

Le problème 1 du numéro 557

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question

On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} y + \frac{1}{z} = a \\ z + \frac{1}{x} = b \\ x + \frac{1}{y} = c \end{cases} \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des nombres donnés.}$$

Peut-on choisir a, b, c de manière que le système (S) proposé admette deux solutions distinctes formées de nombres entiers ?

2 Une réponse négative

La réponse à la question est négative : on ne peut pas avoir deux solutions entières distinctes d'un tel système. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux solutions distinctes (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) dans $(\mathbf{Z} \setminus \{0\})^3$. Des deux équations $y_1 + \frac{1}{z_1} = a$ et $y_2 + \frac{1}{z_2} = a$ on tire, par différence, $y_1 - y_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$ et on obtient de même par permutation circulaire $z_1 - z_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$ et $x_1 - x_2 = \frac{y_1 - y_2}{y_1 y_2}$. Ces équations donnent $y_1 - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2}$ et les équations analogues obtenues par permutation circulaire. Cette équation impose soit $y_1 - y_2 = 0$, soit $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 = 1$.

Le cas $y_1 - y_2 = 0$ est à écarter car il implique aussi $x_1 = x_2$ et $z_1 = z_2$ ce qui contredit le fait que les solutions sont distinctes.

Il reste la relation $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 = 1$. Comme on est dans les entiers, cela montre que tous les x_i, y_i, z_i valent ± 1 . On a alors $x_i = 1/x_i$ et les équations proposées deviennent $y + z = a$, $z + x = b$ et $x + y = c$, les valeurs de a, b, c , qui sont sommes de deux termes parmi les nombres 1 et -1 , étant alors $-2, 0$ ou 2 . Mais le système d'équations est devenu linéaire et c'est un système de Cramer (le déterminant vaut 2), de sorte qu'il admet une unique solution,

ce qui est une contradiction avec l'existence des deux solutions distinctes (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) .

3 Trouver toutes les solutions

3.1 La nature du système

Le système (S) est équivalent au système (S') suivant :

$$\begin{cases} yz - az + 1 = 0 \\ zx - bx + 1 = 0 \\ xy - cy + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des nombres donnés.}$$

En effet, si l'on a une solution (x, y, z) de (S) on voit, après multiplication par les dénominateurs, qu'elle est solution de (S') . Inversement une solution (x, y, z) de (S') vérifie $xyz \neq 0$ (si $z = 0$ par exemple, la première équation devient $1 = 0$) donc est solution de (S) .

Comme l'équation $yz - az + 1 = 0$ définit une hyperbole du plan des (y, z) , la même équation dans l'espace définit un cylindre à base hyperbolique, donc une quadrique de \mathbf{R}^3 (ou K^3 plus généralement). On cherche donc l'intersection de trois quadriques. Une variante spatiale du théorème de Bézout indique qu'avec des hypothèses convenables il va s'agir de 8 points, mais il faut pour cela travailler en projectif, sur un corps algébriquement clos et en tenant compte des multiplicités. Or, le système (S') , vu dans \mathbf{P}^3 , devient un système homogène :

$$\begin{cases} yz - azt + t^2 = 0 \\ zx - bxt + t^2 = 0 \\ xy - cyt + t^2 = 0 \end{cases}$$

et à l'infini (i.e. pour $t = 0$), il admet pour solutions $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$. Mais on a le résultat suivant :

Lemme 3.1. *La multiplicité de la solution $A = (1, 0, 0, 0)$ est égale à 2 si $1 - ab \neq 0$ et ≥ 3 si $1 - ab = 0$. On a des résultats analogues en les autres points par permutation circulaire.*

Démonstration. C'est un calcul dans l'anneau local de ce point¹. On se place dans le sous-espace affine défini par $X = 1$. L'anneau local de la variété

1. Le lecteur non familier avec ce formalisme peut sauter allègrement cette preuve.

d'intersection en A est $R := K[Y, Z, T]_{(m)}/I_A$ où l'on a localisé l'anneau de polynômes par rapport à l'idéal maximal $m = (Y, Z, T)$, c'est à dire qu'on a inversé tous les polynômes qui ne sont pas nuls en $(0, 0, 0)$. L'idéal I_A est l'idéal engendré par les équations :

$$I_A = (YZ - aZT + T^2, Z - bT + T^2, Y(1 - cT) + T^2).$$

Ces équations permettent d'éliminer Y et Z et, comme $1 - cT$ est inversible, il reste $R \simeq K[T]_{(T)}/\overline{I}_A$ où \overline{I}_A est engendré par l'unique équation

$$\frac{T^2}{cT - 1}(bT - T^2) - a(bT^2 - T^3) + T^2 = (1 - ab)T^2 + o(T^2)$$

ce qui donne le résultat.

