

Le problème 4 du numéro 556

d’Au fil des maths

Daniel PERRIN

La question : approcher le nombre d’or

Il s’agit de trouver une suite croissante d’entiers naturels (a_n) telle que :

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots = \varphi$$

où $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Commentaire. Je trouve la question un peu imprécise : que demande-t-on au juste ? L’existence d’une telle suite d’entiers a_k ? Ou une suite explicite ? Et, si oui, donnée par quel procédé ? Par récurrence ? Le fait que l’on veuille approcher le nombre d’or est-il essentiel ?

Dans ce qui suit, je montre que tout nombre réel admet une telle écriture et je donne un algorithme pour la trouver. Mais je montre aussi qu’elle n’est pas du tout unique, sauf avec une contrainte supplémentaire. Dans le cas du nombre d’or φ l’algorithme général permet d’obtenir une telle suite approchant φ avec une précision aussi grande que l’on veut, mais je n’ai pas trouvé de méthode spécifique¹.

Par ailleurs, j’ai compris “croissante” comme “croissante au sens large”. Avec le sens strict la question serait différente et sans doute plus difficile, voir §2.2.3.

Pour un réel x on note $[x]$ la partie entière de x , qui est l’élément de \mathbf{Z} caractérisé par $[x] \leq x < [x] + 1$.

1 Existence

1.1 Définition

1.1 Définition. Soit x un réel positif. On appelle **développement décimal étendu** de x (en abrégé *dde*) une écriture de x sous la forme d’une série

convergente $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ où les a_k sont des entiers de \mathbf{N} formant une suite croissante (au sens large).

1. L’énoncé semble dire qu’il y a une méthode *ad hoc* pour le cas du nombre d’or. Si ce n’est pas le cas, c’est vraiment vache de l’avoir posé ainsi.

Le théorème fondamental est le suivant :

1.2 Théorème. *Tout réel positif admet un dde.*

1.2 Analyse

1.3 Lemme. *Soit x un nombre réel positif. On suppose que x admet un dde : $x = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{10^k}$, où (a_k) est une suite croissante d'entiers positifs ou nuls. On pose, pour $n \geq 0$, $u_n = \sum_{k \leq n} \frac{a_k}{10^k}$ et on convient qu'on a $u_{-1} = 0$. Alors, on a, pour tout $k \geq 0$, $a_k \leq 9 \times 10^{k-1}(x - u_{k-1})$.*

Démonstration. Comme la suite (a_k) est croissante on a $x \geq a_0 + \frac{a_0}{10} + \dots + \frac{a_0}{10^k} + \dots = a_0 \times \frac{10}{9}$ d'où $a_0 \leq \frac{9}{10}x$ ce qui donne le cas $k = 0$. Pour $k > 0$ on a $x \geq u_{k-1} + \frac{a_k}{10^k} + \dots + \frac{a_k}{10^n} + \dots = u_{k-1} + \frac{a_k}{10^k} \times \frac{10}{9}$ et on obtient l'inégalité annoncée.

Ce lemme conduit à préciser la définition d'un dde en imposant que les a_k soient les plus grands entiers possibles vérifiant ces inégalités (donc les parties entières) :

1.4 Définition. *Soit x un nombre réel. On dit qu'un dde : $x = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{10^k}$ est **avare**² s'il vérifie les égalités $a_k = [9 \times 10^{k-1}(x - u_{k-1})]$ pour tout $k \geq 0$ (notations de 1.3).*

Bien entendu, si x admet un dde avare, il est unique.

