Le problème 4 du numéro 555

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question : radicaux itérés

Trouver les valeurs possibles de l'entier naturel n de telle sorte que cette expression de radicaux itérés à l'infini prenne une valeur entière :

$$U(n) := \sqrt{n + \sqrt{n - \sqrt{n + \sqrt{n - \sqrt{n....}}}}}$$

2 Une solution

Il s'agit d'abord de donner un sens à cette expression. Pour cela on introduit la suite $u_p(n)$ définie par récurrence par $u_0(n) = \sqrt{n}$ et la relation :

$$u_{p+1}(n) = \sqrt{n + \sqrt{n - u_p(n)}}.$$

On a donc $u_0(n) = \sqrt{n}$, $u_1(n) = \sqrt{n + \sqrt{n - \sqrt{n}}}$, puis :

$$u_2(n) = \sqrt{n + \sqrt{n - \sqrt{n + \sqrt{n - \sqrt{n}}}}}, ...$$

La suite $u_p(n)$ est une suite récurrente associée à la fonction décroissante $f(x) = \sqrt{n + \sqrt{n - x}}$ et le nombre $U(n)$ est la limite, si elle existe, de la suite $p \mapsto u_p(n)$.

Notons déjà que si n est égal à 0 (resp. 1), la suite est constante et égale à 0 (resp. 1). On élimine désormais ces deux cas. On a le lemme suivant :

2.1 Lemme. *On suppose $n \geq 2$. On a $0 < \sqrt{n - \sqrt{n}} < \sqrt{n + \sqrt{n}} < n$. On note I_n l'intervalle $\left[\sqrt{n - \sqrt{n}}, \sqrt{n + \sqrt{n}}\right]$, il contient $\sqrt{n}$ et il est stable par f. La suite $u_p(n)$ est bien définie et on a $u_p(n) \in I_n$.*

Démonstration. Les premières inégalités se vérifient aisément en étudiant les différences. Pour la stabilité, il s'agit de montrer, pour $x \in I_n$:

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \leq \sqrt{n + \sqrt{n - x}} \leq \sqrt{n + \sqrt{n}}$$

et c'est immédiat en élevant au carré.

2.2 Théorème. *On suppose $n \geq 2$. La suite $u_p(n)$ converge vers $U(n) = \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}\cdot$*

Démonstration. On calcule la dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{-1}{4\sqrt{n-x}\sqrt{n+\sqrt{n-x}}}\cdot$ Sur l'intervalle I_n la fonction $x \mapsto \sqrt{n-x}$ est décroissante donc au moins égale à $\sqrt{n - \sqrt{n + \sqrt{n}}}$. On vérifie que cette fonction de n est croissante et elle est donc au moins égale à sa valeur pour $n = 2$ qui est ≥ 0.39. On en déduit qu'on a $|f'x)| \leq 1/2$ sur I_n. La fonction f est contractante sur I_n de sorte que la suite récurrente associée admet une limite qui est l'un des points fixes de f. Ceux-ci sont donnés par l'équation $x^4 - 2nx^2 + x + n^2 - n = (x^2 + x - n)(x^2 - x + 1 - n) = 0$ dont les racines sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$ et $\dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}\cdot$ De plus, si x vérifie $f(x) = x$ on a $x^2 - n = \sqrt{n-x}$, ce qui impose $x \geq \sqrt{n} > 0$. On en déduit que la seule solution possible est $\dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$, d'où le résultat.

2.3 Corollaire. *Le nombre $U(n)$ est un entier p si et seulement si l'on a $n = p^2 - p + 1$. Variante : si $n = \dfrac{a^2+3}{4}$ où a est un entier impair auquel cas on a $U(n) = \dfrac{a+1}{2}\cdot$*

On voit qu'il y a une infinité de n pour lesquels $U(n)$ est entier, par exemple $n = 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57$, etc. Plus difficile :

2.4 Conjecture. *Il existe une infinité de n tels que n et $U(n)$ soient tous deux des entiers premiers ou encore une infinité de nombres premiers p tels que $p^2 - p + 1$ soit premier.*

À l'appui de cette conjecture on trouve 4763 nombres premiers $p \leq 1000000$ tels que $p^2 - p + 1$ soit premier.