

Le problème 2 du numéro 556

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question : construction

On donne deux longueurs c et d et il s'agit de construire les longueurs u, v telles que $u - v = d$ et $uv = c^2$ et d'en déduire une construction du décagone régulier.

2 Une solution

2.1 Construction de u, v

On reporte $u = d + v$ dans $uv = c^2$. On obtient l'équation du second degré en v : $v^2 + dv - c^2 = 0$. Le discriminant est $\Delta = d^2 + 4c^2$ et on a $v = \frac{-d + \sqrt{\Delta}}{2}$.

La construction s'ensuit, voir Figure 1 : on construit le triangle ABC , rectangle en A avec $AC = d$ et $AB = 2c$. On a donc $BC^2 = d^2 + 4c^2 = \Delta$, donc $BC = \sqrt{\Delta}$.

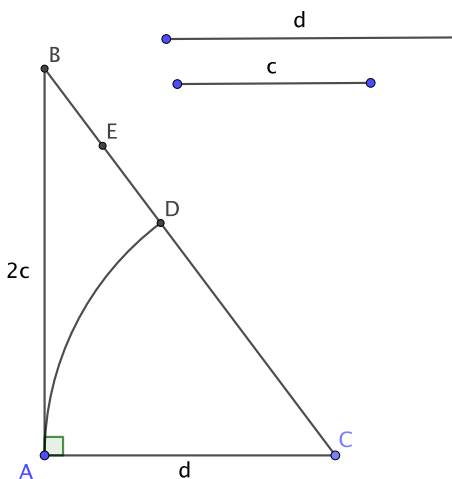


FIGURE 1 – Construction de u, v

On porte D sur $[BC]$ tel que $CD = CA = d$, puis on prend le milieu E de $[BD]$. On a donc $AE = ED = \frac{1}{2}(BC - CD) = \frac{\sqrt{\Delta} - d}{2} = v$ et $CE = CD + DE = d + v = u$.

2.2 Analyse de la construction du décagone

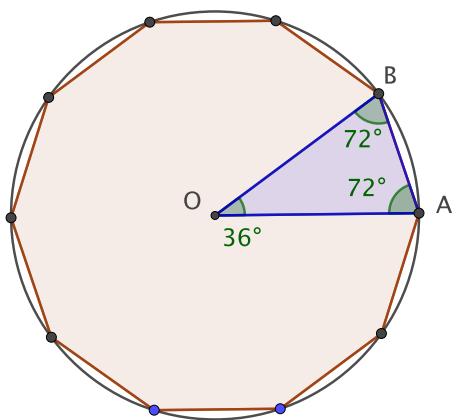


FIGURE 2 –

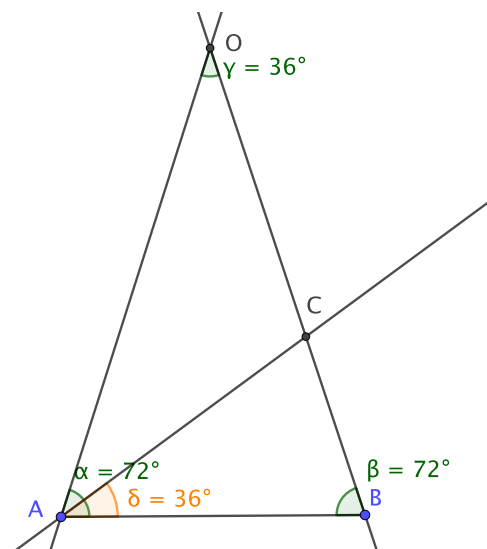


FIGURE 3 –

Dans le décagone régulier, les dix triangles de sommet le centre du cercle et de base les côtés, comme OAB , sont des triangles “d’Euclide”, d’angles 36° , 72° et 72° , voir Figure 2. Ces triangles ont la propriété bien connue suivante :

2.1 Lemme. Soit OAB un triangle dont les angles en O, A, B valent respectivement $36^\circ, 72^\circ$ et 72° . On pose $R = OA = OB$ et $a = AB$. Alors on a $R^2 = a(a + R)$.

Démonstration. Voir Figure 3. On trace la bissectrice de l’angle en A qui coupe $[OB]$ en C . Comme ABC et COA sont isocèles, on a $AB = AC = OC = a$. Les triangles OAB et ABC sont semblables et on en déduit $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{OA}$ soit $\frac{R - a}{a} = \frac{a}{R}$ et le résultat.

2.2 Remarque. Bien entendu la relation précédente montre qu’on a $R/a = \varphi$ (le nombre d’or).

2.3 La construction

On prend $R = c = d$ dans l’étude du §2.1 et on pose $a = v$, d’où $u = a + R$. On a donc $a(a + R) = R^2$, ce qui, vu le lemme 2.1, montre que a est le côté

du décagone régulier inscrit dans le cercle de rayon R .

Pour construire le décagone on part du cercle Γ rouge de centre O et de rayon R et d'un point A de ce cercle, voir Figure 4. On considère A' diamétralement opposé à A , on trace la perpendiculaire à (AA') en A' et on porte C tel que $A'C = R$ sur cette droite. Le cercle de centre C et de rayon R coupe (AC) en D et, si E est le milieu de $[AD]$, le lemme et la construction du §2.1 montrent que AE est le côté du décagone, ce qui donne le point suivant B sur Γ . Le lecteur complétera la figure.

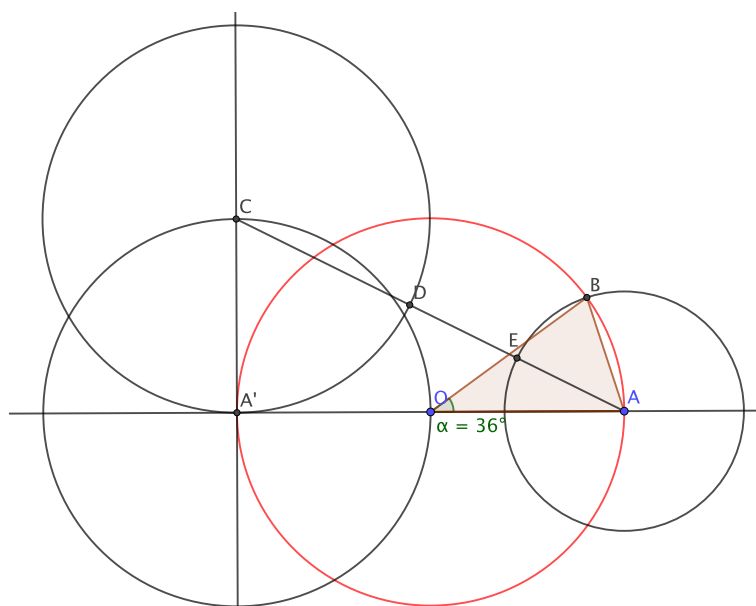


FIGURE 4 – La construction du décagone régulier