1.3 Existence

Le théorème suivant assure l'existence d'un dde pour un réel quelconque en montrant que le développement avare convient :

1.5 Théorème. *Soit x un nombre réel positif. On définit par récurrence deux suites (a_k) et (u_k) . On pose $u_{-1} = 0$ et, pour $k \geq 0$, $a_k = [9 \times 10^{k-1}(x - u_{k-1})]$ et $u_k = u_{k-1} + \frac{a_k}{10^k}$. Alors, la suite a_k est une suite croissante d'entiers et on a $x = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{10^k}$, donc un dde (avare) de x (ce qui prouve 1.2).*

2. Cela correspond au sens populaire d'avare vu comme celui qui "en met le plus possible à gauche".

Démonstration. Montrons d'abord que la suite (a_k) est croissante. Cela signifie : $a_k \leq a_{k+1} = [9 \times 10^k(x - u_k)]$, ou encore, puisque a_k est entier, $a_k \leq 9 \times 10^k(x - u_k) = 9 \times 10^k(x - u_{k-1}) - 9a_k$ c'est-à-dire $10a_k \leq 9 \times 10^k(x - u_{k-1})$ ce qui résulte de la définition de a_k .

Par ailleurs, la définition de a_k se traduit par la double inégalité :

$$\frac{a_k}{9 \times 10^{k-1}} \leq x - u_{k-1} < \frac{a_k}{9 \times 10^{k-1}} + \frac{1}{9 \times 10^{k-1}}.$$

L'inégalité de gauche montre qu'on a $x - u_{k-1} \geq \frac{a_k}{9 \times 10^{k-1}} \geq \frac{a_k}{10^k}$ ce qui implique $u_k \leq x$. Cela montre que la suite croissante (u_k) est bornée donc que la série de terme général $\frac{a_k}{10^k}$ converge. On en déduit que $\frac{a_k}{10^k}$ tend vers 0, donc aussi $\frac{a_k}{9 \times 10^{k-1}} = \frac{10}{9} \times \frac{a_k}{10^k}$. Mais cela implique que $x - u_{k-1}$ tend vers 0, de sorte que la somme de la série est bien égale à x .

1.6 Exemple. Dans le cas du nombre d'or φ , voici la suite (a_k) obtenue pour $k \leq 50$ (en écrivant quelques lignes de programme avec le logiciel *SAGE*) :

1, 5, 10, 16, 18, 21, 21, 26, 34, 43, 51, 58, 62, 71, 71, 76, 79, 85, 88, 91, 99, 103, 104, 106, 114, 115, 120, 120, 129, 131, 140, 140, 147, 151, 154, 154, 159, 168, 172, 180, 182, 189, 197, 199, 205, 206, 214, 216, 221, 222, 230.

1.7 Remarque. J'ai réfléchi sans succès pour trouver une manière astucieuse de déterminer un *dde* du nombre d'or à partir des innombrables propriétés de celui-ci. Voici quelques-unes des approches que j'ai tentées. En utilisant sa valeur, d'abord : $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ qui peut conduire à une approche à partir de $\sqrt{5}$. ou encore son équation minimale $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ ou $\varphi^2 = \varphi + 1$ ou $\varphi - 1 = \varphi^{-1}$. Toutes ces approches se heurtent à une difficulté majeure qui est la non-unicité du *dde*, voir ci-dessous.

Il y a aussi les diverses suites récurrentes menant à φ , $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2u_n - 1}$, etc. mais aucune ne semble efficace ici.

On peut enfin voir φ comme la limite du rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci et c'est d'ailleurs lié au développement de φ en fraction continue, mais rien de tout cela n'a abouti.

Par ailleurs, la contemplation de la liste donnée dans l'exemple 1.6 ne m'a pas montré de régularité flagrante pour le *dde* avare de φ .

1.4 Variante pour 1.2

Je donne ci-dessous de brèves indications permettant de montrer 1.2 par une autre méthode, moins canonique, mais très naturelle. Pour cela, on part d'une remarque évidente : si l'on a $x = \sum \frac{a_k}{10^k}$ et $y = \sum \frac{b_k}{10^k}$ avec des suites a_k et b_k croissantes, $x + y$ s'écrit sous la même forme avec $a_k + b_k$. Bien entendu cela vaut aussi pour une somme finie. Le point crucial est que cette propriété est encore vraie, avec une petite précaution, si x est somme d'une série, comme le lecteur le vérifiera :

