Le problème 2 du numéro 555

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question : les carrés

*Elisabeth Rave, la fermière de Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne et Garonne), aime les champs carrés et elle connaît bien les entiers qui sont des carrés parfaits (*1, 4, 9, 16, ..., 2809, ...*) À défaut elle essaie d'écrire les entiers $n \geq 0$ comme différence de carrés parfaits (donc sous la forme $n = x^2 - y^2$ avec x, y entiers ≥ 0). Elle y arrive souvent, mais pas toujours.*

Peut-on le faire avec les entiers suivants (et, lorsque c'est possible, de combien de manières) : 257, 391, 426, 432, 452, 464 *?*

Pouvez-vous préciser tous les entiers qui peuvent s'écrire sous cette forme et de combien de manières ?

2 Une solution

J'ai notamment utilisé cet exercice lors d'une conférence donnée en juin 2023 *à Bordeaux pour le colloque des commissions Inter-IREM collège et lycée dont le thème était l'arithmétique. Je recopie ci-dessous la solution détaillée qui devrait paraître dans les actes de ce colloque. Cette version est plutôt destinée à des professeurs de collège en vue d'une utilisation en classe.*

On commence par explorer l'exercice avec les premières valeurs données [1]. On a facilement $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$, $11 = 36 - 25 = 6^2 - 5^2$. Avec un peu de patience on trouve $17 = 81 - 64 = 8^2 - 7^2$, mais, même avec un peu d'obstination, 14 n'a pas l'air de marcher. Si l'on regarde bien, on voit que dans tous les cas positifs ci-dessus on a pris la différence de deux carrés consécutifs. Si l'on écrit cela algébriquement [2] $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ (en développant $(n+1)^2$ ou en utilisant la différence de deux carrés), on voit qu'on va attraper ainsi tous les impairs. Par exemple, $391 = 2 \times 195 + 1 = 196^2 - 195^2$.

Il reste les pairs. On commence par le commencement, c'est-à-dire le nombre 2. En consultant la liste des carrés et la taille des différences, on

1. Il peut être utile d'établir la liste des carrés des nombres de 1 à 20. Dans l'exercice donné pour le colloque la liste des valeurs était : 5, 11, 14, 17, 18, 20, 44, 45, 56, 66, 162, 257, 391, 426, 432, 452.
2. On voit ici, de manière éclatante, tout l'intérêt de l'écriture algébrique.

constate que 2 ne peut pas s'écrire comme différence de deux carrés. On le prouve facilement avec l'écriture algébrique, si l'on connaît les identités remarquables. En effet, si l'on a $2 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, la seule façon de faire cela en entiers c'est de prendre $x - y = 1$ et $x + y = 2$, mais ça n'existe pas ! Il y a de multiples manières de le voir, la plus simple étant de noter que x et y sont compris entre 0 et 2 et d'essayer tous les cas. Mais on peut aussi résoudre le système et constater qu'il apparaît des demi-entiers, ou encore noter que $x + y = (x - y) + 2y$ de sorte que $x - y$ et $x + y$ doivent être de même parité.

On peut alors revenir au cas de 14. Si $14 = (x - y)(x + y)$, avec x, y entiers, les seules solutions sont $x - y = 1$ et $x + y = 14$ ou $x - y = 2$ et $x + y = 7$ et, là encore, la parité contredit. Avec cette réflexion on obtient le résultat général. En effet, supposons qu'on ait $n = x^2 - y^2$ avec n pair. On a donc $n = (x - y)(x + y)$ donc l'un des nombres $x - y$ ou $x + y$ est pair. Mais alors ils le sont tous les deux et n est multiple de 4. On ne peut donc pas écrire sous cette forme les nombres pairs qui ne sont pas multiples de 4.

Il faut encore vérifier que les multiples de 4 marchent. L'expérience avec $4 = 2^2 - 0^2$, $8 = 3^2 - 1^2$, $12 = 4^2 - 2^2$ montre qu'il faut prendre des entiers écartés de 2 : $4p = (p + 1)^2 - (p - 1)^2$, toujours les identités remarquables.

