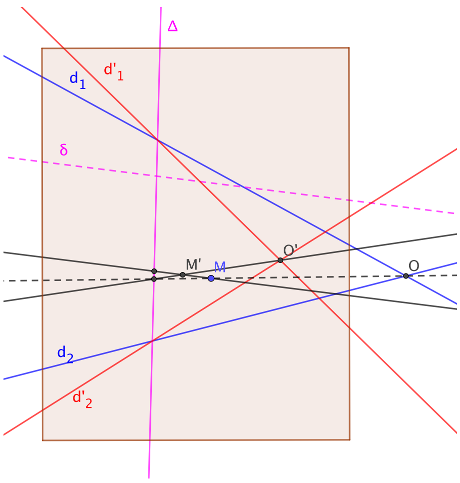

FIGURE 15 – Avec une affinité

6 La règle et le compas : autres méthodes

6.1 M comme milieu

On construit la droite d_2' symétrique de d_2 par rapport à M, voir Figure 16. Elle coupe d_1 en A et on note B le symétrique de A par rapport à M. On choisit C sur d_1, on trace la parallèle à (AB) passant par C, qui coupe d_2 en D. Si N est le milieu de $[CD]$ la droite (MN) convient (par homothétie de centre O).

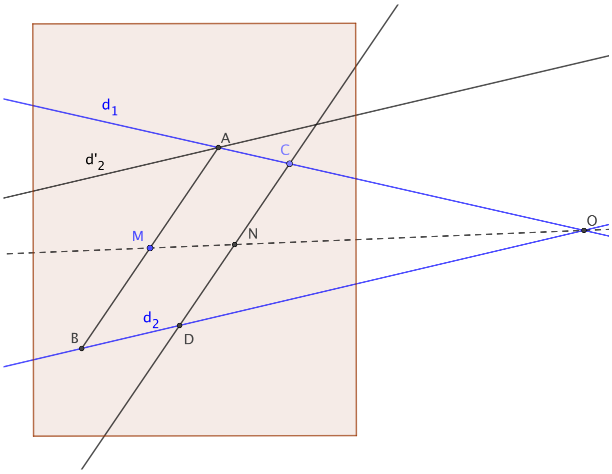

Figure 16 – M comme milieu

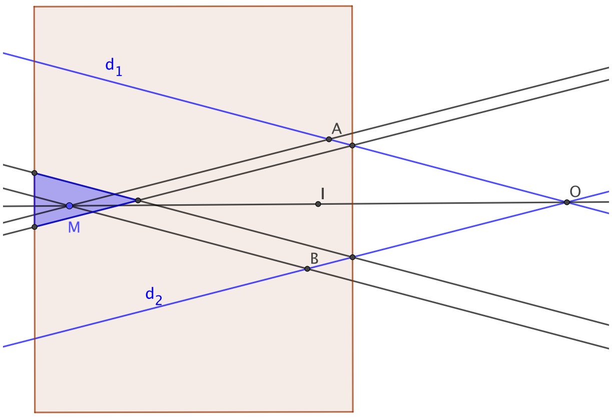

Figure 17 – parallélogramme

6.2 Parallélogramme

Voir Figure 17. On trace les parallèles à d_1 et d_2 passant par M qui coupent d_1, d_2 en A, B. On obtient un parallélogramme $AMBO$ et si I est le milieu de $[AB]$, l'autre diagonale (MI) est la droite cherchée. Attention, la méthode ne fonctionne que si M est dans le triangle bleu.

6.3 Avec le centre de gravité

Voir Figure 18. On construit les transformées d'_i des d_i dans l'homothétie de centre M et de rapport -2. On obtient les points A, B. Si O' est le milieu de $[AB]$, O, M, O' sont alignés car M est le centre de gravité de OAB.