1.8 Lemme. *Soit x un réel positif écrit comme somme d'une série convergence $x = \sum_{n \geq 0} x_n$ où les x_n sont des réels positifs. On suppose que chacun des x_n admet un dde, précisément que l'on a, pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, $x_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_{n,k}}{10^k}$ où les $b_{n,k}$ forment une suite, croissante par rapport à k , d'entiers de \mathbf{N} tels que $b_{n,k} = 0$ pour tout $k \leq n$. Alors, si l'on pose, pour tout $k \geq 0$, $a_k = \sum_{n < k} b_{n,k}$, la suite (a_k) est croissante et l'on a $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$, de sorte que x admet un dde.*

1.9 Remarque. Avec cette définition, on a $a_0 = 0$.

On peut alors prouver 1.2. Soit x un réel positif et $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ son développement décimal illimité propre (x_0 est un entier positif ou nul quelconque et les x_n pour $n > 0$ sont des chiffres de 0 à 9 tels que tous ne soient pas égaux à 9 à partir d'un certain rang). En vertu du lemme, il suffit de montrer que $\frac{x_n}{10^n}$ admet un dde $\frac{x_n}{10^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_{n,k}}{10^k}$ où les $b_{n,k}$ forment une suite croissante d'entiers de \mathbf{N} tels que $b_{n,k} = 0$ pour tout $k \leq n$.

Pour cela on utilise les trois remarques suivantes :

1) On a $1 = 0.999 \dots 999 \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$ qui donne un dde de 1 ($a_0 = 0$ et $a_k = 9$ pour $k \geq 1$). C'est la somme de la série géométrique.

2) Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $\frac{1}{10^n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$. (Même calcul, c'est un dde de $1/10^n$ avec $a_k = 0$ pour $k \leq n$ et $a_k = 9$ pour $k > n$.)

3) Si a est un entier > 0 quelconque, on a $\frac{a}{10^n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{9a}{10^k}$. Là encore, c'est un *dde* avec $a_k = 0$ pour $k \leq n$ et $a_k = 9a$ pour $k > n$. Avec $a = x_n$ on a le résultat voulu.

2 Unicité ?

Une grande difficulté dans la manipulation des *dde* est leur non-unicité. En effet, dans le cas du nombre d'or, par exemple, on pourrait imaginer pour en calculer un *dde* d'identifier les *dde* de φ^2 et de $\varphi + 1$, mais comme ni les uns ni les autres ne sont bien déterminés, cette méthode ne peut aboutir. De plus, si l'on se limite aux *dde* avarés, il n'est pas vrai en général que le carré d'un *dde* avare l'est encore.

2.1 Construire des développements

Supposons que l'on dispose d'un *dde* de $x : x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Nous allons montrer comment on peut en obtenir d'autres par plusieurs procédés.

2.1.1 Décalage

On fixe $n > 0$ et on écrit $x = \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{10^k}$ où l'on a posé $b_k = 0$ pour $k < n$ et $b_{n+j} = 10^n a_j$. On obtient ainsi une infinité de *dde* différents de x . En particulier, on a :

2.1 Lemme. *Tout nombre réel x admet un *dde* qui commence par $a_0 = 0$.*

2.2 Remarque. On voit aussi que les a_k d'un *dde* ne sont pas bornés puisqu'ici on a des termes de la forme $10^n b$. Voir toutefois 2.3.

2.1.2 Remplacement sur deux termes

Commençons par un contre-exemple. On a un *dde* de $\frac{7}{3}$:

$$\frac{7}{3} = 1 + \frac{12}{10} + \frac{12}{100} + \cdots + \frac{12}{10^k} + \cdots$$

On en obtient un autre en écrivant $1 + \frac{12}{10} = 2 + \frac{2}{10}$ et en gardant les autres termes identiques.

Plus généralement, si on a $a_{k+1} \geq a_k + 11$, on ne touche à rien sauf aux termes $k, k + 1$ et on change $\frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} = \frac{a_k + 1}{10^k} + \frac{a_{k+1} - 10}{10^{k+1}}$ c'est encore un *dde* car on a $a_k + 1 \leq a_{k+1} - 10$ par hypothèse.