Les trois solutions à l'infini représentent donc une multiplicité au moins égale à $3 \times 2 = 6$ et il ne reste plus la place que pour deux solutions à distance finie que nous allons maintenant expliciter.

3.2 Les solutions à distance finie

Traisons d'abord le cas générique :

Proposition 3.2. *Soit K un corps commutatif. Soient $a, b, c \in K^3$ vérifiant $bc \neq 1$, $ca \neq 1$, $ab \neq 1$, $a + b + c - abc \neq \pm 2$. Alors, le système (S') admet deux solutions distinctes dans une extension de degré ≤ 2 de K . Si K est le corps des réels on a deux solutions réelles si $|a + b + c - abc| > 2$.*

Démonstration. On a vu qu'une solution de (S') vérifie $xyz \neq 0$. De plus, on a aussi $az - 1 \neq 0$, $bx - 1 \neq 0$ et $cy - 1 \neq 0$ (avec la première équation, $az - 1 = 0$ impose que y ou z est nul). La deuxième équation donne alors $z = b - \frac{1}{x}$, que que l'on reporte dans la première, d'où $y = \frac{abx - a - x}{bx - 1}$ et, avec la troisième, on a une équation en x :

$$(*) \quad (ab - 1)x^2 + (b + c - a - abc)x + ac - 1 = 0.$$

Comme on a supposé $ab \neq 1$, il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 + 2bc + 2ca + 2ab - 4 = (a + b + c - abc)^2 - 4.$$

Ce discriminant n'est pas nul, de sorte que l'équation admet deux racines² x_1, x_2 dans une extension de K de degré au plus 2. On en déduit les solutions de (S') par les formules ci-dessus.

2. Même en caractéristique 2.

Remarques 3.3. 1) L'invariance du système par permutation circulaire montre que les solutions (x, y, z) peuvent également être obtenues en les exprimant en fonction de y ou z , ceux-ci étant racines de l'équation du second degré analogue à (*) obtenue en permutant circulairement a, b, c .

2) Si le discriminant est nul il y a une solution double à distance finie.

Il reste à regarder les cas particuliers. Le lecteur établira sans peine le résultat suivant :

Proposition 3.4. *Supposons par exemple qu'on a $ab - 1 = 0$. Les possibilités sont les suivantes :*

1) Si $a - b \neq 0$ il y a une unique x solution qui est $\frac{ac - 1}{a - b}$ (et on a $ac \neq 1$).

2) Si $a = b$ et $ac \neq 1$ il n'y a pas de solution.

3) Si $a = b$ et $ac = 1$ on a $a = b = c = \pm 1$ et le système admet une infinité de solutions données par x quelconque $\neq 0, 1$, $y = \frac{1}{1-x}$ et $z = \frac{x-1}{x}$ dans le cas $a = 1$ et par $x \neq 0, -1$, $y = \frac{-1}{x+1}$ et $z = -1 - \frac{1}{x}$ dans le cas $a = -1$.

Remarque 3.5. Si l'on a, par exemple, $ab = 1$ et $a \neq b$, il n'y a plus qu'une solution à distance finie, ce qui correspond au fait que la solution $(1, 0, 0, 0)$ à l'infini est multiple d'ordre 3.

3.3 Retour sur le problème initial

Si l'on suppose qu'on a deux solutions entières distinctes (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) comme dans le problème proposé, on voit facilement qu'on n'est pas dans l'un des cas particuliers, et on a donc $x_1 x_2 = \frac{ac - 1}{ab - 1}$. Mais le même argument donne aussi $y_1 y_2 = \frac{bc - 1}{ba - 1}$ et $z_1 z_2 = \frac{cb - 1}{ca - 1}$. Ces trois quantités sont entières et leur produit est 1, ce qui les oblige à valoir ± 1 et, par conséquent, impose aussi que les x_i, y_i, z_i soient égaux à ± 1 . On retrouve la situation étudiée au premier paragraphe.