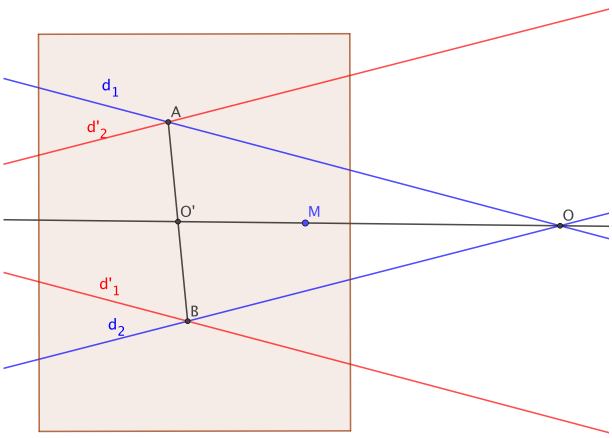

FIGURE 18 – Centre de gravité

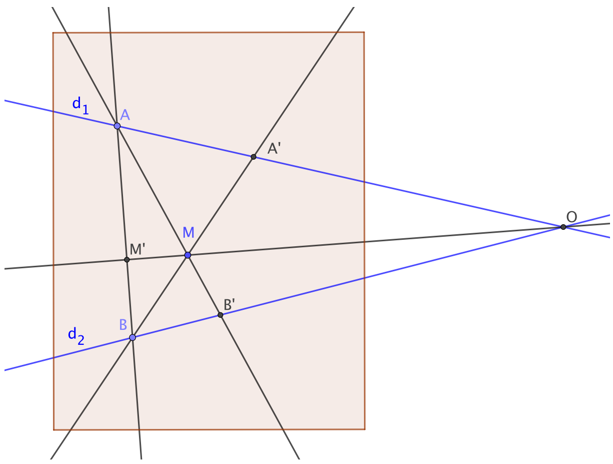

FIGURE 19 – Avec le théorème de Céva

6.4 Avec le théorème de Céva

Rappelons le résultat :

6.1 Théorème. *Soit ABM un triangle et A', B', M' des points distincts de A, B, M et situés respectivement sur (BM), (MA) et (AB). Alors les droites (AA'), (BB'), (MM') sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a l'égalité (de mesures algébriques) :* $\dfrac{\overline{M'B}}{\overline{M'A}} = -\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'M}} \times \dfrac{\overline{B'M}}{\overline{B'A}}$ *(relation $(*)$).*

On en déduit une construction de (MO), voir Figure 19. On prend $A \in d_1$, $B \in d_2$, les droites (AM) et (BM) recoupent d_2 en B' et d_1 en A'. On sait construire à la règle et au compas les rapports du second membre de $(*)$ et leur produit et aussi le point M' défini par la donnée de $\dfrac{\overline{M'B}}{\overline{M'A}}$. La droite cherchée est alors (MM').

6.5 Avec la polaire d'un point par rapport à un cercle

La procédure est un peu plus compliquée ici, voir Figure 20. On choisit $A \in d_1$, (AM) coupe d_2 en B. On construit $C \in d_1$ tel que, si D est l'intersection de (CM) et d_2, les quatre points A, B, C, D soient sur un cercle Γ. Pour cela, en vertu du théorème de l'angle inscrit, il suffit de trouver C tel que $\widehat{ACM} = \widehat{ABx}$ où $[Bx)$ est la demi-droite opposée à $[BO)$, ce qu'on sait faire (c'est la construction de l'arc capable). La polaire de O par rapport à Γ est la droite (ME) où E est l'intersection de (AD) et (BC). La réciprocité polaire montre que (OM) est la polaire de E par rapport à Γ et on la construit en menant la tangente (ET) à Γ en T.