Plus généralement encore, si b est un entier ≥ 1 tel que $a_{k+1} \geq a_k + 11b$, on peut diminuer a_{k+1} de $10b$ et augmenter a_k de b .

2.1.3 Remplacement sur une infinité de termes

Pour pouvoir opérer ce remplacement, il suffit de disposer d'un *dde* du nombre 1. Bien entendu on a le fameux $1 = 0.999\dots$ mais il y en a bien d'autres. Par exemple, en partant de la formule $\sum_{k \geq 1} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ on trouve, en prenant $x = \frac{1}{10}$ et en multipliant par $81/100$, $1 = \sum_{k \geq 1} \frac{81k}{10^{k+1}}$ et huit autres développements en prenant $x = a/10$ avec $a = 2, \dots, 9$. À partir de là on trouve des *dde* de $\frac{1}{10^n}$, par exemple $\frac{1}{10^n} = \sum_{k \geq 1} \frac{81k}{10^{k+n+1}}$.

Si l'on a un *dde*, $x = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{10^k}$ et si, pour un entier n on a $a_n \geq a_{n-1} + 1$, on obtient un autre *dde* de x en changeant a_n en $a_n - 1$ et les a_k , pour $k \geq n + 1$ en $a_k + 81(k - n - 1)$.

On voit qu'on a de multiples manières d'avoir de nouveaux développements !

2.2 Quelques questions supplémentaires

2.2.1 Convergence

C'est une question toute bête : on se donne une suite croissante (a_k) d'entiers positifs. À quelle condition la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ converge-t-elle ?

Bien sûr, il y a des cas où cette série converge, par exemple $a_k = 1$ pour tout k , et d'autres où elle diverge, par exemple $a_k = 10^k$ pour tout k . Pas très loin de celui-là, $a_k = 9^k$ converge. On ne peut sans doute pas donner de frontière. On sait bien qu'on a des exemples du genre $a_k = \lceil \frac{10^k}{k \ln k} \rceil$ (partie entière supérieure), qui diverge ou $a_k = \lfloor \frac{10^k}{k(\ln k)^\alpha} \rfloor$ (partie entière inférieure) avec $\alpha > 1$, qui converge.

2.2.2 Comparer *ddi* et *dde*

2.3 Proposition. Soit x un réel positif, $x = \sum_{k \geq 0} \frac{x_k}{10^k}$ son *ddi* propre et soit

$x = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{10^k}$ un *dde*. Alors, on a, pour tout k , $10^k a_0 + 10^{k-1} a_1 + \dots + a_k \leq 10^k x_0 + 10^{k-1} x_1 + \dots + x_k$.

Démonstration. Dans le cas du développement décimal ordinaire, on sait qu'on a $[10^k x] = 10^k x_0 + 10^{k-1} x_1 + \dots + x_k$. Mais, on a aussi $10^k x = 10^k a_0 + 10^{k-1} a_1 + \dots + a_k + \frac{a_{k+1}}{10} + \dots$ d'où il résulte $10^k a_0 + 10^{k-1} a_1 + \dots + a_k \leq 10^k x_0 + 10^{k-1} x_1 + \dots + x_k$ pour tout k .

2.4 Exemple. Le *ddi* du nombre rationnel $\frac{10}{99}$ est égal à $0.101010\dots$ tandis que son *dde* avare est donné par

$0, 9, 9, 18, 18, 27, 27, 36, 36, 45, 45, 54, 54, 63, 63, 72, 72, 81, 81, 90, 90, \dots$

2.2.3 Avec une croissance stricte

La question de savoir quels sont les réels qui admettent un *dde* avec une suite (a_k) strictement croissante ne semble pas évidente. En tous cas, tous les réels ne vérifient pas cela. Par exemple, les réels < 1 n'admettent pas de *dde* "strict". En effet, si $x < 1$, on a nécessairement $a_0 = 0$, donc $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$, etc. et $x \geq \sum_{k \geq 1} \frac{k}{10^k} = \frac{100}{81}$ ce qui est absurde .