4 Solutions entières ou rationnelles

Une question bien naturelle, à la lecture de ce problème, est la suivante :

À quelles conditions le système donné admet-il des solutions entières ou rationnelles ?

Bien entendu, il n'en existe pas toujours. S'il y en a cela oblige a, b, c à être rationnels, ce qu'on supposera désormais. Une conséquence de 3.2 est alors la suivante :

Proposition 4.1. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{Q}^3$. Le système (S) admet des solutions rationnelles si et seulement si le nombre :

$$\Delta = a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 + 2bc + 2ca + 2ab - 4 = (a+b+c-abc)^2 - 4$$

est un carré dans \mathbf{Q} .

On reconnaît la situation de l'équation de Pythagore, justiciable du lemme suivant :

Lemme 4.2. Les solutions rationnelles de $r^2 - 4 = s^2$ sont de la forme $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{u}{q}$ avec $p, q, u \in \mathbf{Z}$, $q > 0$, $p \wedge q = u \wedge q = 1$ et $p^2 = u^2 + 4q^2$. Il existe des entiers m, n premiers entre eux tels que l'on ait $p = m^2 + n^2$, $q = mn$ et $u = m^2 - n^2$ (solutions du premier type) ou $p = 2(m^2 + n^2)$, $q = m^2 - n^2$ et $u = 4mn$ (solutions du second type).

Démonstration. On réduit les fractions irréductibles r et s au même dénominateur en prenant comme dénominateur q le ppcm des dénominateurs de r et s . On a donc $r = \frac{p}{q}$ et $s = \frac{u}{q}$, et p, q, u n'ont pas de facteur commun non trivial. La relation $r^2 - 4 = s^2$ donne $p^2 = u^2 + 4q^2$, qui montre qu'on a $p \wedge q = u \wedge q = 1$ (si l premier divisait p et q par exemple, il diviserait u ce qui est absurde).

On a donc une solution entière $(p, 2q, u)$ de l'équation de Pythagore $p^2 = u^2 + 4q^2$. Il y a deux cas :

1) Cette solution est primitive, ce qui signifie que p, u, q sont premiers entre eux. Alors, p et u sont impairs et il est bien connu qu'il existe des entiers m, n premiers entre eux avec $m > n > 0$ tels que l'on ait $p = m^2 + n^2$, $u = m^2 - n^2$ et $q = mn$.

2) Cette solution n'est pas primitive. Comme on a $p \wedge q = u \wedge q = 1$, la seule possibilité pour un facteur commun est le nombre 2 : $p = 2p'$, $u = 2u'$. On a alors $p'^2 = q^2 + u'^2$ et cette fois, comme on a $p \wedge q = 1$, donc q impair, p', q, u' est une solution primitive de cette équation et on a q, p' impairs et u' pair. On en déduit qu'il existe des entiers m, n premiers entre eux avec $m > n > 0$ tels que l'on ait $p' = m^2 + n^2$, $u' = 2mn$ et $q = m^2 - n^2$.

Exemple 4.3. On peut prendre $m = 2$ et $n = 1$, qui donnent pour le premier type $p = 5$, $q = 2$ et $u = 3$, donc $r = 5/2$ et pour le second $p = 10$, $q = 3$ et $u = 8$, donc $r = 10/3$.

Corollaire 4.4. Soit $r, s \in \mathbf{Q}^2$ une solution de $r^2 - 4 = s^2$. Soient $a, b \in \mathbf{Q}$ tels que $ab \neq 1$ et posons $c = \frac{r - a - b}{1 - ab}$. Alors, le système (S) correspondant à a, b, c admet des solutions rationnelles.

Démonstration. En effet, on a $r = a + b + c - abc$ et $r^2 - 4 = s^2$ est un carré de \mathbf{Q} .

Par exemple, avec $r = 5/2$ on peut prendre $a = 1, b = 3$ d'où $c = 3/4$ et on obtient la solution $x = -1/2, y = 4/5$ et $z = 5$ du système (S) .