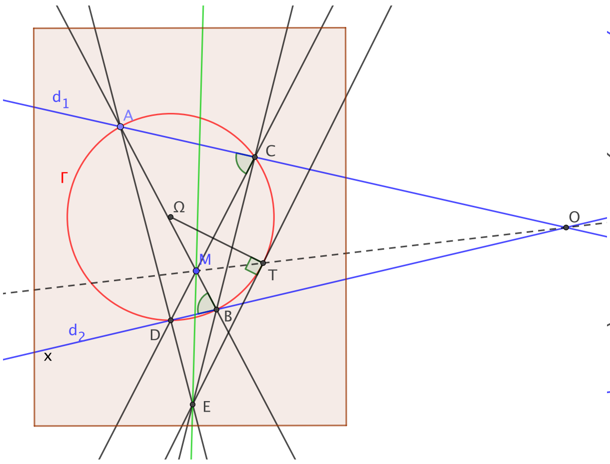

FIGURE 20 – Avec la polaire

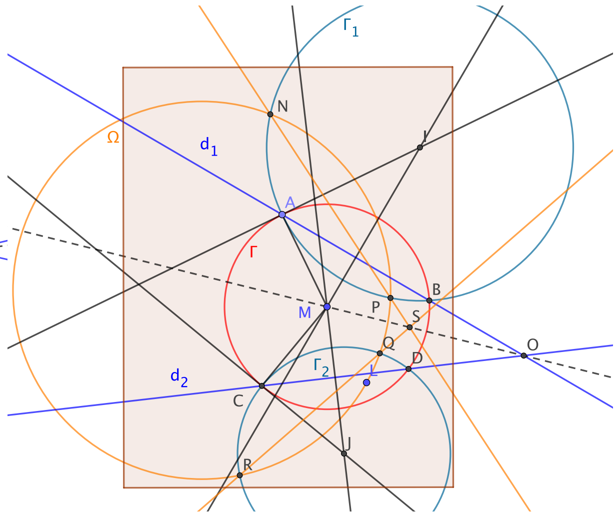

FIGURE 21 – Avec l'axe radical

6.6 Avec l'axe radical

Voir Figure 21. On trace un cercle Γ de centre M qui coupe d_1 en A, B et d_2 en C, D, puis les cercles Γ_1 passant par A, B et tangent à (AM) en A et Γ_2 passant par C, D et tangent à (CM) en C. Les points O et M sont sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 (autrement dit O (resp. M) a même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2). En effet, on a $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OC}.\overline{OD}$ car c'est la puissance de O par rapport à Γ et $MA^2 = MC^2$ car c'est le rayon de Γ. Il suffit donc de construire cet axe radical. Pour cela on trace un cercle Ω qui coupe Γ_1 en N, P et Γ_2 en Q, R et le point d'intersection S de (NP) et de (QR) est sur l'axe radical cherché.

6.7 Avec le théorème de Pascal

Les notations sont identiques à celle de la méthode qui utilise le théorème de Pappus, voir §3.3, à ceci près que les points a, b, c, a', b', c' sont sur un cercle. On a ici $O = u$, $M = w$, voir Figure 22, on prend b, c' sur d_1, b' sur d_2 et on trace le cercle circonscrit à b, b', c' qui recoupe d_2 en c. On en déduit les points a, a' puis le point v et la droite cherchée est (wv).