Il reste la question subsidiaire, plus délicate, du nombre de façons d'écrire n sous la forme $x^2 - y^2$ quand c'est possible. Supposons d'abord n impair. On décompose n en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ et on cherche à l'écrire $(x - y)(x + y)$. Pour cela, on prend pour $a = x - y$ et $b = x + y$ deux diviseurs de n, "complémentaires" (c'est-à-dire tels que leur produit soit égal à n) avec $a \leq b$. Il reste à montrer le lemme suivant :

2.1 Lemme. *Si a, b sont des entiers impairs, avec $a \leq b$, le système $a = x+y$, $b = x - y$ a une solution unique dans les entiers ≥ 0.*

Démonstration. La solution est $x = \dfrac{b+a}{2}$ et $y = \dfrac{b-a}{2}\cdot$

Le nombre S de solutions, dans le cas impair, est donc le nombre de diviseurs a de n tels que $a \leq b = n/a$. Comme le nombre total de diviseurs de n est $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$, S est la moitié de ce nombre (s'il est pair, ce qui est le cas sauf si n est un carré, cas que le lecteur examinera ...). Par exemple, pour $n = 391 = 17 \times 23$, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, donc il y a deux solutions, $a = 1$, $b = 391$ qui donne $x = 196$ et $y = 195$, mais aussi $a = 17$, $b = 23$ qui donne $x = 20$ et $y = 3$. Pour $6615 = 3^3 \times 5 \times 7^2$ il y a 12 solutions.

Il reste le cas où n est multiple de 4 : on écrit $n = 4k = (x - y)(x + y)$ avec $x - y$ et $x + y$ de même parité donc pairs, $x - y = 2p$, $x + y = 2q$, donc $k = pq$ et on est ramené à chercher les décompositions de k sous la forme

pq avec $p \leq q$. Par exemple, pour $464 = 4 \times 116$, les décompositions de 116 sont $1, 116$; $2, 58$ et $4, 29$ qui donnent pour $x = p+q$ et $y = q-p$: $117, 115$; $60, 56$ et $33, 25$ et trois écritures de 464 sous la forme $x^2 - y^2$.

Il est facile d'écrire un programme qui donne toutes les décompositions : le seul point délicat est de borner x. Comme on a $x + y \leq n$ et $x > y$ on en déduit $y < n/2$, comme $x - y$ divise n, on a $x < 3n/2$. Voici un exemple écrit avec SAGE :

```
def rave(n):
   for y in [0..(n-1)/2] :
      for k in [0..sqrt(y^2+n)-y] :
         if k^2+2*k*y==n :
            print (y+k,y)
```

Cet exercice montre l'intérêt d'une approche expérimentale des mathématiques. En effet, pour le résoudre, on peut commencer par regarder quelques cas particuliers, avec des n petits, par tous les moyens, y compris très artisanaux. L'intérêt est de voir se dégager les phénomènes : le cas des impairs, la difficulté pour les nombres pairs non multiples de 4. Cette approche peut mener à des conjectures qui donneront le résultat final. Ensuite, pour écrire une preuve on aura besoin de l'écriture algébrique, particulièrement efficace dans ce cas, qui mettra aussi en évidence l'intérêt de factoriser en arithmétique. On verra aussi apparaître d'autres notions : les congruences modulo 4, les équations linéaires. Enfin, pour la question du nombre de solutions, c'est encore la décomposition en produit de facteurs premiers qui sera essentielle, avec l'énumération des diviseurs.

2.2 *Remarque.* Nombre de questions non évidentes se posent dès qu'on généralise un peu cet exercice. Par exemple, quels sont les entiers qui sont différences de deux puissances $a^p - b^p$ avec $p \geq 2$? Ou encore $a^p - b^q$ avec $p, q \geq 2$? Ainsi on a $2 = 3^3 - 5^2$ mais 6 est-il de cette forme ?