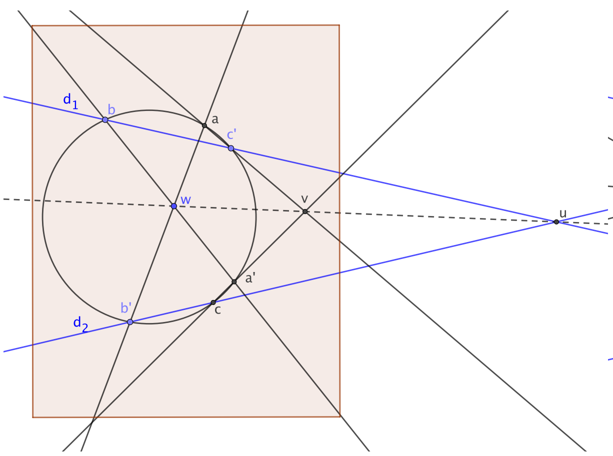

FIGURE 22 – Pascal sur le cercle

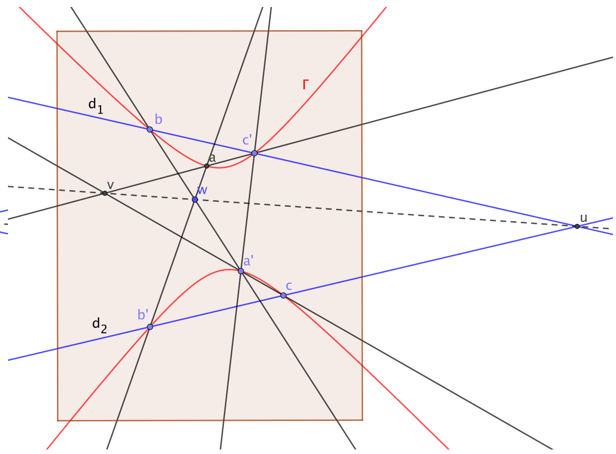

FIGURE 23 – Pascal sur une conique

6.8 Avec Pascal bis

Cette variante est hors concours car elle utilise la macro “conique par 5 points ” de GeoGebra. Sinon, le principe est le même que pour Pascal sur le cercle : on prend b, c' sur d_1, b', c sur d_2 et a' en dehors. On trace la conique Γ passant par ces cinq points. On trouve ensuite a et v et on conclut comme pour Pascal sur le cercle, voir Figure 23.

6.9 Une dernière pour la route

On utilise le théorème des trois symétries :

6.2 Théorème. (Hjelmslev) *Soient Δ_i, $i = 1, 2, 3$ trois droites et τ_i la symétrie par rapport à Δ_i. Le produit $\tau_1\tau_2\tau_3$ est une symétrie τ_Δ si et seulement si les droites Δ_i sont concourantes ou parallèles. Si elles sont concourantes en O, Δ passe par O et on a l'égalité d'angles de droites $(\Delta_1, \Delta) = (\Delta_2, \Delta_3)$.*

On obtient une construction de (OM) par la procédure suivante, voir Figure 24. On pose $\Delta_1 = d_1$, $\Delta_2 = (OM)$ et $\Delta_3 = d_2$. On considère les symétriques N et P de M par rapport à d_1, d_2 respectivement. On a $\tau_1\tau_2\tau_3(P) = N$. Comme les droites d_1, d_2 et (OM) sont concourantes, le produit est une symétrie τ_Δ et Δ est la médiatrice de $[PN]$. Elle passe par O et on a l'égalité $(d_1, \Delta) = ((OM), d_2)$ qui donne $(d_1, (NP)) = ((OM), (MP))$ car les angles ajoutés sont égaux à $+\pi/2$. Autrement dit, si Q est l'intersection de d_1 et (NP), on a $((QO), (QP)) = ((MO), (MP))$ les points Q, M, O, P sont cocycliques. et les angles $\alpha = \widehat{PMO}$ et $\beta = \widehat{PQO}$ sont égaux. Comme on connaît β on obtient (OM) par report de l'angle α en M.

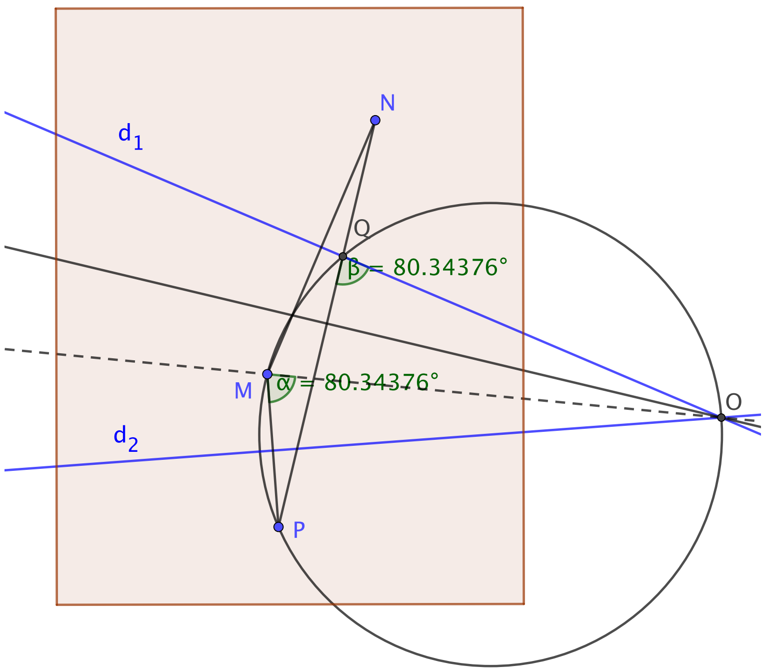

FIGURE 24 – Avec le théorème des trois symétries

Références

[1] Perrin Daniel *Géométrie projective et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes, Partie I, la géométrie projective linéaire*, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livre_de_geometrie_projective.html`